С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университетінің
ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Павлодарского государственного университета имени С. Торайгырова

ПМУ ХАБАРШЫСЫ

Физика-математикалық сериясы
1997 жылдан бастап шығады

ВЕСТНИК ПГУ

Физико-математическая серия
Издается с 1997 года

ISSN 1811-1807

№4 (2016)

Павлодар

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Павлодарского государственного университета имени С. Торайгырова

Физико-математическая серия
выходит 4 раза в год

СВИДЕТЕЛЬСТВО
о постановке на учет средства массовой информации
№ 14213-Ж
выдано
Министерством культуры, информации и общественного согласия
Республики Казахстан

Тематическая направленность
публикация материалов в области физики, математики,
механики и информатики

Подписной индекс – 76135

МАЗМҰНЫ

МАТЕМАТИКА

Павлюк И. И., Павлюк Ин. И., Тусупова А. Ж.
Коммутативтік қатынасқа қатысты топтың элемент централизаторы 6

Павлюк И. И., Павлюк Ин. И., Жангазинова Д. М.
Топтардағы коммутативтік қатынасқа қатысты
салыстырулардың шешімі туралы 17

ФИЗИКА

Жаныс А. Б.
Тығыс қатты денеде вариациялық әдіспен стационар
жылуөткізгіштің сызықты емес теңдеу үшін сандық есептеулер 23

Туганбаев У. М.
Конвективті диффузия стационарлық
теңдеуінің аналитикалық зерттеуі туралы 28

Туганбаев У. М.
Жерқыртысындағы жылулық өткізгіштіктің
екі өлшемді теңдеудің зерттеуі туралы.. 35

Масанов Ж. К., Ажиханов Н. Т., Турымбетов Т. А., Аймешов Ж. А.
Серпімді деформация жыныстарының жағдайында
екі штректің салмақты еңкіш қабатты саңылаулары
жүйесімен алқабында кернеулі-деформацияланған күйі 44

ИНФОРМАТИКА

Оспанова Н. Н.
Кәсіби бағытталған ағылшын тілін оқытудың
теориялық моделін компьютерлік жүзеге асыру 52

БАҒЫТТАР БОЙЫНША ҒЫЛЫМИ-МЕТОДОЛОГИЯЛЫҚ ЗЕРТТЕУЛЕР

Калимбетов Б. Т., Хабибуллаев Ж. О.
Сингуляр ауытқыған теңдеулерді оқытуда пәнаралық байланыстар 64

Мухамедзянова Н. И.
ЖОО-дағы математика пәнінен тәжіреби
сабақтарда студенттерді бағалау туралы 70

Жансерік Н. Т., Жукабаева Т.
Бұлттық есептеулер негіздері... 74

Авторларға арналған ережелер 79
Жарияланым этикасы 85

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Павлюк И. И., Павлюк Ин. И., Тусупова А. Ж.
Квазицентр группы и отношение
коммутативности элементов группы 6
Павлюк И. И., Павлюк Ин. И., Жангазинова Д. М.О
решении сравнений относительно
отношения коммутативности в группах 17

ФИЗИКА

Жаныс А. Б.
Численные расчеты для нелинейного
уравнения стационарной теплопроводности
в упругом твердом теле вариационным методом 23
Туганбаев У. М.
Об аналитическом исследовании
нестационарного уравнения конвективной диффузии 28
Туганбаев У. М.
Об исследовании двумерного уравнения теплопроводности в почвогрунтах .. 35
Масанов Ж. К., Ажиханов Н. Т., Турымбетов Т. А., Аймешов Ж. А.
Напряженно-деформированное состояние двух штреков в весомом
наклоннослоистом массиве с системой щелей в условиях упругой
деформации пород 44

ИНФОРМАТИКА

Оспанова Н. Н.
Компьютерная реализация теоретической модели дисциплины
«Профессионально-ориентированный английский язык» 52

НАУЧНО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ОТРАСЛЯМ

Калимбетов Б. Т., Хабибуллаев Ж. О.
Межпредметные связи при обучении сингулярно
возмущенным уравнениям 64
Мухамедзянова Н. И.
К вопросу оценки работы студента на практическом занятии
по математике в вузе 70
Жансерик Н., Жукабаева Т.
Основы облачного вычисления... 74

Правила для авторов 79
Публикационная этика 85

CONTENT

MATHEMATICS

Pavlyuk I., Pavlyuk In., Tussupova A.
A quasicenter of group and a relation of commutativity of group elements 6
Pavlyuk I., Pavlyuk In., Zhangazinova D.
About solution of comparisons with respect to commutativity relation in groups 17

PHYSICS

Zhanys A. B.
Numerical calculations for the nonlinear equation of stationary
heat conductivity in the elastic solid body by the variation method 23
Tuganbaev U. M.
About analytical research of the non-stationary equation of convective diffusion 28
Tuganbaev U. M.
About research of the two-dimensional equation of heat conductivity in soil 35
Massanov Zh., Azhikhanov N., Turymbetov T., Aimeshov Zh.
The intense deformed condition of two drifts in the powerful inclined layered
massif with the system of cracks in the conditions of elastic deformation of rocks .. 44

INFORMATICS

Ospanova N.
Computer realization of the theoretical model of the subject
«Professional-oriented English».. 52

SCIENTIFIC AND METHODOLOGICAL BRANCH RESEARCHES

Kalimbetov B., Habibullaev Zh.
Interdisciplinary communication at teaching
the singularly perturbed equations 64
Mukhamedzyanova N.
On evaluation of the student practical work in mathematics
in a higher education institution 70
Zhanserik N., Zhukabayeva T.
The basics of cloud computing 74

Rules for authors 79
Publication ethics.. 85

Секция «МАТЕМАТИКА»

УДК 512. 54

И. И. Павлюк[1], Ин. И. Павлюк[2], А. Ж. Тусупова[3]
[1]к.ф.-м.н, [2]доцент, [3]студент
[1,3]Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар, Казахстан;
[2]Новосибирский государственный педагогический университет, г. Новосибирск, Россия
e-mail: [1]ivan.pavlyuk@mail.ru, [2]inessa7772@mail.ru, [3]assemat95@mail.ru

КВАЗИЦЕНТР ГРУППЫ И ОТНОШЕНИЕ КОММУТАТИВНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ГРУППЫ

В работе введено новое понятие теории групп квазицентр группы и установлено, что центр группы содержится в квазицентре.

Ключевые слова: централизатор элемента группы, отношение коммутативности, квазицентр группы.

ВВЕДЕНИЕ

В теории групп, известно понятие центра группы G относительно теоретико-группового отношения равенства:

$$Z(G) = \bigcap_{g \in G} C_G(g), \tag{1}$$

где $C_G(g) = \{x / g^x = g\}$, а $g^x = x^{-1}gx$. По существу $\forall x \in C_G(g)$ элемент x коммутирует с элементом g, т.е. символически $x \,{}_k\!\equiv a$. В понятии централизатора произвольного элемента группы заключается бинарное отношение коммутативности ${}_k\!\equiv$ элементов группы. Очевидно $(\forall g \in G)(g \,{}_k\!\equiv g)$ и если $g \,{}_k\!\equiv b$, то $b \,{}_k\!\equiv g$. Более детально отношение коммутативности для $a, b \in G$ выражено формулой:

$$(a \,{}_k\!\equiv b) \overset{def}{\Leftrightarrow} (ab = ba). \tag{2}$$

Понятно, что отношение коммутативности является отношением рефлексивным и симметричным. Как показывает пример группы 21-го порядка $G_{21}=\{e,a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6,b,b^2,ab,a^2b,a^3b,a^4b,a^5b,a^6b,ab^2,a^2b^2,a^3b^2,a^4b^2,a^5b^2,a^6b^2\}$ с генетически кодом $a^7=b^3=e, ba=a^4b$. Элемент a коммутирует с элементом e, а элемент $e \,{}_k\!\equiv b$, но $ab \neq ba$, так как $ba=a^4b$ и $ab \neq a^4b$ Отсюда следует, что отношение коммутативности не является отношением эквивалентности, но оно даёт хорошее графовое представление конечных групп, где отражается структура группы и взаимосвязь элементов.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Определение 1. [3] Множество $C_G(a)$ элементов x таких что $x^{-1}ax=a^x=a$ называется централизатором элемента а группы G в группе G, т.е.

$$C_G(a)=\{x/a^x=a\}. \tag{3}$$

Определение 2. [4] Элементы x и y группы G связаны отношением коммутативности "$_k\equiv$" в группе G если и только если имеет место сравнение $x\cdot y=y\cdot x$ относительно отношения равенства "$=$" элементов группы G и основной алгебраической операции "$\cdot$" заданной на элементах группы, т.е.

$$(x,y\in G)\left((x\ _k\!\equiv y)\overset{def}{\Leftrightarrow}(x\cdot y=y\cdot x)\right). \tag{4}$$

Определение 3. [1] Элемент g группы G коммутирует с подгруппой H группы G если и только если $\exists h_1,h_2\in H$ такие, что $gh_1=h_2g$. Т.е.:

$$\left((g\in G)\,\&\,(H<G)\right)\left(g\ _k\!\equiv H\right)\overset{def}{\Leftrightarrow}\left(\exists h_1,h_2\in H/gh_1=h_2g\right). \tag{5}$$

Определение 4. [1] Подгруппа H является нормальным делителем группы G, если и только если она перестановочна с каждым элементом группы G. Т.е.:

$$\left((H<G)(H\triangleleft G)\right)\Leftrightarrow\left((\forall g\in G)(g\ _k\!\equiv H)\right). \tag{6}$$

Построим таблицу коммутативности элементов группы

$G_{21}=\{e,a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6,b,b^2,ab,a^2b,a^3b,a^4b,a^5b,a^6b,ab^2,a^2b^2,a^3b^2,a^4b^2,a^5b^2,a^6b^2\}$ с генетически кодом $a^7=b^3=e,ba=a^4b$ (см. Таблицу 1).

Таблица 1 – Коммутативность элементов группы G_{21}.

$\cdot$	e	a	a^2	a^4	a^3	a^5	a^6	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	b^2	a^5b^2	a^3b^2	ab^2	a^6b^2	a^4b^2	a^2b^2
e	$\langle e;e\rangle$	$\langle e;a\rangle$	$\langle e;a^2\rangle$	$\langle e;a^4\rangle$	$\langle e;a^3\rangle$	$\langle e;a^5\rangle$	$\langle e;a^6\rangle$	$\langle e;b\rangle$	$\langle e;ab\rangle$	$\langle e;a^2b\rangle$	$\langle e;a^3b\rangle$	$\langle e;a^4b\rangle$	$\langle e;a^5b\rangle$	$\langle e;a^6b\rangle$	$\langle e;b^2\rangle$	$\langle e;a^5b^2\rangle$	$\langle e;a^3b^2\rangle$	$\langle e;ab^2\rangle$	$\langle e;a^6b^2\rangle$	$\langle e;a^4b^2\rangle$	$\langle e;a^2b^2\rangle$
a^6	$\langle a^6;e\rangle$	$\langle a^6;a\rangle$	$\langle a^6;a^2\rangle$	$\langle a^6;a^4\rangle$	$\langle a^6;a^3\rangle$	$\langle a^6;a^5\rangle$	$\langle a^6;a^6\rangle$														
a^5	$\langle a^5;e\rangle$	$\langle a^5;a\rangle$	$\langle a^5;a^2\rangle$	$\langle a^5;a^4\rangle$	$\langle a^5;a^3\rangle$	$\langle a^5;a^5\rangle$	$\langle a^5;a^6\rangle$														
a^3	$\langle a^3;e\rangle$	$\langle a^3;a\rangle$	$\langle a^3;a^2\rangle$	$\langle a^3;a^4\rangle$	$\langle a^3;a^3\rangle$	$\langle a^3;a^5\rangle$	$\langle a^3;a^6\rangle$														
a^4	$\langle a^4;e\rangle$	$\langle a^4;a\rangle$	$\langle a^4;a^2\rangle$	$\langle a^4;a^4\rangle$	$\langle a^4;a^3\rangle$	$\langle a^4;a^5\rangle$	$\langle a^4;a^6\rangle$														
a^2	$\langle a^2;e\rangle$	$\langle a^2;a\rangle$	$\langle a^2;a^2\rangle$	$\langle a^2;a^4\rangle$	$\langle a^2;a^3\rangle$	$\langle a^2;a^5\rangle$	$\langle a^2;a^6\rangle$														
a	$\langle a;e\rangle$	$\langle a;a\rangle$	$\langle a;a^2\rangle$	$\langle a;a^4\rangle$	$\langle a;a^3\rangle$	$\langle a;a^5\rangle$	$\langle a;a^6\rangle$														
b^2	$\langle b^2;e\rangle$							$\langle b^2;b\rangle$							$\langle b^2;b^2\rangle$						
a^5b^2	$\langle a^5b^2;e\rangle$								$\langle a^5b^2;b\rangle$							$\langle a^5b^2;a^5b^2\rangle$					
a^3b^2	$\langle a^3b^2;e\rangle$									$\langle a^3b^2;ab\rangle$							$\langle a^3b^2;a^3b^2\rangle$	$\langle ab^2;ab^2\rangle$			
ab^2	$\langle ab^2;e\rangle$										$\langle ab^2;a^2b\rangle$							$\langle ab^2;ab^2\rangle$			
a^6b^2	$\langle a^6b^2;e\rangle$											$\langle a^6b^2;a^3b\rangle$							$\langle a^6b^2;a^6b^2\rangle$		
a^4b^2	$\langle a^4b^2;e\rangle$												$\langle a^4b^2;a^4b\rangle$							$\langle a^4b^2;a^4b^2\rangle$	
a^2b^2	$\langle a^2b^2;e\rangle$													$\langle a^2b^2;a^6b\rangle$							$\langle a^2b^2;a^2b^2\rangle$
b	$\langle b;e\rangle$							$\langle b;b\rangle$							$\langle b;b^2\rangle$						
ab	$\langle ab;e\rangle$								$\langle ab;ab\rangle$							$\langle ab;a^5b^2\rangle$					
a^2b	$\langle a^2b;e\rangle$									$\langle a^2b;a^2b\rangle$							$\langle a^2b;a^3b^2\rangle$				
a^3b	$\langle a^3b;e\rangle$										$\langle a^3b;a^3b\rangle$							$\langle a^3b;ab^2\rangle$			
a^4b	$\langle a^4b;e\rangle$											$\langle a^4b;a^4b\rangle$							$\langle a^4b;a^6b^2\rangle$		
a^5b	$\langle a^5b;e\rangle$												$\langle a^5b;a^5b\rangle$							$\langle a^5b;a^4b^2\rangle$	
a^6b	$\langle a^6b;e\rangle$													$\langle a^6b;a^6b\rangle$							$\langle a^6b;a^2b^2\rangle$

Построим таблицу классов сопряженных элементов группы $G_{21}=\{e,a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6,b,b^2,ab,a^2b,a^3b,a^4b,a^5b,a^6b,ab^2,a^2b^2,a^3b^2,a^4b^2,a^5b^2,a^6b^2\}$ с генетически кодом $a^7=b^3=e, ba=a^4b$ (см. Таблицу 2).

Таблица 2 – Таблица классов сопряженных элементов группы G_{21}.

.	e	a	a^2	a^4	a^3	a^5	a^6	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	b^2	a^5b^2	a^3b^2	ab^2	a^6b^2	a^4b^2	a^2b^2
e	e	a	a^2	a^4	a^3	a^5	a^6	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	b^2	a^5b^2	a^3b^2	ab^2	a^6b^2	a^4b^2	a^2b^2
e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e
a^6	a^6	a^6	a^6	a^6	a^6	a^6	a^6	a^5	a^5	a^5	a^5	a^5	a^5	a^5	a^3	a^3	a^3	a^3	a^3	a^3	a^3
a^5	a^5	a^5	a^5	a^5	a^5	a^5	a^5	a^3	a^3	a^3	a^3	a^3	a^3	a^3	a^6	a^6	a^6	a^6	a^6	a^6	a^6
a^3	a^3	a^3	a^3	a^3	a^3	a^3	a^3	a^6	a^6	a^6	a^6	a^6	a^6	a^6	a^5	a^5	a^5	a^5	a^5	a^5	a^5
a^4	a^4	a^4	a^4	a^4	a^4	a^4	a^4	a	a	a	a	a	a	a	a^2	a^2	a^2	a^2	a^2	a^2	a^2
a^2	a^2	a^2	a^2	a^2	a^2	a^2	a^2	a^4	a^4	a^4	a^4	a^4	a^4	a^4	a	a	a	a	a	a	a
a	a	a	a	a	a	a	a	a^2	a^2	a^2	a^2	a^2	a^2	a^2	a^4	a^4	a^4	a^4	a^4	a^4	a^4
b^2	b^2	ab^2	a^2b^2	a^4b^2	a^3b^2	a^5b^2	a^6b^2	b^2	a^2b^2	a^4b^2	a^6b^2	ab^2	a^3b^2	a^5b^2	b^2	a^6b^2	a^5b^2	a^4b^2	a^3b^2	a^2b^2	ab^2
a^5b^2	a^5b^2	a^6b^2	b^2	a^2b^2	ab^2	a^3b^2	a^4b^2	a^3b^2	a^5b^2	b^2	a^2b^2	a^4b^2	a^6b^2	ab^2	a^6b^2	a^3b^2	a^4b^2	a^3b^2	a^2b^2	ab^2	b^2
a^3b^2	a^3b^2	a^4b^2	a^5b^2	b^2	a^6b^2	ab^2	a^2b^2	a^6b^2	ab^2	a^3b^2	a^5b^2	b^2	a^2b^2	a^4b^2	a^5b^2	a^4b^2	a^3b^2	a^2b^2	ab^2	b^2	a^6b^2
ab^2	ab^2	a^2b^2	a^3b^2	a^5b^2	a^4b^2	a^6b^2	b^2	a^2b^2	a^4b^2	a^6b^2	ab^2	a^3b^2	a^5b^2	b^2	a^4b^2	a^3b^2	a^2b^2	ab^2	b^2	a^6b^2	a^5b^2
a^6b^2	a^6b^2	b^2	ab^2	a^3b^2	a^2b^2	a^4b^2	a^5b^2	a^3b^2	b^2	a^2b^2	a^4b^2	a^6b^2	ab^2	a^3b^2	a^3b^2	a^2b^2	ab^2	b^2	a^6b^2	a^5b^2	a^4b^2
a^4b^2	a^4b^2	a^5b^2	a^6b^2	ab^2	b^2	a^2b^2	a^3b^2	ab^2	a^3b^2	a^3b^2	b^2	a^2b^2	a^4b^2	a^6b^2	a^2b^2	ab^2	b^2	a^6b^2	a^5b^2	a^4b^2	a^3b^2
a^2b^2	a^2b^2	a^3b^2	a^4b^2	a^6b^2	a^5b^2	b^2	ab^2	a^4b^2	a^6b^2	ab^2	a^3b^2	a^5b^2	b^2	a^2b^2	ab^2	b^2	a^6b^2	a^5b^2	a^4b^2	a^3b^2	a^2b^2
b	b	a^3b	a^6b	a^5b	a^2b	ab	a^4b	b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^4b	ab	b	a^4b	ab	a^5b	a^2b	a^6b	a^3b
ab	ab	a^4b	b	a^6b	a^3b	a^2b	a^5b	a^2b	ab	b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^4b	ab	a^5b	a^2b	a^6b	a^3b	b
a^2b	a^2b	a^5b	ab	b	a^4b	a^3b	a^6b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^6b	a^5b	ab	a^5b	a^2b	a^6b	a^3b	b	a^4b
a^3b	a^3b	a^6b	a^2b	ab	a^5b	a^4b	b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^5b	a^2b	a^6b	a^3b	b	a^4b	ab
a^4b	a^4b	b	a^3b	a^2b	a^6b	a^5b	ab	ab	b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	a^2b	a^6b	a^3b	b	a^4b	ab	a^5b
a^5b	a^5b	ab	a^4b	a^3b	b	a^6b	a^2b	a^3b	a^2b	ab	b	a^6b	a^5b	a^4b	a^6b	a^3b	b	a^4b	ab	a^5b	a^2b
a^6b	a^6b	a^2b	a^5b	a^4b	ab	b	a^3b	a^3b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^6b	a^3b	b	a^4b	ab	a^5b	a^2b	a^6b

Далее построим таблицу коммутирования элементов группы G_{21} (см. Таблицу 3).

Таблица 3 – Таблица коммутирования элементов группы G_{21}.

$\circ$	e	a	a^2	a^4	a^3	a^5	a^6	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	b^2	a^5b^2	a^3b^2	ab^2	a^6b^2	a^4b^2	a^2b^2
e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e
a^6	e	e	e	e	e	e	e	a^6	a^6	a^6	a^6	a^6	a^6	a^6	a^4	a^4	a^4	a^4	a^4	a^4	a^4
a^5	e	e	e	e	e	e	e	a^5	a^5	a^5	a^5	a^5	a^5	a^5	a	a	a	a	a	a	a
a^3	e	e	e	e	e	e	e	a^3	a^3	a^3	a^3	a^3	a^3	a^3	a^2	a^2	a^2	a^2	a^2	a^2	a^2
a^4	e	e	e	e	e	e	e	a^4	a^4	a^4	a^4	a^4	a^4	a^4	a^5	a^5	a^5	a^5	a^5	a^5	a^5
a^2	e	e	e	e	e	e	e	a^2	a^2	a^2	a^2	a^2	a^2	a^2	a^6	a^6	a^6	a^6	a^6	a^6	a^6
a	e	e	e	e	e	e	e	a	a	a	a	a	a	a	a^3	a^3	a^3	a^3	a^3	a^3	a^3
b^2	e	a^4	a	a^2	a^5	a^6	a^3	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	e	a^3	a^6	a^2	a^5	a	a^4
a^5b^2	e	a^4	a	a^2	a^5	a^6	a^3	a^6	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^4	e	a^3	a^6	a^2	a^5	a
a^3b^2	e	a^4	a	a^2	a^5	a^6	a^3	a^5	a^6	e	a	a^2	a^3	a^4	a	a^4	e	a^3	a^6	a^2	a^5
ab^2	e	a^4	a	a^2	a^5	a^6	a^3	a^3	a^5	a^6	e	a	a^2	a^3	a^5	a	a^4	e	a^3	a^6	a^2
a^6b^2	e	a^4	a	a^2	a^5	a^6	a^3	a^4	a^3	a^5	a^6	e	a	a^2	a^2	a^5	a	a^4	e	a^3	a^6
a^4b^2	e	a^4	a	a^2	a^5	a^6	a^3	a^2	a^4	a^3	a^5	a^6	e	a	a^6	a^2	a^5	a	a^4	e	a^3
a^2b^2	e	a^4	a	a^2	a^5	a^6	a^3	a	a^2	a^4	a^4	a^5	a^6	e	a^3	a^6	a^2	a^5	a	a^4	e
b	e	a^6	a^5	a^3	a^4	a^2	a	e	a^5	a^3	a	a^6	a^4	a^2	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6
ab	e	a^6	a^5	a^3	a^4	a^2	a	a^2	e	a^5	a^3	a	a^6	a^4	a^6	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5
a^2b	e	a^6	a^5	a^3	a^4	a^2	a	a^4	a^2	e	a^5	a^3	a	a^6	a^5	a^6	e	a	a^2	a^3	a^4
a^3b	e	a^6	a^5	a^3	a^4	a^2	a	a^6	a^4	a^2	e	a^5	a^3	a	a^4	a^5	a^6	e	a	a^2	a^3
a^4b	e	a^6	a^5	a^3	a^4	a^2	a	a	a^6	a^4	a^2	e	a^5	a^3	a^3	a^4	a^5	a^6	e	a	a^2
a^5b	e	a^6	a^5	a^3	a^4	a^2	a	a^3	a	a^6	a^4	a^2	e	a^5	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	e	a
a^6b	e	a^6	a^5	a^3	a^4	a^2	a	a^5	a^3	a	a^6	a^4	a^2	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	e

Выпишу пары элементов коммутирующих между собой: $\langle e;e\rangle, \langle e;a\rangle,$
$\langle e;a^2\rangle, \langle e;a^3\rangle, \langle e;a^4\rangle, \langle e;a^5\rangle, \langle e;a^6\rangle, \langle e;b\rangle, \langle e;ab\rangle, \langle e;a^2b\rangle, \langle e;a^3b\rangle, \langle e;a^4b\rangle, \langle e;a^5b\rangle, \langle e;a^6b\rangle,$
$\langle e;b^2\rangle, \langle e;a^5b^2\rangle, \langle e;a^3b^2\rangle, \langle e;ab^2\rangle, \langle e;a^6b^2\rangle, \langle e;a^4b^2\rangle, \langle e;a^2b^2\rangle, \langle a^6;e\rangle, \langle a^5;e\rangle, \langle a^2b^2;a^2b^2\rangle,$
$\langle a^3;e\rangle, \langle a^4;e\rangle, \langle a^2;e\rangle, \langle a;e\rangle, \langle b^2;e\rangle, \langle a^5b^2;e\rangle, \langle a^3b^2;e\rangle, \langle ab^2;e\rangle, \langle a^6b^2;e\rangle, \langle a^4b^2;e\rangle, \langle a^2b^2;e\rangle,$
$\langle b;e\rangle, \langle ab;e\rangle, \langle a^2b;e\rangle, \langle a^3b;e\rangle, \langle a^4b;e\rangle, \langle a^5b;e\rangle, \langle a^6b;e\rangle, \langle a^6;a\rangle, \langle a^6;a^2\rangle, \langle a^6;a^4\rangle, \langle a^6;a^3\rangle,$
$\langle a^6;a^5\rangle, \langle a^6;a^6\rangle, \langle a^5;a\rangle, \langle a^5;a^2\rangle, \langle a^5;a^4\rangle, \langle a^5;a^3\rangle, \langle a^5;a^5\rangle, \langle a^5;a^6\rangle, \langle a^3;a\rangle, \langle a^3;a^2\rangle, \langle a^3;a^4\rangle,$
$\langle a^3;a^3\rangle, \langle a^3;a^5\rangle, \langle a^3;a^6\rangle, \langle a^4;a\rangle, \langle a^4;a^2\rangle, \langle a^4;a^4\rangle, \langle a^4;a^3\rangle, \langle a^4;a^5\rangle, \langle a^4;a^6\rangle, \langle a^2;a\rangle, \langle a^2;a^2\rangle,$
$\langle a^2;a^4\rangle, \langle a^2;a^3\rangle, \langle a^2;a^5\rangle, \langle a^2;a^6\rangle, \langle a;a\rangle, \langle a;a^2\rangle, \langle a;a^4\rangle, \langle a;a^3\rangle, \langle a;a^5\rangle, \langle a;a^6\rangle, \langle b^2;b\rangle, \langle a^5b^2;b\rangle,$
$\langle a^3b^2;ab\rangle, \langle ab^2;a^2b\rangle, \langle a^6b^2;a^3b\rangle, \langle a^4b^2;a^4b\rangle, \langle a^2b^2;a^6b\rangle, \langle b;b^2\rangle, \langle ab;a^5b^2\rangle, \langle a^2b;a^3b^2\rangle,$
$\langle a^3b;ab^2\rangle, \langle a^4b;a^6b^2\rangle, \langle a^5b;a^4b^2\rangle, \langle a^6b;a^2b^2\rangle, \langle b;b\rangle, \langle ab;ab\rangle, \langle a^2b;a^2b\rangle, \langle a^3b;a^3b\rangle, \langle a^4b;a^4b\rangle,$
$\langle a^5b;a^5b\rangle, \langle a^6b;a^6b\rangle, \langle b^2;b^2\rangle, \langle a^5b^2;a^5b^2\rangle, \langle a^3b^2;a^3b^2\rangle, \langle ab^2;ab^2\rangle, \langle a^6b^2;a^6b^2\rangle, \langle a^4b^2;a^4b^2\rangle.$

Они получаются из Таблицы 3, коммутатор которых равен *e*.

Теорема 1. [5] Мощность множества $|R_G(x \ {}_k\!\equiv y)|$ в группе G равна мощности суммы централизаторов элементов группы G т.е.

$$|R_G(x \ {}_k\!\equiv y)| = \sum_{g\in G} |C(g)|.$$

Используя формулу из теоремы 1, в группе G_{21} всего коммутирующих пар равно 105.

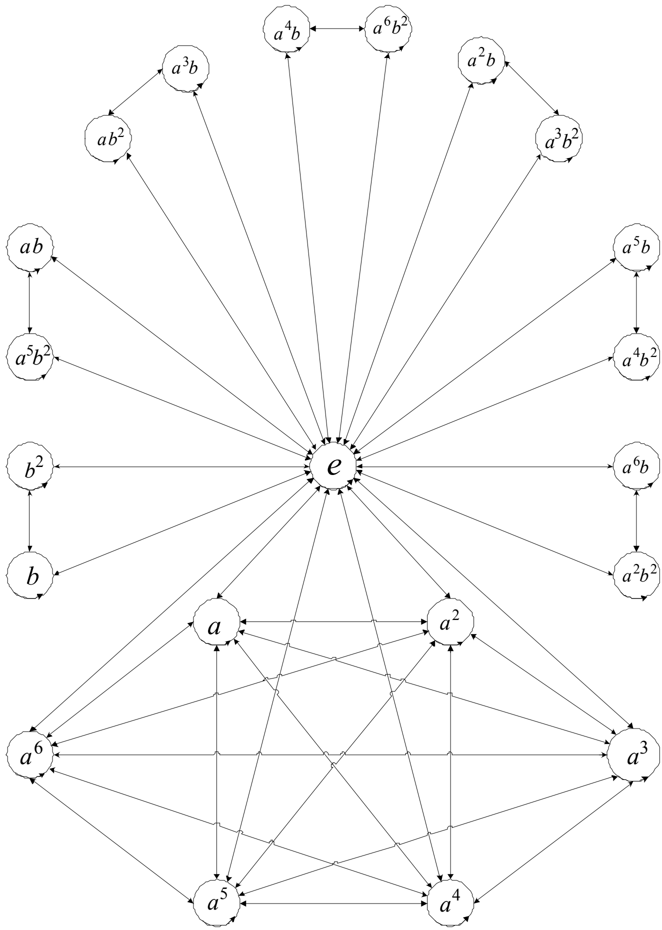


Рисунок 1 – Граф отношения коммутативности элементов группы G_{21}.

Определение 5. Множество ${}_{k\equiv}C_G(a)$ элементов x группы G такое, что ${}_{k\equiv}C_G(a)=\{x\in G \,|\, a^x\ {}_k\!\equiv a\}$ назовем централизатором элемента $a\in G$ в группе G относительно отношения коммутативности.

Определение 6. Множество $QZ(G)$ элементов z группы G, централизатор каждого элемента которого относительно отношения коммутативности совпадает с группой G назовём квазицентром группы G, т.е.:

$$QZ(G)=\{z\in G \,|\, {}_{k\equiv}C_G(z)=G\} \tag{8}$$

В связи с понятием централизатора элемента относительно отношения коммутативности введем понятие квазицентральной сравнимости элементов группы G.

Определение 7. Элемент a группы G квазицентрально сравним с элементом $b \in G$ $(a_{QZ}\equiv b)$ если и только если ${}_{k\equiv}C_G(a)={}_{k\equiv}C_G(b)$, т.е.

$$(a_{QZ}\equiv b)\overset{def}{\Leftrightarrow}({}_{k\equiv}C_G(a)={}_{k\equiv}C_G(b)).$$

Лемма 1. Отношение квазицентральной сравнимости является отношением эквивалентности.

Доказательство. Так как ${}_{k\equiv}C_G(a)=\{x\in G/a^x{}_k\equiv a\}$, то очевидно, ${}_{k\equiv}C(a)={}_{k\equiv}C(a)$ и $a_{Q1}\equiv a$. Таким образом, отношение ${}_{QZ}\equiv$ рефлексивно.

Если же $a_{QZ}\equiv b$, то, очевидно, и $b_{QZ}\equiv a$. Нетрудно видеть, что отношение квазицентральной сравнимости является транзитивным: $((a_{QZ}\equiv b)\,\&\,(b_{QZ}\equiv c))\Rightarrow(a_{QZ}\equiv c)$.

Лемма доказана.

Предложение 2. Центр группы $Z(G)$ содержится в пересечении централизаторов элементов группы G относительно отношения коммутативности.

Доказательство. Как известно (формула (1)):

$$Z(G)=\bigcap_{g\in G}C(g) \tag{9}$$

Пусть $g-$произвольный элемент группы G. Поскольку, $C_G(g)=\{x|g^x=g\}$, то $x_k\equiv g$ и $g^x{}_k\equiv g$. Таким образом, $C_G(g)\leq{}_{k\equiv}C_G(g)=\{x|g^x{}_k\equiv g\}$. Отсюда и из формулы (4) следует, что

$$Z(G)\leq{}_{k\equiv}C_G(g)$$

Поскольку элемент g выбран произвольно в группе G то

$$Z(G)\leq\bigcap_{g\in G}{}_{k\equiv}C_G(g) \tag{10}$$

Предложение доказано.

Проиллюстрируем на элементах группы G_{21}, введенные новые понятия. Для этого вычислим классы сопряженных элементов группы G_{21}, используя таблицу сопряжения группы G_{21} (см. Таблица 3).

Вычислим централизаторы элементов группы G_{21} относительно отношения коммутативности ${}_{k\equiv}C(a)=\{x\in G/a^x{}_k\equiv a\}$:

$${}_{k\equiv}C(e)=\{e,a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6,b,b^2,ab,a^2b,a^3b,a^4b,a^5b,a^6b,ab^2,a^2b^2,a^3b^2,a^4b^2,a^5b^2,a^6b^2\};$$

$${}_{k\equiv}C(a)=\{e,a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6,b,b^2,ab,a^2b,a^3b,a^4b,a^5b,a^6b,ab^2,a^2b^2,a^3b^2,a^4b^2,a^5b^2,a^6b^2\};$$

$${}_{k\equiv}C(a^2)=\{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ b,\ b^2,\ ab,\ a^2b,\ a^3b,\ a^4b,\ a^5b,\ a^6b,\ ab^2,\ a^2b^2,\ a^3b^2,\ a^4b^2,\ a^5b^2,\ a^6b^2\};$$

$${}_{k\equiv}C(a^3)=\{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ b,\ b^2,\ ab,\ a^2b,\ a^3b,\ a^4b,\ a^5b,\ a^6b,\ ab^2,\ a^2b^2,\ a^3b^2,\ a^4b^2,\ a^5b^2,\ a^6b^2\};$$

$${}_{k\equiv}C(a^4)=\{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ b,\ b^2,\ ab,\ a^2b,\ a^3b,\ a^4b,\ a^5b,\ a^6b,\ ab^2,\ a^2b^2,\ a^3b^2,\ a^4b^2,\ a^5b^2,\ a^6b^2\};$$

$${}_{k\equiv}C(a^5)=\{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ b,\ b^2,\ ab,\ a^2b,\ a^3b,\ a^4b,\ a^5b,\ a^6b,\ ab^2,\ a^2b^2,\ a^3b^2,\ a^4b^2,\ a^5b^2,\ a^6b^2\};$$

$${}_{k\equiv}C(a^6)=\{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ b,\ b^2,\ ab,\ a^2b,\ a^3b,\ a^4b,\ a^5b,\ a^6b,\ ab^2,\ a^2b^2,\ a^3b^2,\ a^4b^2,\ a^5b^2,\ a^6b^2\};$$

$${}_{k\equiv}C(b)=\{e,\ b,\ b^2\}; \qquad {}_{k\equiv}C(b^2)=\{e, b,\ b^2\};$$

$${}_{k\equiv}C(ab)=\{e,\ ab,\ a^5b^2\}; \qquad {}_{k\equiv}C(ab^2)=\{e,\ a^3b,\ ab^2\};$$

$${}_{k\equiv}C(a^2b)=\{e,\ a^2b, a^3b^2\}; \qquad {}_{k\equiv}C(a^2b^2)=\{e,\ a^6b,\ a^2b^2\};$$

$${}_{k\equiv}C(a^3b)=\{e,\ a^3b,\ ab^2\}; \qquad {}_{k\equiv}C(a^3b^2)=\{e, a^2b,\ a^3b^2\};$$

$${}_{k\equiv}C(a^4b)=\{e,\ a^4b, a^6b^2\}; \qquad {}_{k\equiv}C(a^4b^2)=\{e,\ a^5b,\ a^4b^2\};$$

$${}_{k\equiv}C(a^5b)=\{e,\ a^5b,\ a^4b^2\}; \qquad {}_{k\equiv}C(a^5b^2)=\{e, ab,\ a^5b^2\};$$

$${}_{k\equiv}C(a^6b)=\{e,\ a^6b,\ a^2b^2\}; \qquad {}_{k\equiv}C(a^6b^2)=\{e,\ a^4b,\ a^6b^2\}.$$

Выделим равные централизаторы группы G_{21} относительно отношения коммутативности:

$${}_{k\equiv}C(e)={}_{k\equiv}C(a)={}_{k\equiv}C(a^2)={}_{k\equiv}C(a^3)={}_{k\equiv}C(a^4)={}_{k\equiv}C(a^5)={}_{k\equiv}C(a^6)=G,$$

$${}_{k\equiv}C(b)={}_{k\equiv}C(b^2)=\{e,b,b^2\}, \quad {}_{k\equiv}C(ab)={}_{k\equiv}C(a^5b^2)=\{e,\ ab,\ a^5b^2\},$$

$${}_{k\equiv}C(a^2b)={}_{k\equiv}C(a^3b^2)=\{e,a^2b,a^3b^2\}, \qquad {}_{k\equiv}C(a^3b)={}_{k\equiv}C(ab^2)=\{e,a^3b,ab^2\},$$

$${}_{k\equiv}C(a^3b)={}_{k\equiv}C(ab^2)=\{e,a^3b,ab^2\}, \quad {}_{k\equiv}C(a^4b)={}_{k\equiv}C(a^6b^2)=\{e,a^4b,a^6b^2\},$$

$${}_{k\equiv}C(a^5b)={}_{k\equiv}C(a^4b^2)=\{e,a^5b,a^4b^2\}, \quad {}_{k\equiv}C(a^6b)={}_{k\equiv}C(a^2b^2)=\{e,a^6b,a^2b^2\}.$$

Определим количество различных централизаторов элементов относительно отношения коммутивности: в G_{21} восемь различных централизаторов элементов относительно отношения коммутативности.

Пересечение централизаторов всех элементов группы G_{21} относительно отношения коммутативности:

$$\bigcap_{g\in G_{21}} {}_{k\equiv}C_{G_{21}}(g)=\{e\}.$$

В то же время квазицентр (8) $QZ(G_{21})=\{e,a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6\}$. Это отличает центр от квазицентра группы.

Таким образом, в группе G_{21} квазицентр $QZ(G_{21})=\{e;a;a^2;a^3;a^4;a^5;a^6\}$, а $Z(G_{21})=\{e\}$. Очевидно, $QZ(G_{21})\neq Z(G_{21})$.

В связи с изложенным сформулируем следующий результат.

Теорема 1. Группа G обладает нетривиальным абелевым нормальным делителем тогда и только тогда, когда она обладает нетривиальным квазицентром.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что группа G обладает абелевым нормальным делителем $A=\{e\}$, но не обладает нетривиальным квазицентром $QZ(G)\neq\{e\}$. Если $A=Z(G)\neq\{e\}$, то все его элементы z обладают централизаторами ${}_{k\equiv}C_G(z)=G$ (лемма). Отсюда $QZ(G)\neq\{e\}$.Противоречие. Таким образом, без потери общности можно полагать, что $ZG=\{e\}$. Если элемент $a\in A\setminus e$ – единственный в A, то $A\leq Z(G)$, чего быть не может $A\neq\{e\}$. Таким образом, в A $\exists\, b\in A\setminus e,a$ и $A\neq\{e\}$. Так как подгруппа A является нормальным делителем группы G, то $(\forall a\in A)(\forall g\in G)(a^g\in A)$ и $(\forall b\in A)(b_{k}\!\equiv a^g)$. Таким образом, $R(a^x{}_{k}\!\equiv a)={}_{k\equiv}C_G(a)=G$ и $QZ(G)\neq\{e\}$.. Противоречие.

Достаточность. Пусть в группе G существует нетривиальный квазицентр, т.е. $\exists\, a\neq e$, такой, что ${}_{k\equiv}C_G(a)=\{x\in G/a^x{}_{k}\!\equiv a\}=G$. Если $(\forall x\in G)(a^x{}_{k}\!\equiv a)$, то класс $\overset{c\equiv}{a}$ сопряженных элементов порождает абелев нормальный делитель $A\neq\{e\}$. По условию мощность элементов $\{x\}=|G|$. Если же элемент a единственный такой в G, то $a\in Z(G)\setminus e$ и в этом случае группа G обладает нетривиальным абелевым нормальным делителем.

Теорема доказана.

В группе G_{21} $QZ(G_{21})=\{e,a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6\}$ это и есть абелев нормальный делитель и $(\forall a\in QZ(G_{21}))({}_{k\equiv}C_{G_{21}}(a)=G_{21})$. Отметим, что в конечной группе $S_3=\{e,a,a^2,b,ab,a^2b\}$ с генетическим кодом: $b^2=a^3=e$, $ba=a^2b$, $QZ(S_3)=\{e,a,a^2\}$.

Отношение квазицентральной сравнимости разбивает элементы группы G на классы $\overset{qz\equiv}{a}$ эквивалентности. Например, группа G_{21} распадается на классы: $\overset{qz\equiv}{e}=\{e,a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6\}$, $\overset{qz\equiv}{b}=\{b,b^2\}$, $\overset{qz\equiv}{ab}=\{ab,a^5b^2\}$, $\overset{qz\equiv}{a^2b}=\{a^2b,a^3b^2\}$, $\overset{qz\equiv}{a^3b}=\{a^3b,ab^2\}$, $\overset{qz\equiv}{a^4b}=\{a^4b,a^6b^2\}$, $\overset{qz\equiv}{a^5b}=\{a^5b,a^4b^2\}$, $\overset{qz\equiv}{a^6b}=\{a^6b,a^2b^2\}$. Характерно, что классы эквивалентности имеют различную мощность.

Число классов квазицентральной эквивалентности в группе G_{21} равно 8 по числу неравных централизаторов элементов относительно отношения коммутативности.

Теорема 2. Класс $\overset{Qz\equiv}{a}$ квазицентральной эквивалентности, содержащий нейтральный элемент $e\in\overset{Qz\equiv}{a}$ является нормальной подгруппой группы G и совпадает с квазицентром $QZ(G)$ группы G.

Доказательство. Пусть элемент $a\in\overset{Qz\equiv}{e}$, тогда ${}_{k\equiv}C_G(a)=\{x\in G/a^x{}_k\equiv a\}=G$. Так как ${}_{k\equiv}C_G(a)=\{x\in G/a^x{}_k\equiv a\}$, то $a^xa=a\ ^x$ и $\left((a^xa)^{-1}=(a\ ^x)^{-1}\right)\rightarrow(a^{-1}(a^{-1})^x=(a^{-1})^xa^{-1})$. Отсюда следует, что $(a^{-1})^x{}_k\equiv a^{-1}$ и ${}_{k\equiv}C_G(a^{-1})=\{x\in G/(a^{-1})^x{}_k\equiv a^{-1}\}={}_{k\equiv}C_G(a)==\{x\in G/a^x{}_k\equiv a\}$. Таким образом, $\left(\forall a\in\overset{Qz\equiv}{e}\right)\left(a^{-1}\in\overset{Qz\equiv}{e}\right)$. Далее, пусть $a,b\in\overset{Qz\equiv}{e}$. Тогда ${}_{k\equiv}C_G(a)\bigcap{}_{k\equiv}C_G(b)\leq{}_{k\equiv}C_G(ab)\leq G$. Так как $G\subseteq{}_{k\equiv}C_G(a)\bigcap{}_{k\equiv}C_G(b)$, то ${}_{k\equiv}C_G(ab)=G$ и $\left(\forall a,b\in\overset{Qz\equiv}{e}\right)\left(a\cdot b\in\overset{Qz\equiv}{e}\right)$. Таким образом, установлено, что класс $\overset{Qz\equiv}{e}$ – подгруппа группы G. Далее, пусть $({}_{k\equiv}C(a))^g=\{x^g/a^{gx}{}_k\equiv a^g\}$. Докажем, что $({}_{k\equiv}C_G(a))^g\in QZ(G)$. Действительно, ясно, что ${}_{k\equiv}C_G(a)=\{x^g/a^x{}_k\equiv a\}=G$. Из этого соотношения следует, что $({}_{k\equiv}C_G(a))^g=\{x/a^x{}_k\equiv a\}^g=\{x^g/(a^x)^g{}_k\equiv a^g\}$. Так как ${}_{k\equiv}C_G(a)=G$, то $({}_{k\equiv}C_G(a))^g=G^g=G$ и ${}_{k\equiv}C_G(a)=({}_{k\equiv}C_G(a))^g$ и ${}_{k\equiv}C_G(a)\lhd G$. Так как ${}_{k\equiv}C_G(a)=G$, то $\left(\forall a\in\overset{Qz\equiv}{e}\right)(C_G(a)=G)$ и $\overset{Qz\equiv}{e}=QZ(G)$.

Теорема доказана.

Предложение 2. Пусть *Q(G)* – множество элементов группы *G* такое, что $\forall a\in Q(G)\ \ C_G(a)=G$. Тогда множество *Q(G)* – подгруппа группы *G* и *Q(G)* – нормальный делитель группы *G*, совпадающий с центром *Z(G)* группы *G*.

Доказательство. Пусть элемент $b\in Q(G)$ и $C_G(b)=G$. Тогда из сравнения $C_G(a)\bigcap C_G(b)\leq C_G(ab)$ следует, что $G\leq C_G(ab)\leq G$ и $C(ab)=G$. Так как $C_G(a)=C_G(a^{-1})$, то $C_G(aa^{-1})=G$ и $e\in Q(G)$, $a^{-1}\in Q(G)$. Отсюда следует, что *Q(G)* – подгруппа группы *G*.

Пусть элемент $b\in\overset{c\equiv}{a}$ и $a_c\equiv b$, т.е. $(\exists x\in G/a^x=b)$. Тогда, поскольку $a\in Q(G)$, то $C_G(a)=G$, а $C_G(a^x)=(C_G(a))^x=(G)^x=G$. Отсюда $(\forall a\in Q(G))$ $(\forall g\in G)(a^g\in Q(G))$ и подгруппа *Q(G)* является нормальным делителем группы *G*.

Пусть произвольный элемент $z\in Q(G)$. Тогда $C_G(z)=G$. Ясно, что $(\forall g\in G)(z\in C_G(g))$ и $Q(G)\leq\bigcap\limits_{g\in G}C_G(g)=Z(G)$. Отсюда $Q(G)\leq Z(G)$. С другой стороны, так как каждый элемент центра *Z(G)* коммутирует с любым элементом $g \in G$, то для любого $z_1 \in Q(G)$ $C_G(z_1) = G$. Отсюда следует, что $Z(G) \leq Q(G)$. Таким образом, $Z(G) = Q(G)$.

Предложение доказано.

ВЫВОДЫ

В работе введены новые понятия: централизатор группы, квазицентр группы, квазицентральная сравнимость группы; и получены следующие результаты:

Лемма 1. Отношение квазицентральной сравнимости является отношением эквивалентности;

Предложение 2. Центр группы *Z(G)* содержится в пересечении централизаторов элементов группы *G* относительно отношения коммутативности;

Теорема 1. Группа *G* обладает нетривиальным абелевым нормальным делителем тогда и только тогда, когда она обладает нетривиальным квазицентром;

Теорема 2. Класс $\overset{Qz\equiv}{a}$ квазицентральной эквивалентности, содержащий нейтральный элемент $e \in \overset{Qz\equiv}{a}$ является нормальной подгруппой группы *G* и совпадает с квазицентром *QZ (G)* группы *G*;

Предложение 2. Пусть *Q(G)* – множество элементов группы *G* такое, что $\forall a \in Q(G)$ $C_G(a) = G$. Тогда множество *Q(G)* – подгруппа группы *G* и *Q(G)* – нормальный делитель группы *G* совпадающий с центром *Z(G)* группы *G*.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 **Курош, А. Г.** Теория групп. – М. : Наука, 1967. – 648 с.

2 **Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. М.** Основы теории групп – М. : Наука, 1982. – 288 с.

3 **Тусупова А. Ж, Павлюк И. И.** Централизатор элемента группы относительно отношения коммутативности // Вестник ПГУ. – № 1. – Павлодар, 2015. − С. 97-102.

4 **Павлюк И. И., Будкова В. О.** Граф отношения коммутативности на элементах группы тетраэдра // Материалы международной научной конференции молодых ученых, магистрантов и студентов «XIII Сатпаевские чтения». – Т. XVI. – Павлодар : ПГУ, 2013. – С. 34-36.

Материал поступил в редакцию 15.12.16.

И. И. Павлюк[1], Ин. И. Павлюк[2], Ә. Ж. Түсіп[3]

Коммутативтік қатынасқа қатысты топтың элемент централизаторы

[1,3]С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ., Казақстан;
[2]Новосібір мемлекеттік педагогикалық университеті,
Новосібір қ., Ресей.
Материал 15.12.16 баспаға түсті.

I. Pavlyuk[1], In. Pavlyuk[2], A. Tussupova[3]

A quasicenter of group and a relation of commutativity of group elements

[1,3]S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar, Kazakhstan;
[2]Novosibirsk State Pedagogical University, Novosibirsk, Russia.
Material received on 15.12.16.

Жұмыста коммутативтік қатынасқа қатысты топтың элемент централизаторының қасиеттері зерттелген.

In this work the properties of the centralizer of a group element with respect to commutativity relation are studied.

УДК 512.54

И. И. Павлюк[1], Ин. И. Павлюк[2], Д. М. Жангазинова[3]
[1]к.ф.-м.н, [2]доцент, [3]студент
[1,3]Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар, Казахстан;
[2]Новосибирский государственный педагогический университет, г. Новосибирск, Россия
e-mail: [1]ivan.pavlyuk@mail.ru, [2]inessa7772@mail.ru, [3]dinara_pav@mail.ru

О РЕШЕНИИ СРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ОТНОШЕНИЯ КОММУТАТИВНОСТИ В ГРУППАХ

В работе получена формула R(ab=ba)=C(a) решения бинарного сравнения ab=ba в группе и выведено следствие о числе классов сопряженных элементов конечной группы $r = \sum_{g \in G} \frac{|C(g)|}{|G|}$.

Ключевые слова: отношение коммутативности, мощность множества, классы сопряженных элементов.

ВВЕДЕНИЕ

Отношение коммутативности – это наиболее понятное бинарное отношение в школьной математике и в программе высшей школы это понятие занимает достойное место. В каждой алгебраической системе отношение коммутативности связывает по крайней мере столько элементов сколько их содержится в этой системе. Если учесть, что всего пар в алгебраической системе порядка n, n^2, то коммутирующих пар элементов не превосходит n^2 В частности в группе преобразований правильного треугольника S_3 (не меняя ориентации плоскости) всего 18 пар коммутирующих элементов. Поскольку число $|S_3|=6$, а шесть это совершенное число и 18 половина $36=n^2$, то возникает вопрос: верно ли это утверждение для других групп с порядком совершенного числа (например 28)? Возможно это частный факт, хотя закономерность всегда доминирует над случайностью в математических выводах. В работе мы даем конкретную формулу для вычисления числа коммутирующих элементов группы конечного порядка. Это множество напрямую связано с числом централизаторов элементов группы. Понятно, что такое число связано с множеством элементов группы непосредственно (т.е. взаимно однозначно). Но среди них есть и равные централизаторы элементов (например в S_3 $C(a)=C(a^2)$). Поэтому этот результат имеет фундаментальное значение для числа классов сопряженных элементов конечной группы. Что в дальнейшем и подтверждается в виде следствия. Формула числа классов сопряженных элементов и ранее была получена в теории конечных групп, используя терминологию действия группы на множестве и понятие стабилизатора элемента [2]. Мы обошлись в получении этой замечательной формулы теории конечных групп только понятием коммутативности элементов группы. Развитие этого направления лежит в области теории сравнений в группах относительно отношения коммутативности.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Количество коммутирующих пар элементов группы S_3 равно 18. Вопрос 1: Почему именно 18, а не другое число? Всего пар элементов группы S_3 равно $36=6^2$(декартов квадрат). Изложим теорию, дающую ответ на вопрос 1.

Лемма 1. Множество пар $\{\langle x,y\rangle\}$ элементов конечной группы *G* порядка *n* удовлетворяющих бинарному сравнению $x \,{}_k\!\equiv y$, есть величина $|R(x \,{}_k\!\equiv y)| = r$, независящая от мощности класса $\left|\overset{c\equiv}{a}\right|$ сопряженных элементов группы *G*.

Доказательство. Зафиксируем элемент $a \in \overset{c\equiv}{a}$. Рассмотрим сравнение $a \,{}_k\!\equiv g$. Здесь $g \in G$ есть произвольный элемент группы *G*. Он принимает все значения элементов группы *G,* удовлетворяющие сравнению $a \,{}_k\!\equiv g$.

Поскольку решения $R_G(a \,{}_k\!\equiv g)$, то *ag=ga* и $a^g=a$. Отсюда следует, что $g \in C_G(a)$ и $R_G(a \,{}_k\!\equiv g) = C_G(a)$. Очевидно, множество *C(a)*, есть множество пар $\langle a,g\rangle$ элементов группы *G* таких, что элементы *a* и *g* коммутируют между собой, т.е. *ag=ga*. Обозначим $i_a = |G : C(a)|$ индекс централизатора $C_G(a)$ элемента *a* в группе *G*. Тогда применяя теорему Лагранжа [1] получим $|G| = |C_G(a)| \cdot i_a$. Отсюда $|C_G(a)| = \dfrac{n}{i_a}$. Так как $\left|\overset{c\equiv}{a}\right| = |G : C_G(a)| = i_a$, то $|R_G(a \,{}_k\!\equiv g)| = |C_G(a)| = \dfrac{n}{i_a}$. При фиксированном элементе $a \in G$. Далее, вместо элемента a в сравнение $a \,{}_k\!\equiv g$ будем последовательно вставлять различные элементы из класса $\left|\overset{c\equiv}{a}\right|$ пока не исчерпаем весь класс $\left|\overset{c\equiv}{a}\right|$. Так как мощность класса $\left|\overset{c\equiv}{a}\right| = i_a$, то $\left(\forall a \in \overset{c\equiv}{a}\right)(\forall g \in G)\left(|R_G(a^g \,{}_k\!\equiv g| = \dfrac{n}{i_a} \cdot i_a\right)$. Таким образом, $|R(a^g \,{}_k\!\equiv g)| = n$.

Лемма доказана.

Лемма 2. Мощность множества пар $\left|R_G(x \ {}_k\!\equiv y)\right| = r$ решений бинарного сравнения $x \ {}_k\!\equiv y$ на элементах конечной группы *G* порядка $n = |G|$ равна порядку группы *n* умноженному на число классов *k* сопряженных элементов группы *G,* т.е. $r = n \cdot k$

Доказательство, очевидно, вытекает из леммы 1, поскольку число $n = |G|$ остается постоянным для любого представителя класса сопряженных элементов группы *G* а таких классов в группе *G* всего *k* штук.

Лемма доказана.

Теорема 1. Мощность множества $\left|R_G(x \ {}_k\!\equiv y)\right|$ в группе *G* равна мощности суммы централизаторов элементов группы *G,* т.е.

$$\left|R_G(x \ {}_k\!\equiv y)\right| = \sum_{g\in G}\left|C(g)\right|.$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что множество пар $\langle x; y\rangle$ группы *G*, элементы которых коммутируют между собой, складывается из элементов $a \ {}_k\!\equiv g$, когда элемент принимает поочередно значения элементов группы *G,* а элемент *g* всякий раз удовлетворяет сравнению $(a \ {}_k\!\equiv g)$. Таким образом, $\left|R_G(x \ {}_k\!\equiv y)\right| = \sum_{g\in G}\left|C_G(g)\right|$.

Теорема доказана.

Следствие. Число классов *k* сопряженных элементов группы *G* равно сумме обратных величин индексов централизаторов элементов группы *G,* в группе *G*. Т.е. $k = \sum_{g\in G}\frac{1}{\left|G : C(a)\right|} = \sum_{g\in G}\frac{\left|C(g)\right|}{|G|}$.

Доказательство. С учетом формулы *r=nk* (лемма 2). Для конечной группы *G* порядка *n* будем иметь $nk = \sum_{g\in G}\left|C(g)\right| = \sum_{g\in G}\frac{n}{\left|G : C(g)\right|}$.

Окончательно будем иметь формулу для вычисления числа классов сопряженных элементов конечной группы *G* –

$$k = \sum_{g\in G}\frac{1}{\left|G : C(g)\right|} = \sum_{g\in G}\frac{\left|C_G(g)\right|}{|G|}.$$

Следствие доказано.

Таким образом, в симметрической группе S_3 число классов сопряженных элементов $k = \frac{6}{6}+\frac{3}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{2}{6}+\frac{2}{6} = 3$. Это $\overset{c\equiv}{e}, \overset{c\equiv}{a}, \overset{c\equiv}{b}$, где $\overset{c\equiv}{e} = \{e\}$, $\overset{c\equiv}{a} = \{a, a^2\}$, $\overset{c\equiv}{b} = \{b, ab, a^2b\}$, а число решений сравнения $x \ {}_k\!\equiv y$ в группе S_3 есть

$\sum_g |C_G(g)| = |C_G(e)| + |C_G(a)| + |C_G(a^2)| + \quad |C_G(b)| + |C(ab)| + |C(a^2b)| \quad =$ 6+3+3+2+2+2=18. (Все пары элементов представлены в таблице 1).

Таким образом, получен ответ на поставленный вопрос 1.

Таблица 1 – Таблица коммутативности элементов группы S_3.

$k=$	e	a	a^2	b	ab	a^2b
e	$\langle e,e\rangle$	$\langle e,a\rangle$	$\langle e,a^2\rangle$	$\langle e,b\rangle$	$\langle e,ab\rangle$	$\langle e,a^2b\rangle$
a	$\langle a,e\rangle$	$\langle a,a\rangle$	$\langle a,a^2\rangle$			
a^2	$\langle a^2,e\rangle$	$\langle a^2,a\rangle$	$\langle a^2,a^2\rangle$			
b	$\langle b,e\rangle$			$\langle b,b\rangle$		
ab	$\langle ab,e\rangle$				$\langle ab,ab\rangle$	
a^2b	$\langle a^2b,e\rangle$					$\langle a^2b,a^2b\rangle$

Таблица 2 – Таблица коммутативности группы кватернионов

$k=$	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
e	$\langle e,e\rangle$	$\langle e,a\rangle$	$\langle e,a^2\rangle$	$\langle e,a^3\rangle$	$\langle e,b\rangle$	$\langle e,ab\rangle$	$\langle e,a^2b\rangle$	$\langle e,a^3b\rangle$
a	$\langle a,e\rangle$	$\langle a,a\rangle$	$\langle a,a^2\rangle$	$\langle a,a^3\rangle$				
a^2	$\langle a^2,e\rangle$	$\langle a^2,a\rangle$	$\langle a^2,a^2\rangle$	$\langle a^2,a^3\rangle$	$\langle a^2,b\rangle$	$\langle a^2,ab\rangle$	$\langle a^2,a^2b\rangle$	$\langle a^2,a^3b\rangle$
a^3	$\langle a^3,e\rangle$	$\langle a^3,a\rangle$	$\langle a^3,a^2\rangle$	$\langle a^3,a^3\rangle$				
b	$\langle b,e\rangle$		$\langle b,a^2\rangle$		$\langle b,b\rangle$		$\langle b,a^2b\rangle$	
ab	$\langle ab,e\rangle$		$\langle ab,a^2\rangle$			$\langle ab,ab\rangle$		$\langle ab,a^3b\rangle$
a^2b	$\langle a^2b,e\rangle$		$\langle a^2b,a^2\rangle$		$\langle a^2b,b\rangle$		$\langle a^2b,a^2b\rangle$	
a^3b	$\langle a^3b,e\rangle$		$\langle a^3b,a^2\rangle$			$\langle a^3b,ab\rangle$		$\langle a^3b,a^3b\rangle$

ВЫВОДЫ

В работе получены следующие результаты:

Лемма 1. Множество пар $\{\langle x, y\rangle\}$ элементов конечной группы G порядка n, удовлетворяющих бинарному сравнению $x \;{}_{k}\!\equiv y$, есть величина $\left|R(x \;{}_{k}\!\equiv y)\right| = r$, независящая от мощности класса $\left|\overset{c\equiv}{a}\right|$ сопряженных элементов группы G.

Лемма 2. Мощность множества пар $\left|R_G(x \;{}_{k}\!\equiv y)\right| = r$ решений бинарного сравнения $x \;{}_{k}\!\equiv y$ на элементах конечной группы G порядка $n=|G|$ равна порядку группы n умноженному на число классов k сопряженных элементов группы G, т.е. $r = n \cdot k$

Теорема 1. Мощность множества $\left|R_G(x \;{}_{k}\!\equiv y)\right|$ в группе G равна мощности суммы централизаторов элементов группы G, т.е.

$$\left|R_G(x \;{}_{k}\!\equiv y)\right| = \sum_{g \in G} \left|C(g)\right|.$$

Следствие. Число классов k сопряженных элементов группы G равно сумме обратных величин индексов централизаторов элементов группы G, G, в группе G. Т.е. $k = \sum\limits_{g \in G} \dfrac{1}{\left|G : C(a)\right|} = \sum\limits_{g \in G} \dfrac{\left|C(g)\right|}{\left|G\right|}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 **Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И.** Основы теории групп – М. : Наука. – 1978. – 288 с.

2 **Кострикин, А. И.** Введение в алгебру: учебник. – М. : Физматлит, 2001. – 271 с.

3 **Курош, А. Г.** Теория групп. // М. : Наука, 1976. – 648 с.

Материал поступил в редакцию 15.12.16.

И. И. Павлюк[1], Ин. И. Павлюк[2], Д. М. Жангазинова[3]

Топтардағы коммутативтік қатынасқа қатысты салыстырулардың шешімі туралы

[1,3]С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ. Казақстан;
[2]Новосібір мемлекеттік педагогикалық университеті,
Новосібір қ, Ресей.

Материал 15.12.16 баспаға түсті.

I. Pavlyuk[1], In. Pavlyuk[2], D. Zhangazinova[3]

About solution of comparisons with respect to commutativity relation in groups

[1,3]S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar, Kazakhstan;
[2]Novosibirsk State Pedagogical University, Novosibirsk, Russia.
Material received on 15.12.16.

Бұл мақалада топтағы ab=ba бинарлық салыстырудың шешімінің R(ab=ba)=C(a) формуласы алынды және ақырлы топтың түйіндес элементтері кластарынан $r = \sum_{g \in G} \frac{|C(g)|}{|G|}$ *шығарылды.*

In this work a formula R(ab=ba)=C(a) for the solution of binary comparisons ab=ba in the group is studied and a consequence of the number of classes in the dual subgroups of elements of a finite group $r = \sum_{g \in G} \frac{|C(g)|}{|G|}$ *is displayed.*

Секция «ФИЗИКА»

УДК 51-74

А. Б. Жаныс
PhD, профессор, Кокшетауский университет имени А. Мырзахметова, г. Кокшетау

ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В УПРУГОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Для приближенного решения задач математического анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, граничных задач математической физики применяются разностные и интерполяционные методы.

Ключевые слова: эффективность, распределение температуры, сходимость алгоритмов, эффективная оценка погрешности, граничная область, тепловая изоляция, многомерная нестационарная задача, аппроксимация, искомая функция, аналитический метод, метод конечных разностей, метод конечных элементов, модель, физический процесс, обыкновенные дифференциальные уравнения, двумерная область, системы линейных уравнений.

ВВЕДЕНИЕ

Для суждения об эффективности и обоснованности применения этих методов необходимо их теоретическое исследование, т.е. обязательное решение следующих вопросов:

а) установление сходимости алгоритма;

б) исследование скорости сходимости;

в) эффективная оценка погрешности.

Решение этих вопросов приводилось для каждого класса уравнений и каждого из методов своим путем и часто представляло значительную трудность, в ряде случаев не преодоленную до настоящего времени.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Пусть распределение температуры $T(M) = u(M)$, зависящие от положения точки $M(x,y) \in \Omega$ и не зависящую от времени t. Рассмотрим задачу

$$Lu \equiv -\Delta u + u|u| = f(x,y)$$
$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \tag{1}$$
$$u\big|_{y=0} = u\big|_{y=1} = 0,\ u\big|_{y=0} = u\big|_{y=1} = 0,$$

где Ω – открытая ограниченная область,

$$\Omega = (0,1)\times(0,1),\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad f(x,y,) \in L_2(\ x,y \in (0,1)\times(0,1)\ .$$

Граничные условия в (1) по физическому смыслу означает идеальную тепловую изоляцию поверхности тела. Граница области Ω является гладкой

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=1} = 0\ , \tag{2}$$
$$u\big|_{y=0} = u\big|_{y=1} = 0,$$

где Ω – открытая ограниченная область,

$$\Omega = (0,1)\times(0,1),\ t \in T = [0,1]\ ,$$
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$
$$f(x,y,t) \in L_2(\ x,y) \in \Omega, t \in T).$$

Если время протекания физического процесса, описываемого многомерной нестационарной задачей, разбить на последовательность интервалов Δt_k, $k \in N$, и провести аппроксимацию производных искомых функций по времени t, то в соответствии с методом прямых можно перейти к многомерной стационарной краевой задаче относительно распределений этих функций в момент t_k в конце k-го интервала Δt_k. Эту задачу можно решить приближенными аналитическими методами, а для численного решения применимы методы конечных разностей (МКР), метод конечных элементов (МКЭ) и метод граничных элементов (МГЭ).

Можно также в области решение многомерной нестационарной задачи ввести пространственную сетку и на этой сетке аппроксимировать производные искомых функций по пространственным координатам. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно изменяющихся во времени узловых значений этих функций. Такая система в сочетании с заданными начальными условиями составит математическую формулировку задачи Коши, для численного решения которой можно использовать один из вариантов метода Рунге-Кутта.

Третий подход к решению многомерных задач объединяет первые два и связан с переходом дискретной математической модели рассматриваемого физического процесса как во времени, так и в пространстве. Эта модель на каждом k – м интервале приведет к системе конечных уравнений относительно узловых значений искомых функций в момент времени t_k в конце этого интервала. Этот подход к решению многомерных задач можно привести здесь же на достаточно простом примере

$$\frac{\partial u(T,M)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(t,M)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u(t,M)}{\partial x_2^2}, \qquad t>0, \qquad M\in\Omega, \tag{3}$$

где $u(t,M)$ – зависит от времени t и декартовых координат x_1, x_2, а точки $M\in\Omega$ двумерной области Ω решения задачи. Граничные и начальные условия примем в виде

$$u(t,P)=f(t,P), \qquad \mathrm{P}\in\Gamma;\ u(0,M)=u_0(M), \qquad \mathrm{M}\in\Omega, \tag{4}$$

где Γ – граница области Ω.

Введем в Ω двумерную сетку Ω_h с шагами h_i, i=1,2, постоянными вдоль каждой из координатных осей. При этом в узлы, не принадлежащие Γ, но расположены наиболее близко к границе и составляющие множество Γ_h, перенесем из ближайшей к каждому узлу точки $P\in\Gamma$ заданные граничные значения (3) температуры. Отметим, что возникающая при этом погрешность является основной причиной, ограничивающей применение МКР к решению задач в многомерных областях произвольной конфигурации.

Аппроксимируя производной по времени на k – м интервале, для каждого внутреннего узла сетки Ω_h получаем

$$\frac{u^k-u^{k-1}}{\Delta t_k}=\sum_{i,=1,2}\Lambda_{ii}(\eta_i u^k+(1-\eta_i)u^{k-1}), \qquad \eta_i\in[0,1] \tag{5}$$

где

$$\Lambda_{\boldsymbol{i}} u_n=\frac{u_{n-1}-2u_n+u_{n=1}}{h_i^2}, \qquad i=1,2,$$

n – номер внутреннего узла двумерной сетки Ω_h, отсчитываемый вдоль координатной оси Ox_i.

Она является аналогом двухслойной схемы с весами, имеет при $\eta_1=\eta_2=\frac{1}{2}$ погрешность $O((\Delta t_k)^2,h_1^2+h_2^2)$ и приводит к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно значений u^k во внутренних узлах сетки Ω_h. Для решения этой СЛАУ необходимо использовать известные значения u^k в узлах, принадлежащих множеству Ω_h, и значения u^{k-1} во всех узлах сетки Ω_h, вычисленных на предшествующем интервале времени. При $k=1$ значения u^{k-1} определены начальными условиями (3).

Решение этой СЛАУ можно получить при помощи матричной прогонки, обеспечивающего заметное снижение общего числа арифметических операций, если область Ω является прямоугольной.

В случае произвольной области Ω одним из экономичных по числу арифметических операций методов решения рассматриваемой СЛАУ является продольно-поперечная прогонка.

Изложенные здесь способы решения многомерных задач теплопроводности можно применять в более широком классе нестационарных краевых задач математической физики, описываемых дифференциальными уравнениями параболического типа или системами таких уравнений. Эти же способы применимы и для решения стационарных (статических) задач, описываемых дифференциальными уравнениями эллиптического типа. Искомое решение таких задач можно рассматривать как предельное, установившееся состояние в условной дискретной системе, в которой происходит нестационарный физический процесс при заданных в стационарной задаче постоянных по времени граничных условиях. Если стационарная задача имеет единственное решение, то при произвольно выбранном начальном условии решение нестационарной задачи для условной дискретной системы в пределе приводит к искомому установившиеся состоянию. Такой прием получения решения стационарной задачи называют методом установления.

В случае не единственности решения рассматриваемой стационарной задачи установившееся состояние будет связано с задаваемым начальным условием. Тогда начальное условие приобретает смысл нулевого приближения, от близости объема вычислений при использовании метода установления. Помимо этого метода для решения многомерных линейных стационарных задач математической физики при помощи МКР можно указать еще ряд способов, которые приводят к СЛАУ, вытекающей из дискретной математической модели рассматриваемого физического процесса. К ним относятся вычислительные методы линейной алгебры, связанные с последовательным исключением неизвестных или мультипликативным разложением матрицы СЛАУ, а также большая группа итерационных методов решения СЛАУ. В случае нелинейных задач дискретная модель приводит к системе конечных уравнений, решаемой также итерационными методами.

ВЫВОДЫ

Некоторые итерационные методы в определенном смысле можно трактовать и как варианты метода установления, поскольку получаемые в процессе последовательных приближений к искомому решению стационарной задачи промежуточные состояния соответствуют условному нестационарному процессу в дискретной системе. Если решаемая задача имеет вариационную формулировку, включающую функционал с известными экстремальными свойствами, то используемый итерационный метод можно соотнести с методом локальных вариации и контролировать сходимость процесса последовательных приближений по изменению значения функционала от итерации к итерации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 **Астраханцев, Г. П.** Итерационные методы решения вариационно-разностных схем для двумерных эллиптических уравнений второго порядка // Автореферат на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Л., 1972. – 16 с. – (ЛОМИ АН СССР).

2 **Ахиезер, И. И., Глазман, И. М.** Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. – М. : «Наука», 1966.

3 **Мухамбетжанов, А. Т.** Об одном приближенном методе решения задачи Стефана // Воронежская весенняя математ. школа «Понтрягинские чтения XIII». – «Современные методы теории краевых задач», 2002.

4 **Мухамбетжанов, А. Т., Аруова А. Б.** Численный расчет поперечного прогиба балки // Межд. научно-теоретическ. конференция «Роль физико-мат. наук в современном образовательном пространстве», г. Атырау, 2005.

5 **Мухамбетжанов, А. Т., Жумагулов, Б. Т., Аруова, А. Б.** Итерационные формулы приближенного решения линейных краевых задач в сложных областях // Межд. научно-теоретической конференции «Роль физико-мат. наук в современном образовательном пространстве». – Атырау, 2005.

6 **Жаныс, А. Б., Рахимов, М. М.** Метод конечных разностей. Республиканская научно-практическая конференция для молодых ученых, студентов, магистрантов и школьников на тему: «Информационно-коммуникационные технологии (ИКТ) и их роль в современном образовании человека». – 2015, 27 марта.

7 **Жаныс, А. Б.** О приближенном решении нелинейных краевых задач. // Научный журнал «Современные наукоемкие технологии». – № 4. – М. : Издательский Дом «Академия Естествознания», 2015.

Материал поступил в редакцию 15.12.16.

А. Б. Жаныс

Тығыс қатты денеде вариациялық әдіспен стационар жылуөткізгіштің сызықты емес теңдеу үшін сандық есептеулер

А. Мырзахметов атындағы Көкшетау университеті, Көкшетау қ.

Материал 15.12.16 баспаға түсті.

A. B. Zhanys

Numerical calculations for the nonlinear equation of stationary heat conductivity in the elastic solid body by the variation method

A. Myrzakhmetov Kokshetau University, Kokshetau.

Material received on 15.12.16.

Математикалық анализ, дифференциалдық жəне интегралдық теңдеулер, математикалық физиканың шекаралық есептеулерде интерполяциялық əдістері қолданатын жуықтау шешулеріне арналган.

For an approximate solution of mathematical analysis problems, differential and integral equations, boundary problems of mathematical physics difference and interpolation methods are applied.

УДК 532.456

У. М. Туганбаев

д.ф.-м.н., профессор, Кыргызский национальный аграрный университет имени К. И. Скрябина, г. Бишкек, Кыргызская Республика

e-mail: ulanbek_tuganbay@rambler.ru

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ИССЛЕДОВАНИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ

В работе исследуется нестационарное уравнение конвективной диффузии. На основании метода малых возмущений, это уравнение записано как линейное и его решение найдено в автомодельном виде и определены два класса решений.

Ключевые слова: уравнение конвективной диффузии.

ВВЕДЕНИЕ

Основываясь на принципах геохимической гидродинамики и результатах её применения в области орошения, осушения земель в работе исследуется и изложена методика расчета солевого режима почвогрунтов. В соответствии с этим, аналитически исследуется уравнение конвективной диффузии и массообмена при фильтрации воды в почвогрунтах, предлагаются методы расчета этих процессов.

В районах орошения важной проблемой является предупреждение засоления плодородных земель, вышедших из сельхозоборота вследствии подъема минерализованных грунтовых вод и другого рода засоления. Остается актуальным также рассоление земель, засоленных в естественных условиях, которые после опреснения становятся пригодными для земледелия. Рассоление таких земель осуществляется посредством промывок пресной водой или слабо минерализованной водой до порогов токсичности и понижения уровня соленых вод с помощью дренажа. Опыт освоения и орошения земель показывает, что к засоленным почвам необходимо относить почвы не только в районе корней растений, но и земли с легко растворимыми солями в количестве, которые могут сконцентрироваться в верхних слоях почвы до пределов, превышающих порог токсичности. Поэтому важнейшее значение приобретают мероприятия, предупреждающие засоление почв, прогнозировать и правильно вести расчеты последствий орошения земель. Применение мелиоративных мероприятий существенно воздействует на естественный гидрохимический режим верхней части почвы, которые могут вызвать серьезные последствия экологического характера. Поэтому исключительно важна разработка хороших методов прогноза гидрохимических процессов в почвах, грунтах зоны аэрации и в грунтовых водах. Прогноз должен объяснить, почему одно и тоже мероприятие, в одних условиях дает высокий эффект, а в других оказывается слабо эффективным, а иногда и вредным. Правильный прогноз основывается на методах геохимической гидродинамики, которая объединяет в себе принципы теории фильтрации, диффузии, химической кинетики и современной математики.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Движение солей в почвогрунтах происходит вследствии миграции их с растворителями. Этот процесс солепереноса в почвогрунтах, при отсутствии химической реакции и сорбции описывается следующим уравнением [1]

$$m_0\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D(C)\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D(C)\cdot\frac{\partial C}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D(C)\frac{\partial C}{\partial z}\right)-\operatorname{div}(vC), \qquad (1)$$

здесь функция $C(x,y,z,t)$– концентрация соли в жидкости, v-скорость фильтрации, m_0 – активная пористость грунта, характеризует активный объем порового пространства, *D(C)* – коэффициент диффузии, которая в общем случае является функцией от концентрации соли в жидкости.

Ранее предлагали, что почва считается однородной, изотропной, поэтому в первом приближении коэффициент диффузии и компоненты скорости фильтрации считали постоянными. В этом случае, уравнение (1) имело вид

$$m_0 \frac{\partial C}{\partial t} = D_0\left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right] - U_0 \frac{\partial C}{\partial x} - V_0 \frac{\partial C}{\partial y} - W_0 \frac{\partial C}{\partial z}, \qquad (2)$$

а ставились следующие начально – краевые условия:

а) в начальный момент $t = t_0, \quad C(x, y, x, t_0) = P_0(x, y, z)$ (3)

б) на границе Г $C(x, y, z, t_0) = Q_0(x_0, y_0, z_0, t).$ (4)

Далее, ввели новую функцию [2]

$$C(x, y, x, t_0) = \exp\xi_0 \cdot Q(x, y, z, t), \quad \xi_0 = a_0 x + b_0 y + c_0 z + d_0 t, \qquad (5)$$

и получили линейное уравнение вида

$$Q_\tau = Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz}, \qquad (6)$$

которое является уравнением дальнейших исследований, при этом

$$a_0 = \frac{U_0}{2D_0}, \quad b_0 = \frac{V_0}{2D_0}, \quad C_0 = \frac{W_0}{2D_{.0}}, \quad d_0 = -\frac{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}{4m_0 D_0}, \quad \tau = \frac{D_0}{m_0} t.$$

Решение уравнения (6), инвариантно относительно однопараметрической группы преобразования подобия

$$x \Rightarrow \gamma x, \quad y' \Rightarrow \gamma y, \quad z' \Rightarrow \gamma z, \quad \tau' \Rightarrow \gamma \tau, \quad Q^1 \Rightarrow \gamma Q,$$

которое должно иметь вид

$$Q(x, y, z, \tau_0) = \tau^n \cdot P(\eta_1), \quad \eta_1 = (x^2 + y^2 + z^2)/\tau. \qquad (7)$$

Находя все необходимые частные производные и подставляя в рассматриваемое уравнение (6), получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$P''(\eta_1) + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\eta_1\right]P'(\eta_1) - \frac{n}{4}P(\eta_1) = 0. \qquad (8)$$

Если сравнить его с уравнением вида [2]

$$xy'' + (ax + b)y' + (cx + d)y = 0. \qquad (9)$$

то можно записать одно из решений в форме

$$y = x^{-b/2} \cdot e^{-ax/2} \cdot F\left(\frac{2d - ab}{2\sqrt{a^2 - 4c}}\right), \quad \frac{1}{2}(b-1); \quad x\sqrt{a^2 - 4c}, \qquad (10)$$

т.е. одно из частных решений уравнения (8) принимает форму

$$P(\eta_1) = \eta_1^{-1.4} \cdot e^{-\eta_1/8} \cdot F\left(-\frac{4n+1}{4}, -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\eta_1\right) \qquad (11)$$

где $a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = 0, \quad d = -\frac{\kappa}{4}.$

Последнее решение можно записать в виде полинома при, $\kappa=(4n-1)/4$. Решение, изучаемого уравнения (6), в общем виде, запишется

$$\eta_1=\left(x^2+y^2+z^2\right)/\frac{D_0}{m_0}t,$$

$$C(x,y,z,t)=\exp\eta_1\cdot\left(\frac{D_0}{m_0}t\right)^n\cdot\left[\eta_1^{-1/4}\right]\cdot\exp\eta_1\cdot F\left(-\frac{4n+1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\eta_1\right) \qquad (12)$$

Если ввести новую переменную $\eta=-\eta_1/4$, тогда определяя первую и вторую производную P_1', P_1'' и подставляя в (8), получим выражение

$$\eta P''(\eta)+\left[\frac{1}{2}-\eta\right]\cdot P_1'(\eta)+nP_1(\eta)=0, \qquad (13)$$

которое является вырожденным гипергеометрических уравнением Гаусса и имеет два линейно – независимых решения

$$P_1(\eta)=C_1F_1\left(-n,\frac{1}{2};\eta\right)+C_2\eta^{1/2}F_2\left(-\eta+\frac{1}{2},\frac{3}{2};\eta\right) \qquad (14)$$

Известно, что оба линейно-независимые решения одновременно не могут быть записаны в виде алгебраического многочлена. Первое решение имеет вид полинома когда, $n=1,2,3....K$, а второе при $n=3/2,5/2,...(2\kappa+1)/2$.

Можем записать некоторые точные решения для первого решения уравнения (6) с учетом запланированного решения (7)

$Q(x,y,z,\tau)=C_1\left(2\tau+\eta^2\right)$, при *n=1*

$Q(x,y,z,\tau)=C_1\left(12\tau^2+12\tau\eta+\eta^4\right)$, при *n=2*

$Q(x,y,z,\tau)=C_1\left(120\tau^3+180\tau^2\eta+30\tau\eta^4+\eta^6\right)$, *n=3*

$Q(x,y,z,\tau)=C_1\left(a_0\tau^k+a_1\tau^{k-1}\eta+...a_{n-1}\tau\eta^{2n-2}+a_n\eta^{2n}\right)$, при *n=k* (15)

Для второго линейно – независимого решения уравнения (6), имеем другие выражения

$Q(x,y,z,\tau)=C_2\eta\left(6\tau+\eta^2\right)$, при *n=3/2*

$Q(x,y,z,\tau)=C_2\eta\left(60\tau^2+20\tau\eta^2+\eta^4\right)$, при *n=5/2*

$Q(x,y,z,t)=C_2h\left(80t^3+420t^2h^2+42th^4+h^6\right)$, при *n=7/2* (16)

$Q(x,y,z,t)=C_2h\left(b_0t^{k-1/2}+b_1t^{k-3/2}h^2+...b_{n-1}th^{2k-3/2}+b_nh^{2k+1/2}\right)$, при *n=n+1/2*

Таким образом, нами разработаны два класса частных автомодельных решения для уравнения (6), которые имеют множество различных решений при различных n. Если использовать преобразования Куммера, то можно найти другие классы частных решений.

Рассмотрим другое решение уравнения (6), исходя из групповых свойств дифференциальных уравнений [2], при котором соблюдается инвариантность рассматриваемого уравнения относительно группы преобразования независимых и зависимых переменных. Исходя из вышесказанного, решение уравнения (6), можно найти в форме

$$Q(x,y,z,\tau)=(x+y+z)^2\cdot f(\xi_1),\ \text{где } \xi_1=\frac{\tau}{(x+y+z)^2} \tag{17}$$

Находя все необходимые частные производные, подставляя их в уравнение, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\xi_1^2 f_0''(\xi_1)-\left[\frac{1}{12}+\left(n-\frac{3}{2}\right)\xi_1\right]f'(\xi_1)+\frac{n(n-1)}{4}f(\xi_1)=0. \tag{18}$$

С введением новой функции [4]

$$f'(\xi_1)=e^{\xi}\cdot\xi^{\nu}f_0(\xi),\qquad \text{где}\quad \xi=\xi_1^{-1} \tag{19}$$

получим следующее уравнение

$$\xi^2 f_0''(\xi)+\left[\frac{25}{12}\xi^2+\left(2\nu+\frac{1}{2}+n\right)\xi\right]f_0'(\xi)+\left[\frac{13}{12}\xi^2+\left(n+\frac{1}{2}+\frac{25}{12}\nu\right)\xi\right]\cdot f_0(\xi)+$$

$$+\left[\frac{n(n-1)}{4}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\nu+\nu^2\right]f_0(\xi)=0. \tag{20}$$

Предположим, что квадратная скобка последнего члена, полученного уравнения равно нулю. Это возможно при $v_1=-n/2$ и $v_2=(1-n)/2$ и поэтому для каждого значения v имеем следующие два уравнения называемыми вырожденными гипергеометрическими уравнениями Гаусса

$$\xi f_0''+\left[\frac{1}{2}+\frac{25}{12}\xi\right]f_0'+\left[\frac{13}{12}\xi-\frac{n-12}{24}\right]f_0=0,\quad \text{при}\quad v_1=-\frac{n}{2} \tag{21}$$

$$\xi f_0''+\left[\frac{3}{2}+\frac{25}{12}\xi\right]f_0'+\left[\frac{13}{12}\xi-\frac{n-37}{24}\right]f_0=0,\quad \text{при}\quad v_1=-\frac{n-1}{2}. \tag{22}$$

В окрестности особой точки $\xi=0$, оба линейно – независимые решения уравнения (21) запишутся

$$f_0(\xi)=\exp\left(-\frac{13}{12}\xi\right)\cdot\left[C_1F\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2};\frac{\xi}{12}\right)+C_2\xi^{1/2}F\left(\frac{n+2}{2},\frac{3}{2};\frac{\xi}{12}\right)\right], \tag{23}$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Общее решение уравнения (6), с учетом решения (17,19), примет вид

$$Q(x,y,z,\tau)=\tau^{n/2}\cdot\exp(-\xi/12)\cdot\left[C_1F\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2};\frac{\xi}{12}\right)+C_2\xi^{1/2}\cdot F\left(\frac{n+2}{2},\frac{3}{2};\frac{\xi}{12}\right)\right] \tag{24}$$

Таким образом, искомая функция для уравнения (21), окончательно запишется

$$C(x,y,z,\tau)=\exp\left(a_0x+b_0y+c_0z-d_0t\right)\cdot\left(\frac{D_0t}{m_0}\right)^{n/2}\cdot\exp\left(\frac{(x+y+z)^2}{D_0+12t}\cdot m_0\right)\cdot \tag{25}$$

$$\left\{C_1F\left[\frac{n+1}{2},\frac{1}{2};\frac{m_0}{12D_0}\cdot\left(\frac{x+y+z}{t}\right)^2\right]+C_2\left(\frac{m_0}{12D_0}\frac{(x+y+z)^2}{t}\right)^{1/2}F\left[\frac{n+2}{2},\frac{3}{2};\frac{m_0}{12D_0}\frac{(x+y+z)^2}{t}\right]\right\}$$

Общее решение, для уравнения (22), примет форму

$$f_0(\xi)=\exp\left(-\frac{13}{12}\xi\right)\cdot\left[C_1F\left(\frac{n+2}{2},\frac{3}{2};\frac{\xi}{12}\right)+C_2\xi^{-1/2}F\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2};\frac{\xi}{12}\right)\right], \tag{26}$$

тогда для самого уравнения (6), запишем его решение

$$Q(x,y,z,\tau)=\left(\frac{m_0}{D_0}\tau\right)^{\frac{n-1}{2}}(x,y,z,\tau)\exp\left(-\frac{\xi}{12}\right)\cdot\left[C_1F\left(\frac{n+2}{2},\frac{3}{2};\frac{\xi}{12}\right)+C_2\xi^{-1/2}F\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2};\frac{\xi}{12}\right)\right] \tag{27}$$

а с учетом выражения (5), окончательно имеем

$$C(x,y,z,t)=\exp(a_0x+b_0y+c_0z-d_0t)\cdot t^{\frac{n-1}{2}}(x+y+z)\cdot\exp\left(-\frac{m_0}{12D_0}\frac{(x+y+z)^2}{t}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[C_1F\left(\frac{n+2}{2},\frac{3}{2};\frac{m_0}{12D_0}\frac{(x+y+z)^2}{t}\right)+C_2\left(\frac{m_0}{12D_0}\frac{(x+y+z)^2}{t}\right)^{-1/2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot F\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2};\frac{m_0}{12D_0}\frac{(x+y+z)^2}{t}\right)\right] \tag{28}$$

Теперь рассмотрим случаи, когда каждое частное решение вырожденной гипергеометрической функции Гаусса может быть представимо в виде алгебраического выражения. Первое частное решение выражения (23) представляется в форме полинома, когда n=-2k+1, а второе при n=-2k–2

Отсюда видно, что при одних и тех же значениях показателя автомодельности, частные решения не могут быть одновременно записаны в алгебраических полиномах. Определим некоторые точные решения уравнения (6). Рассмотрим для первого частного решения для искомой функции C(x,y,z,t) его выражения, при n= -1 и n= -3

$$C(x,y,z,t)=\exp(a_0x+b_0y+c_0z-d_0t)\cdot\left(\frac{D_0}{m_0}t\right)^{-1/2}\cdot\exp\left(-\frac{m_0(x+y+z)^2}{12D_0t}\right) \tag{29}$$

$$C(x,y,z,t)=\exp(a_0x+b_0y+c_0z-d_0t)\cdot\left(\frac{D_0}{m_0}t\right)^{-3/2}\cdot$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{m_0(x+y+z)^2}{12D_0t}\right)\cdot\left[1-\frac{m_0(x''+y+z)^2}{6D_0\cdot t}\right]. \tag{30}$$

Теперь выпишем два решения при *n*= -2 и *n*= -4, для второго частного решения

$$C(x,y,z,t) = C_2\left(\frac{D_0}{m_0}t\right)^{3/2} \cdot (x+y+z)\cdot \exp\left[(a_0x+b_0y+c_0z+d_0t) - \frac{m_0(x+y+z)^2}{12D_0t}\right] \quad (31)$$

$$C(x,y,z,t) = C_2\left(\frac{D_0}{m_0}t\right)^{5/2} \cdot (x+y+z)\cdot \exp\left[a_0x+b_0y+c_0z-d_0t - \frac{m_0(x+y+z)^2}{12D_0t}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[1-\frac{m_0(x+y+z)^2}{18D_0t}\right] \quad (32)$$

ВЫВОДЫ

Таким образом, нами определен класс точных решений уравнения (2, 6), причем анализ полученных решений убеждает нас, что с уменьшением показателя автомодельности n число слагаемых, получаемых полиномов, увеличивается. Постоянные интегрирования C_1, C_2 определяется из явного задания начально – краевых условий (3, 4).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 **Полубаринова-Кочина, П. Я. и др.** О движении почвенной влаги грунтовых вод и солей. «Кулундин. степь и вопросы её мелиор-и». – Новосибирск, 1962.

2 **Туганбаев, У. М., Топчубаев, А. А., Турусбекова, Н. О.** К моделированию переноса солей в почвогрунтах фильтрационным потоком и её исследование // Вестник, КГУ им. И. Арабаева. серия: физика, математика и информатика. – 2012. – С. 113-118.

3 **Овсянников, Л. В.** Грунтовой анализ дифференциальных уравнений в частных производных. – М. : Наука, 1978. – 400 с.

4 **Камке, Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М. : Наука, 1976. – 576 с.

Материал поступил в редакцию 15.12.16.

У. М. Туганбаев

Конвективті диффузия стационарлық теңдеуінің аналитикалық зерттеуі туралы

К. И. Скрябин атындағы Қырғыз ұлттық аграрлық университеті, Бішкек қ., Қырғыз Республикасы.

Материал 15.12.16 баспаға түсті.

U. M. Tuganbaev

About analytical research of the non-stationary equation of convective diffusion

K. I. Skryabin Kyrgyz National Agrarian University, Bishkek, Kyrgyzstan.
Material received on 15.12.16.

Жұмыста конвективті араласудың стационарлы емес теңдеуі зерттеледі. Кіші қозулардың әдісі негізінде бұл теңдеу желілік ретінде жазылған, оның шешімі автомодельді түрде табылған және екі жіктеудегі шешімі анықталған.

In the work the non-stationary equation of convective diffusion is investigated. On the basis of a method of small indignations, this equation is written down as linear and its decision is found in an auto modeling mode and two classes of decisions are defined.

УДК 532.456

У. М. Туганбаев
д.ф.-м.н., профессор,
Кыргызский национальный аграрный университет имени К. И. Скрябина,
г. Бишкек, Кыргызская Республика
e-mail: ulanbek_tuganbay@rambler.ru

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПОЧВОГРУНТАХ

Рассматривается двумерное уравнение теплопроводности, для которого найдены четыре вида автомодельных решений.

Ключевые слова: двухмерное уравнение, теплопроводность, почва.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что почва представляет собой многофазную капиллярно-пористую структуру, внутри которой осуществляется следующая теплопередача одновременно: в местах непосредственного контакта частиц, излучением от частицы к частице, конвекцией и теплопроводностью в межпоровом пространстве и в результате переноса влаги. Все эти процессы можно свести к четырем типам процессов: кондуктивной теплопроводности, конвекции в порах, излучению в порах, переносу. Распространение и нахождение тепла внутри почвы, где действуют все эти факторы, является трудной проблемой и исключительной сложности. Для этого, необходимо составить для каждого конкретного случая, системы из четырех уравнений. Если рассматривать почву как квазиоднородное тело, параметры теплопереноса учитывают совокупность всех перечисленных факторов, тогда для описания распространения тепла в почве достаточно одного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка параболического типа, но с эквивалентными коэффициентами. Для решения этого подхода, необходимо решить уравнение теплопроводности при различных краевых условиях, и второе, располагать данными о теплофизических характеристиках в зависимости от внутренних особенностей почвенного материала, т.е., имеется в виду: от плотности, дисперсности, влажности, химико-минералогического состава и т.д.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Для анализа и нахождения температурного поля можно отказаться от системы уравнений кондуктивной, радиационной и массообменной проводимости, а ограничиться лишь одним уравнением теплопроводности с осложненной за счет всех вышеуказанных факторов коэффициентов теплопереноса [1].

$$C(x, y, t)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x, y, t)\frac{dT}{dx^2}\right] + \frac{d}{dy}\left[\lambda(x, y, t)\frac{dT}{dy}\right] \tag{1}$$

Из сказанного следует, что термические характеристики: λ – коэффициент теплопроводности, С-коэффициент объемной теплоемкости, имеют решающее значение при изучении, оценке и регулирование теплового режима в почве. Знание вышеуказанного комплекса характеристик крайне необходимо при решении большого количества важных агротехнических задач. Эти характеристики определяют собой распределение температуры в почве, ход этой температуры на различные глубины почвы по времени, количества тепла, получаемого поверхностью почвы благодаря солнечной радиации, причем это тепло частично проникает в пахотный слой почвы и аккумулируется в ней. Весьма важно знать, какая ожидается температура почвы через определенное время, какова тенденция этой температуры, как она будет меняться в течении суток, сезона и всего года. Важно также знать содержание тепла в почве и какие меры нужно и можно предпринять для того, чтобы уменьшить или увеличить количество тепла в ней. Проблема теплопереноса в почве, за последние годы, превратилось в развивающую отрасль так как ее теоретические, методические и экспериментальные достижения проникли в самые разнообразные области агропромышленного комплекса и ее научных исследований [1]. Основной нашей задачей является определение аналитических частных решений уравнения теплопроводности (1) с начально-краевыми условиями:

$T(x,y,0)=\varphi_1(x,y)$ – распределение начального условия (2)

$T(0,0,t)=\varphi_2(t)$ – на поверхности (2а)

$T(H_0,Y_0,t)=\varphi_3(t)$, $T(X_0,H_1,t)=\varphi_4(t)$ – распределение температуры на глубине $x=H_0$, $y=H_1$ (2б)

Для определения решений нелинейного уравнения (1), поступим следующим образом. Разлагая коэффициенты теплопроводности и теплоемкости на поверхности почвы в нулевом приближении имеем $\lambda(x,y,t)\approx\lambda_0$, $C(x,y,t)\approx C_0$. В этом случае, уравнение (1) запишется

$$(\tau=\lambda_0 t/c_0) \text{ как: } T_\tau = T_{xx}+T_{yy} \tag{3}$$

которое является уравнением наших последующих исследований.

I. Ищем решение (3) в форме $T(x,y,\tau)=\tau^m f(\xi)$, $\xi=-\frac{1}{8}\frac{(x+y)^2}{\tau}$ (4)

Определяя частные производные: $T_\tau=\tau^{m-1}[mf-\xi f']$, $T_{xx}=\tau^{m-1}\left[-\frac{1}{2}\xi f''-\frac{1}{4}f'\right]$, $T_{yy}=\tau^{m-1}\left[-\frac{1}{2}\xi f''-\frac{1}{4}f'\right]$ и подставляя в рассматриваемое уравнение (3), получим

$$\xi f''+\left[\frac{1}{2}-\xi\right]f'+mf=0, \tag{5}$$

Вырожденное гипергеометрическое уравнение Гаусса, которое имеет два вида класса частных решений [2]

$$f(\xi)=C_1F(-m;\frac{1}{2};\xi)+C_2\xi^{1/2}F(-m+\frac{1}{2};\frac{3}{2};\xi) \tag{6}$$

где $F(\xi)=1+\frac{a}{b\cdot 1!}\xi+\frac{a(a+1)}{b(b+1)2!}\xi^2+\ldots+\frac{(a+R-1)}{(b+R-1)\cdot R!}\xi^R+\ldots$ – функция Похгаммера или вырожденная гипергеометрическая функция, и представленная с помощью ряда, сходящегося при всех значениях ξ.

При любых преобразованиях Куммера, можно получить другие классы частных решений исследуемого уравнения [2].

II. Если же искать решение уравнения(3) в другом виде.

$$T(x,y,\tau)=(x+y)^n\cdot f(\eta), \qquad \eta=\frac{b\tau}{(x+y)^2} \tag{7}$$

при этом $\eta_\tau = \frac{b}{(x+y)^2}$, $\eta_X = -\frac{2b\tau}{(x+y)^3}$, $\eta_Y = -\frac{2b\tau}{(x+y)^3}$, а величины

$$T_\tau = (x+y)^{n-2} \cdot bf', \; T_{xx} = (x+y)^{n-2}\left[4\eta^2 f'' + 2(3-2n)\eta f' + n(n-1)f\right],$$

$$T_{yy} = (x+y)^{n-2}\left[4\eta^2 f'' + 2(3-2n)\eta f' + n(n-1)f\right]$$

Подставляя их в уравнение(3), после некоторых математических действий, получим

$$\eta^2 f'' + \left[\frac{3-2n}{2}\eta - \frac{b}{8}\right] f' + \frac{n(n-1)}{4} f = 0 \tag{8}$$

А. Для решения уравнения (8) поступим следующим образом [2]

Пусть $f(\eta(= \exp(\eta_1)\cdot\eta_1^2 \cdot f_1(\eta_1)$, где $\eta_1 = \eta^{-1}$, (9)

v-корень уравнения $v^2 + (1-a)v + c = 0$, $a = \frac{3-2n}{2}$, $c = \frac{n(n-1)}{4}$, получаем следующее уравнение

$$\eta_1 f_1''(\eta_1) + \left[\eta_1 + \frac{4n+1}{2} f_1'(\eta_1) + \frac{3n+1}{2} f_1(\eta_1)\right] = 0\ , \tag{10а}$$

$$\eta_1 f_1''(\eta_1) + \left[\eta_1 + \frac{4n-1}{2} f_1'(\eta_1) + \frac{3n}{2} f_1(\eta_1)\right] = 0\ , \tag{10б}$$

где $v_1 = \frac{n}{2}$, $v_2 = \frac{n-1}{2}$, а решениями уравнения при b=1, $a-2=C=-\frac{2n+1}{2}$

будет $f(\eta) = \eta^{(2n+1)/2}\cdot\exp(1/\eta)\left|c_1 + c_2\int \eta^{(2n+5)/2}\cdot\exp(-1/\eta)d\eta\right|$ (11)

Б. Если же искать решения уравнения (8) в виде алгебраического полинома второй степени $f(\eta) = B_0\eta^2 + B_1\eta + B_2$, (12)
то подставляя его, вместе с его производными в уравнение (8) получим следующую систему

$1.\ B_0(n^2 - 9n + 20) = 0$, $2.\ -bB_0 + B_1(n^2 - 5n + 6) = 0$, $3.\ -bB_1 + 2n(n-1)B_2 = 0$ (13)

Разрешая эту систему получим два решения при n=4 b и n=5

1. $f(\eta) = B_0\eta^2 + \frac{bB_0}{2}\eta + \frac{b^2B_0}{48}$, 2. $f(\eta) = B_0\eta^2 + \frac{bB_0}{6}\eta + \frac{b^2B_0}{240}$.

Таким образом, искомая функция запишется

$$T(x,y,\tau) = (x+y)^4\cdot B_0\left[\eta^2 + \frac{b}{2}\eta + \frac{b^2}{48}\right], \text{ при } n=4, \tag{14а}$$

$$T(x,y,\tau) = (x+y)^5\cdot B_0\left[\eta^2 + \frac{b}{6}\eta + \frac{b^2}{240}\right], \text{ при } n=5 \tag{14б}$$

где величины b и B_0 – произвольны.

В. Если же искать решение уравнения (8) в виде алгебраического полинома третьей степени $f(\eta)=B_0\eta^3+B_1\eta^2+B_2\eta+B_3$ (15)

то проделав те же выкладки, что и выше, получим систему

$$1. B_0(n^2-13n+42)=0, \quad 2. -3bB_0+2B_1(n^2-9n+20)=0$$
$$3. -bB_1+B_2(n^2-5n+6)=0, \quad 4. -bB_2+2n(n-1)B_3=0. \tag{16}$$

Из первого уравнения находим корни: $n_1=6$, $n_2=7$, B_0, и b – произвольны, тогда: $f(\eta)=B_0\eta^3+\frac{3bB_0}{4}\eta^2+\frac{b^2B_0}{16}\eta+\frac{b^3B_0}{960}$, при $n=6$, (17а)

$$f(\eta)=B_0\eta^3+\frac{bB_0}{4}\eta^2+\frac{b^2B_0}{80}\eta+\frac{b^3B_0}{6720}, \text{ при } n=7, \tag{17б}$$

а искомая функция, с учетом предполагаемого решения (7) окончательно запишется

$$T(x,y,\tau)=(x+y)^6\cdot B_0\left[\eta^3+\frac{3b}{4}\eta^2+\frac{b^2}{16}\eta+\frac{b^3}{960}\right], \tag{18а}$$

$$T(x,y,\tau)=(x+y)^7\cdot B_0\left[\eta^3+\frac{b}{4}\eta^2+\frac{b^2}{80}\eta+\frac{b^3}{6720}\right]. \tag{18б}$$

Г. И наконец, рассмотрим решение уравнения (8) в виде

$$f(\eta)=B_0\eta^4+B_1\eta^3+B_2\eta^2+B_3\eta+B^4 \tag{19}$$

в результате получим систему из пяти уравнений

$$1. B_0(n^2-17n+72)=0, \quad 2. -2bB_0+B_1(n^2-13n+42)=0, \quad 3. -3bB_1+2B_2(n^2-9n+20)=0,$$
$$4. -bB_2+B_3(n^2-5n+6)=0, \quad 5. -bB_3+2n(n-1)B_4=0 \tag{20}$$

Из первого уравнения находим корни : $n_1=8, n_2=9$, B_0 и b – произвольные, а решение (19) запишется как

$$f(\eta)=B_0\eta^4+\frac{bB_0}{105}\eta^3+\frac{b^2B_0}{840}\eta^2+\frac{b^3B_0}{25200}\eta+\frac{b^4}{2822400}, \text{ при } n=8, \tag{21а}$$

$$f(\eta)=B_0\eta^4+\frac{bB_0}{120}\eta^3+\frac{b^2B_0}{1600}\eta^2+\frac{b^3B_0}{67200}\eta+\frac{b^4}{9676800}, \text{ при } n=9 \tag{21б}$$

В этом случае искомые функции примут форму

$$T(x,y,\tau)=(x+y)^8\cdot B_0\left[\eta^4+\frac{b}{105}\eta^3+\frac{b^2}{840}\eta^2+\frac{b^3}{25200}\eta+\frac{b^4}{2822400}\right], \tag{22а}$$

$$T(x,y,\tau)=(x+y)^9\cdot B_0\left[\eta^4+\frac{b}{120}\eta^3+\frac{b^2}{1600}\eta^2+\frac{b^3}{67200}\eta+\frac{b^4}{9676800}\right], \tag{22б}$$

Анализ, полученных решений вида (7), показывает, что при увеличении параметра n, степень алгебраического полинома также увеличивается. Поэтому можем записать решение в общем виде уравнения (3), записанное в форме (7) как

$$T(x,y,\tau)=(x+y)^{2n}\cdot\left[B_0\eta^n+B_1\eta^{n-1}+\ldots+B_{2n-4}\eta+B_{2n-3}\right],\ \text{при}\quad n=2n \tag{23а}$$

$$T(x,y,\tau)=(x+y)^{2n+1}\cdot\left[B_0'\eta^n+B_1'\eta^{n-1}+\ldots+B_{2n-4}'\eta+B_{2n-3}'\right],\ \text{при}\quad n=2n+1. \tag{23б}$$

III.Предположим, что решение уравнения (3) можно искать в форме

$$T(x,y,\tau)=\tau^m\cdot(x+y)^n\cdot f(\xi),\qquad \xi=b\frac{(x+y)^2}{\tau} \tag{24}$$

при этом $\xi_\tau=-\frac{\xi}{\tau},\qquad \xi_x=\frac{2\xi}{(x+y)},\qquad \xi_y=\frac{2\xi}{(x+y)}.$

Определяя частные производные T_τ, T_{xx}, T_{yy}, подставляя в (3) получим следующее уравнение

$$\xi^2 f''(\xi)+\left[\frac{1}{8b}\xi^2+\frac{2n+1}{2}\xi\right]f'(\xi)+\left[\frac{n(n-1)}{4}-\frac{m}{8b}\xi\right]f(\xi)=0 \tag{25}$$

Это уравнение при n=1, $b=-\frac{1}{8}$ запишется в виде вырожденного гипергеометрического уравнения Гаусса

$$\xi f''(\xi)+\left[\frac{3}{2}-\xi\right]f'(\xi)+mf(\xi)=0 \tag{26}$$

которое имеет решения

$$f(\xi)=c_1F\left(-m,\frac{3}{2},\xi\right)+c_2\xi^{-1/2}F\left(-m-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\xi\right) \tag{27}$$

Эти решения, при следующих функциональных преобразованиях [2]

$$1.\ F(a,b,\xi)=e^{\xi}\cdot F(b-a,b,\xi),\qquad 2.\ F(a,b,\xi)-bF'(a,b,\xi)=\frac{a(a-1)}{b(b+1)}\xi F(a+1,b+2,\xi)$$

$$3.\ F(a,b,\xi)=\left(a/b\right)\cdot F'(a+1,b+1,\xi)\qquad 4.\ F(a,b,\xi)-F'(a,b,\xi)=\frac{b-a}{b}\cdot F(a,b+1,\xi), \tag{28}$$

могут иметь другие классы частных решений.

А. Теперь для нахождения решения уравнения (25), будем искать его в форме полинома

$$f(\xi)=B_0\xi^2+B_1\xi+B_2 \tag{29}$$

и получим систему $1.\ B_0(2-m)=0$, $2.\ 2bB_0(n^2+7n+4)+B_1(1-m)=0,$

$$3.\ 2bB_1(n^2+3n+2)-mB_2=0,\ 4.\ 2n(n-1)bB_2=0 \tag{30}$$

Разрешая, эту систему получим $B_2=0$, $m=2$, B_0 – произвол, $B_1=2b(n^2+7n+4)B_0)$, тогда искомая функция запишется $f(\xi)=B_0\xi^2+2b(n^2+7n+4)B_0\xi$, а с учетом (24), функция теплопроводности примет вид $T(x,y,\tau)=\tau^2(x+y)^n\left(B_0\xi^2+2b(n^2+7n+4)B_0\xi\right)$ (31)

или в искомых переменных $T(x,y,\tau)=(x+y)^{n+2}b^2B_0\left[(x+y)^2+2\left(n^2+7n+4\right)\tau\right]$ (32)

Б. Предположим, что решение (25) можно найти в форме полинома третьей степени $f(\xi)=B_0\xi^3+B_1\xi^2+B_2\xi+B_3$, (33)

в результате которого имеем систему для определения коэффициентов выражения (33).

1. $B_0(3-m)=0$, 2. $2bB_0(n^2+11n+30)=(m-2)B_1$,

3. $2bB_1(n^2+7n+12)=(m-1)B_2$, 4. $2bB_2(n^2+3n+2)=mB_3$, 5. $n(n-1)bB_3=0$ (34)

Так как у нас величины n, m, B_i пока произвольные, можно рассматриваемую систему решить при их различных значениях

а) При m=3, n=1, B_0 – произвольном имеем $B_1=84bB_0$, $B_2=3360b^2B_0$, $B_3=13440b^3B_0$ т.е. функция f(ξ) запишется

$$f(\xi)=B_0\xi^3+84bB_0\xi^2+3360b^2B_0\xi+13440b^3B_0, \tag{35}$$

а сама функция теплопроводности, как

$$T(x,y,\tau)=\tau^3(x+y)\left(B_0\xi^3+84bB_0\xi^2+3360b^2B_0\xi+13440b^3B_0\right). \tag{36}$$

б) Систему (34) решим следующим образом. Из уравнений (1,4,5) системы (34),имеем $m=0$, $B_3=0$, $n_1=-2$, $n_2=-1$, B_2 – произвол.

Тогда разрешая всю систему уравнений (34),получим

$$f_1(\xi)=B_2\xi\left(1+\frac{1}{2b}\xi+\frac{1}{144b^2}\xi^2\right) \text{ при } n=-2 \tag{36а}$$

$$f_2(\xi)=B_2\xi\left(1+\frac{1}{6b}\xi+\frac{1}{240b^2}\xi^2\right) \text{ при } n=-1 \tag{36б}$$

а сама искомая функция теплопроводности, запишется

$$T_1(x,y,\tau)=\frac{\tau^2}{(x+y)^2}bB_2\left[(x+y)^2+\frac{1}{2}(x+y)\cdot\tau+\frac{1}{144}\tau^2\right] \tag{37а}$$

$$T_2(x,y,\tau)=\frac{\tau}{(x+y)}bB_2\left[(x+y)^2+\frac{1}{6}(x+y)\cdot\tau+\frac{1}{240}\tau^2\right] \tag{37б}$$

В. И последнее, предположим, что существует решение уравнения (25) в виде полинома $f(\xi)=B_0\xi^4+B_1\xi^3+B_2\xi^2+B_3\xi+B_4$ (38)

Определяя также производные 1-го и 2-го порядка, подставляя в рассматриваемое уравнение, получим систему вида

$$1.\ B_0(4-m)=0,\quad 2.\ 2bB_0(n^2+15n+56)=(m-3)B_1,\quad 3.\ 2bB_1(n^2+11n+30)=(m-2)B_2,$$

$$4.\ 2bB_2(n^2+7n+12)=(m-1)B_3,\ 5.\ 2bB_3(n^2+3n+2)=mB_4,\ 6.\ n(n-1)bB_4=0.$$

а).Здесь видно, что при $m=4, n=1, B_0$ – произвольном, имеем

$$f(\xi)=B_0(\xi^4+144b\xi^3+6048b^2\xi^2+80640b^3\xi+241920b^4), \tag{40}$$

при этом функция теплопроводности примет вид

$$T(x,y,\tau)=\tau^4(x+y)B_0(\xi^4+144b\xi^3+6048b^2\xi^2+80640b^3\xi+241920b^4) \tag{41а}$$

или

$$T(x,y,\tau)=A_0\tau^4(x+y)^{-7}\left[(x+y)^8+\frac{(x+y)^6}{3}\tau+\frac{(x+y)^4}{40}\tau^2+\frac{57(x+y)^2}{120960}\tau^3+\frac{\tau^4}{241920}\right] \tag{41б}$$

б)Систему уравнений (39), решим так: Пусть $m=4, B_4=0$, B_0 – произвольная, $n_1=-2, n_2=-1$.Тогда коэффициенты B_1, B_2 выражаются через B_3 которая также произвольна, т.е. имеем

$$f_1(\xi)=B_3\xi\left(1+\frac{3}{4b}\xi+\frac{1}{16b^2}\xi^2+\frac{1}{960b^3}\xi^3\right)\ \text{при}\ n=-2 \tag{42а}$$

$$f_2(\xi)=B_3\xi\left(1+\frac{1}{2b}\xi+\frac{1}{40b^2}\xi^2+\frac{1}{3360b^3}\xi^3\right)\ \text{при}\ n=-1 \tag{42б}$$

А в первоначальных переменных искомая функция теплопроводности запишется

$$T_1(x,y,\tau)=A_3\tau^5(x+y)^{-10}\left[(x+y)^6+\frac{3(x+y)^4}{4}\tau+\frac{(x+y)^2}{16}\tau^2++\frac{\tau^3}{960}\right]\ \text{при}\ n=-2 \tag{43а}$$

ВЫВОДЫ

Таким образом, нами исследовано двумерное уравнение теплопроводности в различных автомодельных формах в различных алгебраических полиномах. Здесь прослеживается закономерность получения определенных решений. Произвольные постоянные полученных решений определяются из явного задания начально-краевых условий рассматриваемой задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 **Чудновский, А. Ф.**Теплообмен в дисперсных средах. – Л. : Гостехиздат, 1954. – 444 с.

2 **Камке, Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука,1976. – 576 с.

3 **Туганбаев, У. М., Топчубаев, А. А., Турусбекова, Н. О.** К моделированию переноса солей в почвогрунтах фильтрационным

потоком и её исследование // Вестник, КГУ им. И. Арабаева. серия: физика, математика и информатика. – 2012. – С. 113-118.

4 **Овсянников, Л. В.** Грунтовой анализ дифференциальных уравнений в частных производных. – М. : Наука, 1978. – 400 с.

Материал поступил в редакцию 15.12.16.

У. М. Туганбаев

Жерқыртысындағы жылулық өткізгіштіктің екі өлшемді теңдеудің зерттеуі туралы

К. И. Скрябин атындағы Қырғыз ұлттық аграрлық университеті,
Бишкек қ., Қырғыз Республикасы.
Материал 15.12.16 баспаға түсті.

U. M. Tuganbaev

About research of the two-dimensional equation of heat conductivity in soil

K. I. Skryabin Kyrgyz National
Agrarian University, Bishkek, Kyrgyzstan.
Material received on 15.12.16.

Жылулық өткізгіштіктің екі өлшемді теңдеу үшін автосұлбілі шешімдерінің төрт түрлері табылытыны қаралды.

There is considered two-dimensional equation of heat conductivity for which, four kinds of automodeling decisions are found.

УДК 539.3

Ж. К. Масанов[1], Н. Т. Ажиханов[2],
Т. А. Турымбетов[3], Ж. А. Аймешов[4]
[1]д.т.н., профессор, [2]д.т.н., профессор, [3]к.т.н., доцент, [4]магистр, преподаватель
[1]Алматинский технологический университет, Алматы;
[2,4]Международный казахско-турецкий университет имени Х. А. Ясави, г. Туркестан;
[3]Каспийский государственный университет технологий и инжиниринга имени Ш. Есенова, г. Алматы
e-mail: [2]ajihanov1@mail.ru, [3]tursinbay@mail.ru, [4]aizhenab@mail.ru

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХ ШТРЕКОВ В ВЕСОМОМ НАКЛОННОСЛОИСТОМ МАССИВЕ С СИСТЕМОЙ ЩЕЛЕЙ В УСЛОВИЯХ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПОРОД

Исследованы закономерности распределения упругих напряжений и перемещений вблизи двух штреков произвольной формы профиля и глубины методом конечных элементов в условиях плоской деформации. Разработан расчетный алгоритм и составлен программный комплекс для изучения упругого состояния сближенных полостей произвольной глубины и формы. Проведен многовариантный численный расчет и анализ влияния на составляющие напряжений и перемещений вблизи полостей, геометрических, физических параметров пород.

Ключевые слова: закономерности распределения упругих напряжений, метод конечных элементов, условие плоской деформации.

ВВЕДЕНИЕ

В прошлом веке в работах советских и иностранные ученых в основном проведены теоретические исследования НДС подземных полостей в изотропном массиве. Используя симметричность бигармонического решения и основываясь на специальные свойства гармонических функции O. Müller[1], K. Stocke [2] рассмотрены соответствующие класы задач. Г. В. Колосов, Н. И. Мусхелишвили [3] при решении плоских задач теории упругости изотропного тела успешно использовали методы теории функции комплесного переменного.

Аналитическая функция, предложенная Аппелом, позволила рассмотреть состояние одно-и многосвязанного изотропного тела с круговыми отверстиями. Ортотропную среду с двоякопериодической системой круглых отверстий рассмотрел Л. А. Фильштинский [4], а такое тело с эллиптическими отверстиями А. С. Космодамианский, М. М. Нескородев [5]. А. С. Космодамианский исследовал НДС анизотропного упругого тела с тремя и бесконечными рядами отверстий и основываясь на эти решения Ж. С. Ержанов, К. К. Кайдаров, М. Т. Тусупов [6] изучали влияния систем щелей на статическое напряженное состояние подземной выработки. Ж. С. Ержанов, Ш. М. Айталиев и Ж. К. Масанов [7] предложили расчетную механико-математическую модель упругого деформирования анизотропного горного массива с двоякопериодическими системами щелей и путем решения задачи приведения получили упругие постоянные транстропного тела, эквивалентого по жесткости основному массиву с щелями, в зависимости от упругих свойств последного и геометрии щелей. На основе этой модели изучены статическое начальное упругое состояние в основном одиночных подземных полостей глубокого заложения строгими и приближенными методами.

Значительный вклад в развитие теории МКЭ и их применению к решению сложных задач статики и динамики механики деформируемого тела внесли ученые Л. Сегерлинд [8], Б. З. Амусин, А. Б. Фадеев [9], Ж. С. Ержанов, Т. Д. Каримбаев [10], Ш. М. Айталиев, Ж. К. Масанов, Р. Б. Баймахан, Н. М. Махметова [11] и др.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В данной работе исследуется упругое статическое напряженное и деформируемое состояние двух полостей неглубокого заложения в тяжелом транстропном массиве в зависимости от степени несплошности сцеплением мелких наклонных слоев под углом φ. Обозначим через H глубину заложения выработок с расстоянием между их центрами 2L.

Уравнение обобщенного закона Гука анизотропного массива с полостями при обобщенной плоской деформации относительно декартовой системой координат Oxyz (см. рис. 1) записывается в виде

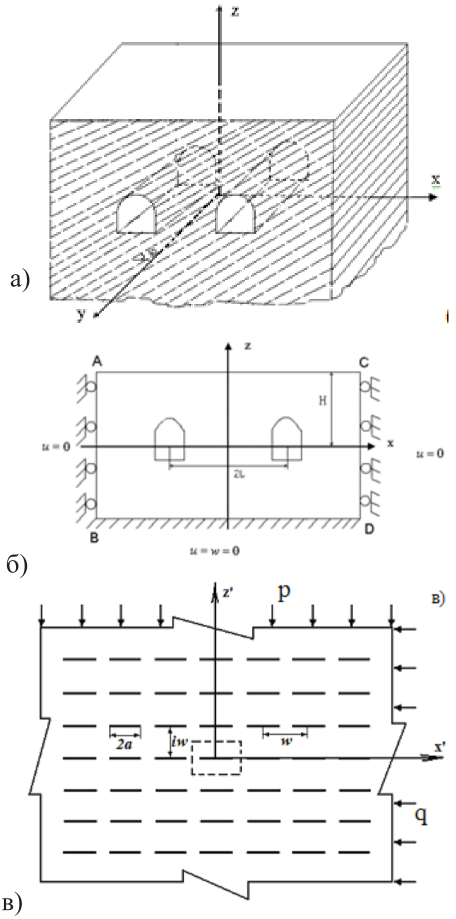


Рисунок 1 – Расчетная схема изучения напряженного состояния анизотропного массива. а) пространственный вид; б) плоский вид; в) плоскость с периодической системой щелей

$$\{\sigma\} = [\overline{D}]\{\varepsilon\}; \tag{1}$$

$\{\sigma\} = (\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz})^T$, $\{\varepsilon\} = (\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xz})^T$, $[\overline{D}] = [d_{ij}]$, $(i, j = 1,2,...,5)$;
– коэффициенты деформации [7].

Здесь $E_k^э, \nu_k^э, G_2^э (k = 1,2)$ – эффективные упругие постоянные транстропного массива, эквивалентного по жесткости анизотропному массиву с щелями, которые зависият от упругих постоянных последнего $E_k, \nu_k, G_2 (k = 1,2)$ и геометриеи щелей $a, \omega, i\omega$.

Область поперечного сечения ABCD штреков при плоской деформации разбивается с помощью n узлов на m изопараметрические расчетные элементы (рисунок 1б). Составляется основная разрешающая система алгебраических уравнений МКЭ 3n-порядка относительно проекций перемещений узлов и она решается при следующих краевых условиях:

Основание BD расчетный области ABCD недеформируемое –

$$u = w = 0; \quad (2)$$

боковые стороны AB и CD под действием веса горных пород перемещаются только в вертикальном направлении в силу отсутствия влияния полостей –

$$u = 0, \qquad w = w(z). \quad (3)$$

Исследуемая расчетная область с полостями автоматически разбивается на изопараметрические элементы с помощью программы FEM_3D в объектное ориентированном среде Delphi. На каждый узел действует вертикальная сила от веса.

Решение основной система уравнений МКЭ относительно составляющих перемещений с краевыми условиями (2), (3) строгими методами сложно; поэтому в работе она решается итерационным методом Зейделя-Гаусса с коэффициентом верхней релаксации с заданной точностью [12]. Привлекательная особенность этого метода заключается в следующем: во-первых, составляется только один раз матрица жесткости системы $[K]$ и при итерации используются ее элементы и элементы матрицы-столбца $\{U\}$; во-вторых, при $k+1$-итерации для неизвестных u_{m+1}, $(m = 1,2,...,3n)$, нужны значения $u_1, u_2, ..., u_m$ при $k+1$ – итерации, а для u_{m+2}, ..., u_{3n}–их значения при k-итерации.

Для проверки правильности работы разработанных алгоритмов и программных комплексов решена тестовая задача об упругом напряженном состоянии круговой полости в анизотропном массиве с горизонтальной плоскостью изотропии $(\varphi = 0)$ в условиях плоской деформации и гидростатическом распределении напряжений в нетронутой среде. В силу симметрии задачи четверть области с полостью разбита на 342 изопараметрический элемент с помощью 380 узлов. Основная система уравнений 1140-порядка решена с помощью 1000 итерации. Отличие значений перемещений в характерных точках контура, полученных итерационным и известным строгим методами, составляет не более 1-2 %.

При вычислении значений компонентов перемещений и напряжений вблизи сближенных штреков различной глубины (H=5*м*,10*м*, 20*м*) и формы профиля в щелеватом транстропном массиве с несплошным сцеплением слоев ($\omega / a = 2.5,\ 3,\ 4,\ 6,\ \infty$) и наклонной плоскостью изотропии (φ=0,30º,45°,60°,90°) изучаемая область разбивалась на 2064 элемента с 2189 узлами.

Результаты расчетов исследовании представлены в виде эпюр; они подробно проанализированы относительно влияния входящих параметорв на упругое состояние подземных сооружений.

При прочих равных условиях параметр w/a значительно сказывается на перемещений вблизи полостей разных форм; с его уменьшением значения последних увеличиваются (рисунки 2, 3).

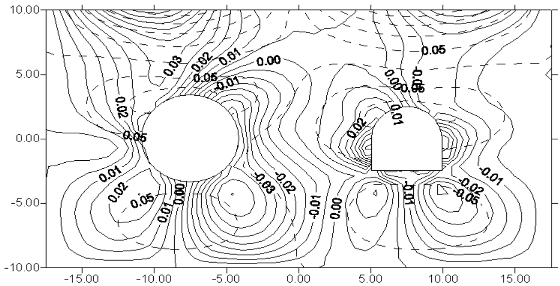


Рисунок 2 – Изолинии перемещений u (мм) вокруг полостей разного профиля. H=10M; L=5M; R_1=3,5M; R_2=2,5M; ω/a=∞; ψ=90^0; φ=30^0; ω/a=6.0; ω/a=2,5

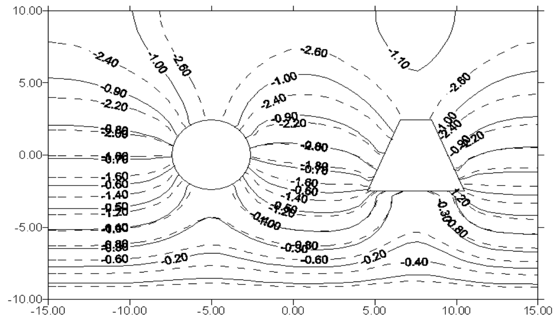
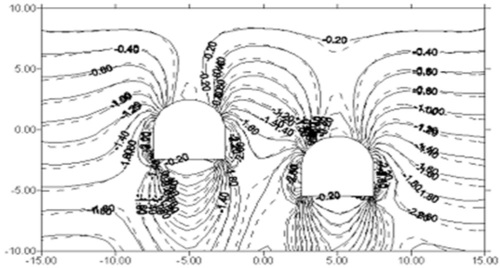


Рисунок 3 – Изолинии вертикальных перемещений w(мм) вокруг полостей разного профиля. H=10M;L=5M;ψ=45^0; φ=0; ω/a=∞; ω/a=3

При нахождении полостей на разных уровнях распределение напряжений весьма сложно; они изменяются с ростом *w/a* (рисунок 4).



$\psi=30^0$; $\varphi=90^0$; $H_1=10$М; $H_2=15$М; $-\omega/a=6$; $\omega/a=2{,}5$

Рисунок 4 – Изолинии изменение вертикальных перемещений σ_z плоскости на разных расположениях.

При угле наклона плоскости изотропии $\varphi = 90°$(и плоскости щелей) щелеватого массива с полостями при прочих равных условиях как напряжения, так и перемещения распределяются вокруг них симметрично относительно вертикальной оси *Oz* и растут с глубиной заложения сооружений; уменьшаются напряжения, растут перемещения с уменьшением *w/a*; когда $\varphi \neq 90°$ как напряжения, так и перемещения являются несимметричными относительно вертикальной оси *Oz*. При длине перемычки 5D и более, где D-наибольший диаметр полостей, взаимовлияние сооружений незначительно.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 **Müller, O.** Untersuchungen an Karbongesteinen zur Klärung von Gebirgsdruckfragen. – Glückauf. – N 47. – 1930. – S. 1601-1612.

2 **Stöcke, K.** Für das Gebingsdruckproblem wichtige Begriffe aus der technischen Mechanik. Zeitschrift für des Berg-Hütten und Salinenwesen. – Bd. 84. – H. 11. – 1937. – S. 465-467.

3 **Мусхелишвили, Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М. : Наука, 1966. – 707 с.

4 **Фильштинский, Л. А.** Напряжения в правильных двоякопериодических решеток. «Инженерный журнал. Механика твердого тела». – № 1. – 1967.

5 **Космодамианский, А. С., Нескородев, М. М.** Двоякопериодическая задача для анизотропной среды, ослабленной эллиптическими отверстиями // «Доповіді АН УРСР, сер. А». – № 7. – 1970.

6 **Ержанов, Ж. С., Кайдаров, К. К., Тусупов, М. Т.** Горный массив с несплошным сцеплением слоев (плоская задача) // В сб. «Механические процессы в горном массиве». – Алма-Ата : «Наука», 1969.

7 **Ержанов, Ж. С., Айталиев, Ш. М., Масанов, Ж. К.** Устойчивость горизонтальных выработок в наклонно-слоистом массиве. – Алма-Ата : Наука, 1971. – 160 с.

8 **Сегерлинд, Л.** Применение метода конечных элементов. – М. : Мир,1979. – 392 с.

9 **Амусин, Б. З., Фадеев, А. В.** Метод конечных элементов при решении задач горной механики. – М. : Недра, 1975. – 142 с.

10 **Ержанов, Ж. С., Каримбаев, Т. Д.** Метод конечных элементов в задачах механики горных пород. – Алма-Ата : Наука, 1975. – 238 с.

11 **Айталиев, Ш. М., Масанов, Ж. К., Баймаханов, И. Б., Махметова, Н. М.** МКЭ: Сейсмонапряженное состояния парных тоннелей. // В кн.: Численные методы решения задач механики деформируемого твердого тела. – Караганда, 1987. – С. 3-15.

12 **Масанов, Ж. К., Ажиханов, Н. Т., Турымбетов, Т. А., Темиров, Б. М.** Екі периодты жарықтармен әлсіретілген серпімді транстроптық тау жыныстарындағы жер бетіне жақын қос штректің кернеулік күйі // Л. Гумилев атындағы Еуразия университеті, Хабаршы журналы. – Астана, 2009. – N 4. Б. 150-154.

Материал поступил в редакцию 15.12.16.

Ж. К. Масанов[1], Н. Т. Ажиханов[2], Т. А. Тұрымбетов[3], Ж. А. Аймешов[4]

Серпімді деформация жыныстарының жағдайында екі штректің салмақты еңкіш қабатты саңылаулары жүйесімен алқабында кернеулі-деформацияланған күйі

[1]Алматы технологиялық университеті, Алматы қ.;
[2,4]Қожа Ахмет Ясауи атындағы
Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ.;
[3] Ш. Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технологиялар және
инжиниринг университеті, Алматы қ.

Материал 15.12.16 баспаға түсті.

Zh. Massanov[1], N. Azhikhanov[2], T. Turymbetov[3], Zh. Aimeshov[4]

The intense deformed condition of two drifts in the powerful inclined layered massif with the system of cracks in the conditions of elastic deformation of rocks

[1]Almaty Technological University, Almaty;
[2,4]A. Yesevi Kazakh-Turkish International University, Turkestan;
[3]Sh. Yessenov Caspian State University
of Technologies and Engineering, Almaty.
Material received on 15.12.16.

Еркін нысандағы бейіні мен тереңдігі екі қабат қуақаздардың жанында ақырлы элементтер әдісімен жазық деформация жагдайында серпімді кернеулердің бөлуі және жылжу заңдылықтары зерттелген. Еркін тереңдігі және нысандары жақындалган қуыстарының серпімді жай-күйін зерттеу үшін есептік алгоритімі әзірленген және бағдарламалық кешені жасалды.

The regularities of an elastic tension distribution and movements near two drifts of any form and depth are investigated by the method of finite elements in the conditions of flat deformation. The settlement algorithm is developed and the program complex for studying the elastic condition of the cavities of any depth and a form pulled together is made.

Секция «ИНФОРМАТИКА»

ӘОЖ 004

Н. Н. Оспанова
п.ғ.к., профессор, С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.
e-mail: nazira_n@mail.ru

КӘСІБИ БАҒЫТТАЛҒАН АҒЫЛШЫН ТІЛІН ОҚЫТУДЫҢ ТЕОРИЯЛЫҚ МОДЕЛІН КОМПЬЮТЕРЛІК ЖҮЗЕГЕ АСЫРУ

IT мамандықтарына кәсіби шет тілі пәннің оқыту құралын әзірлеу.

Кілттік сөздер: оқыту құралы, кәсіби шет тілі.

КІРІСПЕ

Кез келген компьютерлік оқыту бағдарламасын құрар алдында, білім беру электрондық басылымларын әзірлеудің ғылыми-әдістемелік талаптарын ескерген жөн.

Білім беру электрондық басылымларын әзірлеудің дәстүрлі талаптары келесі:

– ғылымилылық талабы: ол бойынша ұсынылған оқу материалы қарастырылып отырған пәндік аймақтағы жаңа жетістіктерді ескере отырып, ғылыми дұрыс, жеткілікті түрде терең болуы керек;

– қол жетімділік талабы бойынша білім алушының жекелеме ерекшеліктері мен жас ерекшеліктеріне қарай материалды оқу тереңдігі мен қиындығының теориялық дәрежесін анықтау қажет;

– мәселелік талабы: оқу-танымдық әрекеттің сипаты мен мәнін қамтамасыз етеді және білім алушының оқыту проблемалық жағдай пайда болған және оны шешкен кезде, ойлау белсенділігінің жоғарылауын талап етеді;

– көрнекілік талабы білім алушының оқып жатқан объектілерін сезімдік қабылдауын іске қосуды білдіреді;

– оқыту әрекетінің саналылық, дербестік және белсендету талабы: білім алушыны уәждеу үшін оқыту ойындық және тәжірибелік жағдайларды, қызықты сұрақтарды, оқудың қандай да бір траекториясын таңдау, оқиғалар мен құбылыстарды модельдеу мүмкіндігін қосы қажет;

– оқытудың жүйелілігі мен бірізділігін талап ету: пәнаралық байланысты, мазмұндаудың қатаң логикасын және білімді бірізді меңгеруді ескеру қажет;

– электрондық оқытудағы білімдер мен білім беру бірліктерін, дамытушы және тәрбиелеуші функцияларын орнықты меңгеруді талап ету [65].

Сонымен бірге, кәсіби бағытталған ағылшын тілін оқытуды компьютерлік жүзеге асыру кезінде ҚР СТ 34.017-2005 Электрондық оқу басылымына қойылатын талаптары ескерілді.

НЕГІЗГІ БӨЛІМ

Жоғары білімді IT-саласындағы мамандарды даярлауда кәсіби бағытталған ағылшын тілін оқытуды компьютерлік жүзеге асыру үшін, Adobe Flash CS5.5 ортасы және ActionScript 3.0 тілі таңдалынды.

Электрондық оқу курсының теориялық моделін компьютерлік жүзеге асыру кезінде Pearson Longman-ның English for Information Technology атты кітабының элементтері қолданылды.

Жоғары білімді IT-саласындағы мамандарды даярлауда кәсіби бағытталған ағылшын тілін оқытудың электрондық курсы келесі бөлімдерден тұрады:

– негізгі бөлім: оқу материалдары мен тәжірибелік іс-әрекет материалдары орналасқан бөлім;

– тестілеу бөлімі: курс барысында меңгерген білімді тексеруге арналған қабықша;

– сөздік: барлық курс бойынша ағылшын тіліндегі сөздер мен тіркестер және олардың анықтамасы;

– лингво жаттықтырушы: жаңа сөздер мен тіркестерді жаттау үшін арналған;

– «Computer Hardware» атты ойын: android платформасына арналған ойын.

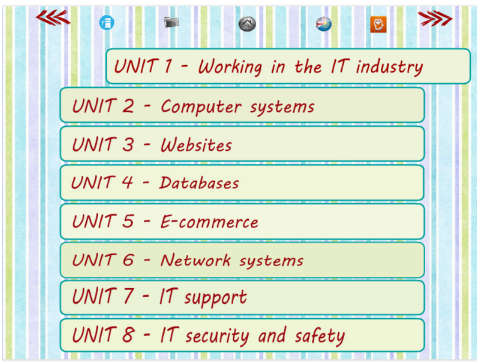
Әзірленген оқу курсының титул парағы 1-суретте көрсетілген. Мұнда білім беру электрондық басылымдарын әзірлеу талаптарына сай, курс атауы бар, сонымен бірге пайдаланылған әдебиеттер тізімі мен авторлар туралы мәліметке сілтеме ұсынылған.

Сурет 1 – Оқу курсының титул парағы

Негізгі бөлімге көшкен кезде, 2-суретте бейнеленгендей модульдердің тізімі пайда болады. Курс 8 модульден тұратындықтан, сәйкесінше модульдердің мазмұнына өтуді жүзеге асыратын сегіз батырма орналасқан.

Жоғарғы жақта навигациялық батырмалар орналасқан. Оларға электрондық оқу курсымен жұмыс барысында кез келген уақытта қатынауға болады. Навигация батырмалары келесі:

– алдыңғы бетке көшу;
– тестілеу қабықшасына көшу;
– барлық модульдердің тізіміне көшу;
– бастапқы бетке, яғни титул парағына өту;
– сөздікті ашу;
– лингво жаттықтырушыны ашу;
– келесі бетке көшу.



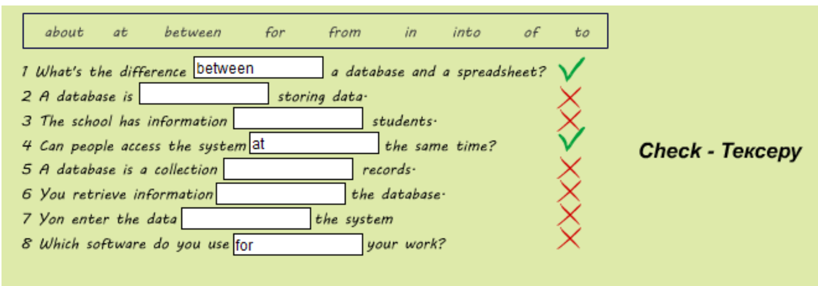
Сурет 2 – Электрондық курстың мазмұндық бөлігі

Әрбір модуль құрамында бес бөлім бар. Модульдің бастапқы бетінде әрбір бөлімнің сипаттамасы ұсынылған. Сәйкес батырмаға шерту арқылы, қажетті бөлімге көшуге болады. 3-суретте бейнеленгендей, бөлім атауына тышқан курсорын жақындатқан кезде, оның сипаттамасы шығады.

Сурет 3 – Модуль бөлімдерінің сипаттамасы

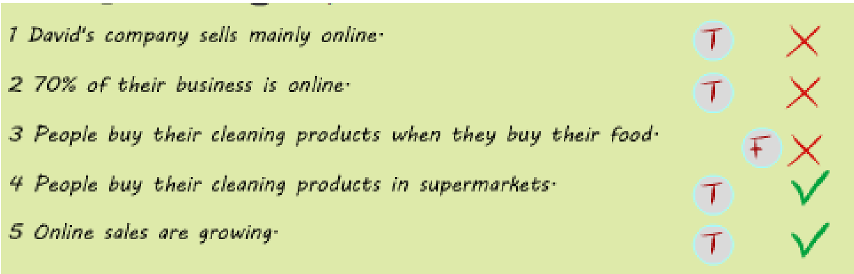
Барлық модульдердің құрамындағы әрбір бөлім жоғарыда қарастырылған барлық элементтерді қамтиды: Vocabulary, Language, Reading, Listening, Writing, Speaking. Осы элементтер бойынша орындалатын жаттығуларды компьютерлік жүзеге асырғанда, келесі әдістер қолданылды:

– жауапты пернетақтадан теру;
– ақиқат-жалғандықты белгілеу;
– сәйкестендіру;
– аудиофайлдарды тыңдау.



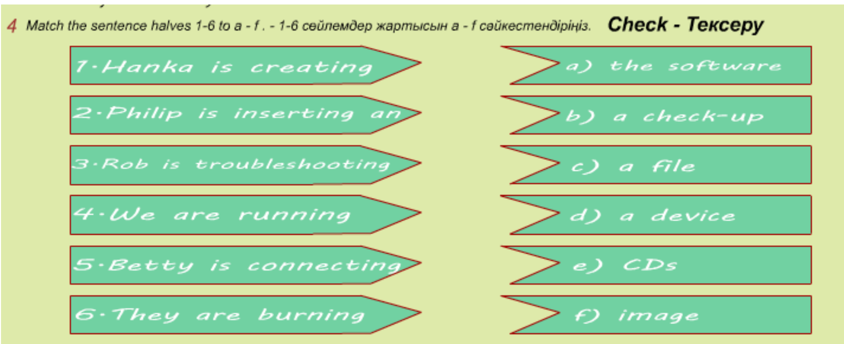
Сурет 4 – Жауапты теру әдісін қолдану

Жауапты теру әдісін 4-суретте көре аласыз, мұнда білім алушы өзінің дұрыс деп ойлайтын жауабын бос жерлерге енгізеді. Барлық ұяшықтарды толтырып болған соң, «Тексеру» батырмасын шертуі тиіс. Сәйкесінше дұрыс жауаптар қасында «дұрыс» белгісі бейнеленеді, ал дұрыс емес жауаптар тұсында «дұрыс емес» белгісі пайда болады.



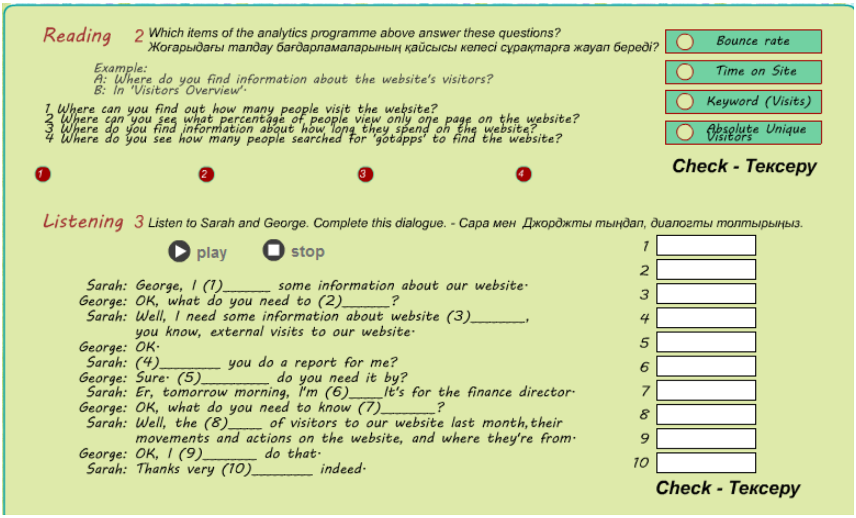
Сурет 5 – Ақиқат-Жалған әдісін қолдану

Жоғарыдағы 5-суретте көрсетілгендей, білім алушы сәйкес тұжырымдаманың бойындағы «Ақиқат» не «Жалған» батырмаларын шертуі тиіс. Бұл жерде тек қана бір нұсқаны таңдауға болады, сондықтан да бір батырманы шерткенде, екінші батырма автоматты түрде жойылады.



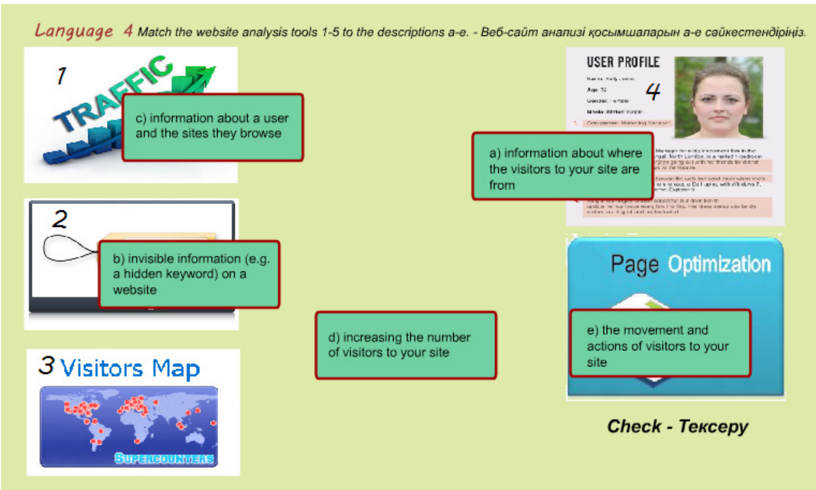
Сурет 6 – Сөйлемнің басы мен жалғасын сәйкестендіру

Сәйкестендіру әдісі бойынша алуан түрлі тапсырмаларды ұсынуға болады. 6-суретте бейнеленген тапсырмада, сөйлемнің бас жағы мен оның жалғасын элементтерді жылжыта отырып, сәйкес орналастыру қажет. «Тексеру» батырмасын шерткен соң, әрбір сөйлем бойында дұрыс не бұрыс екендігі туралы белгі пайда болады.



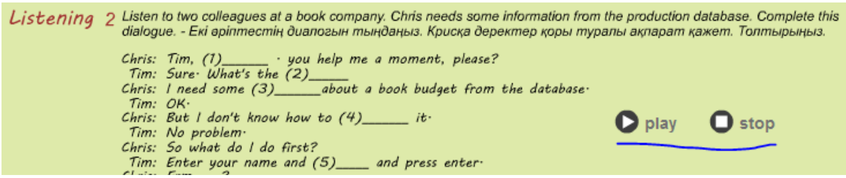
Сурет 7 – Жаңа сөз бен оның анықтамасын сәйкестендіру

Сонымен бірге 7-суретте көрсетілгендей сәйкестендіру әдісін қолдануға болады. Алдын ала меңгерілген білімді қолдана отырып, жаңа сөздерді олардың анықтамаларымен қосу қажет.



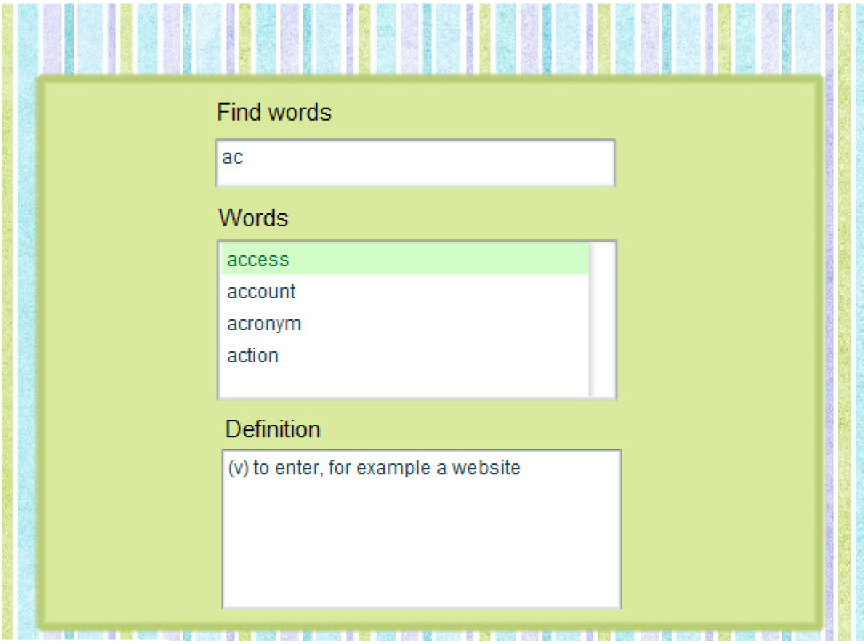
Сурет 8 – Суреттер мен түсініктемелерді сәйкестендіру

Тапсырманы орындау нәтижесінде білім есте қалуы үшін, визуалды интерактивті эффектілерді қолданған өте тиімді. 8-суретте осы әдістің бір мысалы келтірілген.



Сурет 9 – Аудиофайлды қолдану

Тыңдау жаттығуларын орындау үшін, аудиофайлдарды жүктеу қажеттігі туындады. Керекті аудиофайлды «Play» және «Stop» батырмаларының көмегімен бір немесе бірнеше рет тыңдауға болады.

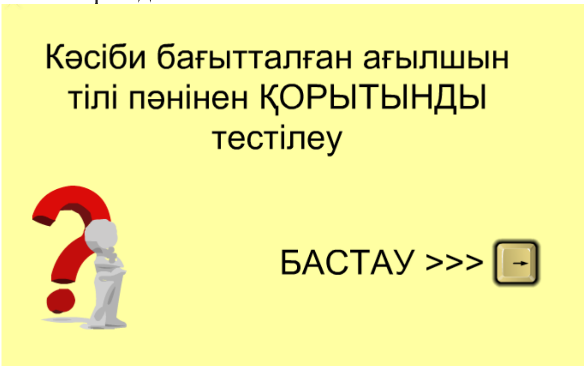


Сурет 10 – Сөздік қосымшасы

Негізгі бөлімде білім алушы жұмыс істеп жатқан уақытында, сөздікті қолдана алу мүмкіндігі бар. 10-суретте сөздіктің интерфейсі бейнеленген.

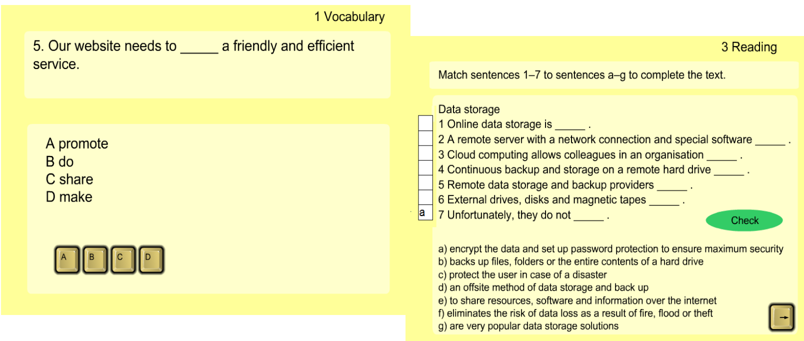
Мұнда қажетті сөзді іздеп табуға болады немесе қажет болған жағдайда ұсынылған тізімнен де алу мүмкіндігі қарастырылған.

Кез келген оқу үрдісін бағалау және бақылау қажет. Сондықтан тестілеу қабықшасын қолдана отырып, оқудың нәтижелілігін тексеріп отыру мүмкіндігі жүзеге асырылды.



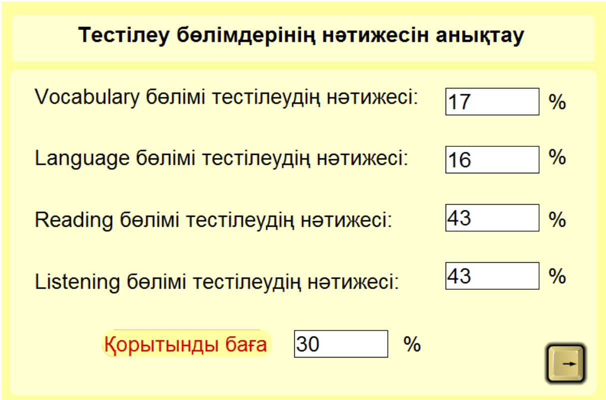
Сурет 11 – Тестілеу қабықшасының титул парағы

Жоғарыда 11-суретте тестілеу қабықшасының алғашқы беті, яғни титул парағы бейнеленген.



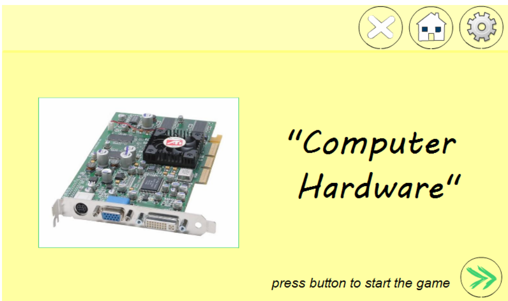
Сурет 12 – Тест түрлері

Тестілердің мүмкін жауап саны – 12-суретте көрсетілгендей – төрт нұсқаны құрайды, олардың біреуі ғана дұрыс болуы мүмкін. Кейбір бөлімдерінде білімді тексеру сәйкестендіру арқылы ұйымдастырылған. Тестілеу де негізгі бөлімдегідей Vocabulary, Language, Reading, Listening, Writing, Speaking элементтерін қамтиды. Әрбір бөлімнің тестілеуі аяқталған соң, баға сандық және пайыздық түрде ұсынылады, одан соң барлық тестілеу бөлімдерінің орташа бағасы есептелінеді. Тестілеу оқытушының қатысуымен өтеді.



Сурет 13 – Нәтижені бейнелеу

Жоғарыда айтылғандай тестілеудің Vocabulary, Language, Reading, Listening тестілеу бөлімдері тест түрінде берілсе, Writing, Speaking бойынша білімді оқытушы ауызша және жазбаша түрде тексереді. 13-суретте алғашқы төрт тестілеу бөлімдерінің орташа бағасын есептеу парағы бейнеленген. Тестілеу нәтижесі бойынша оқытушы білім алушыға келешек оқу үрдісіне арналған өз ұсыныстары мен кеңестерін береді.

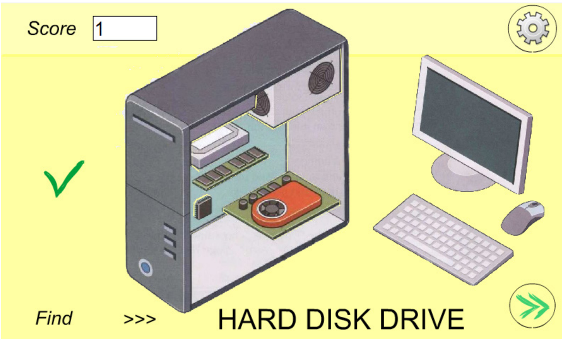


Сурет 14 – Android платформасына арналған ойын

Білім алушы екінші модуль бойынша меңгерген білімін тексеру үшін, өз смартфоны немесе планшетіне 14-суретте бейнеленген ойынды жүктеп, орналастыра алады.

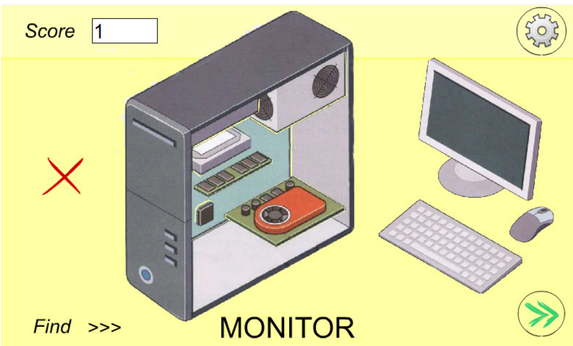
Ойынның бастапқы парағында ойын атауы мен навигациялық батырмалар орналасқан. Навигациялық батырмалар: ойыннан шығу, бастапқы бетке көшу, навигациялық батырмаларды көрсету/жабу және ойынды бастау батырмасы.

Ойынды бастау батырмасын шерткен кезде 15-суретте бейнеленген парақ пайда болады. Мұнда ойын барысында есептелетін ұпайлар саны, навигациялық батырмалар, негізгі бөлік орналасқан.



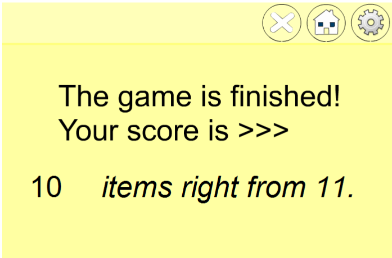
Сурет 15 – Дұрыс жауап берген жағдай

Негізгі бөлікте компьютердің аппараттық құрылғылары бейнеленген. Оның астында ойын пайдаланушысы табуға тиісті құрылғы атауы көрсетіліп тұрады. Ойыншы сәйкесінше қажетті құрылғыны шертуі қажет.



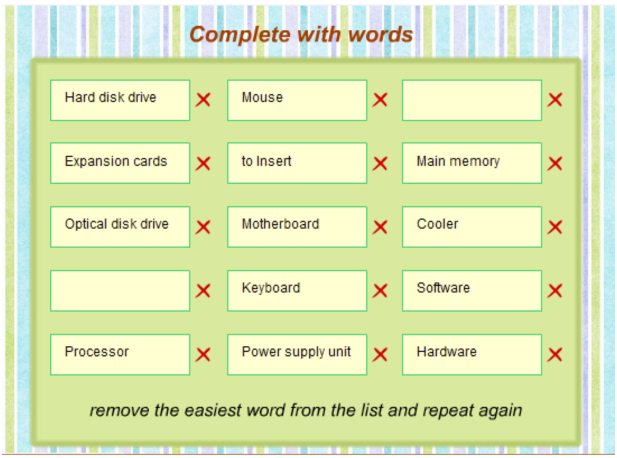
Сурет 16 – Дұрыс емес жауап берген жағдай

Ойыншы дұрыс жауап берген болса, 15-суреттегідей «дұрыс» белгісі пайда болады және ұпай 1-ге артады, ал дұрыс емес жағдайында жоғарыдағы 16-суреттегідей жағдай орын алады. Ойын нәтижесін 17-суретте көрсетілгендей карауға болады. Ойын аяқталған соң, навигациялық батырмаларды көрсетуді жүзеге асырып, не ойыннан шығу, не бастапқы бетке қайтып оралуға болады. Бастапқы бетке оралғанда да, ойыннан шыққан кезде де ұпай саны жоғалады. Ойында бастау батырмасын шерткенде ұпай саны жаңадан есептеліне бастайды.



Сурет 17 – Ойын нәтижесін көрсету парағы

Оқытушыға зор көмегін тигізетін лингво жаттықтырушы қабықшасы 18-суретте бейнеленген. Оның жұмыс жасау әдістемесі 2.1-бөлімінде ұсынылған. Бұл қабықша интерактивті тақтамен жұмыс жасағанда қолданылатындықтан, қосымша іске қосылған кезде, толық экранға шығады.



Сурет 18 – Лингво жаттықтырушының интерфейсі

ҚОРЫТЫНДЫ

Кәсіби бағытталған ағылшын тілін оқытуды компьютерлік жүзеге асыру кезінде ҚР СТ 34.017-2005 Электрондық оқу басылымына қойылатын талаптарына сай, Adobe Flash CS5.5 ортасында ActionScript 3.0 тілінде электрондық оқу курсы әзірленді.

ПАЙДАЛАНҒАН ДЕРЕКТЕР ТІЗІМІ

1 **Жакишева, С. А.** Научно-методические требования к созданию образовательных электронных изданий. // Караганда : Вестник КарГУ, 2010.

2 **Longman, P.** English for Information Technology.

Материал 15.12.16 баспаға түсті.

Н. Н. Оспанова

Компьютерная реализация теоретической модели дисциплины «Профессионально-ориентированный английский язык»

Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.
Материал поступил в редакцию 15.12.16.

N. Ospanova

Computer realization of the theoretical model of the subject «Professional-oriented English»

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.
Material received on 15.12.16.

Компьютерная разработка пособия по профессионально ориентированному английскому языку для IT специальностей.

Computer realization of the subject «Professional-oriented English» for IT majors is present in the research.

Секция «НАУЧНО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ОТРАСЛЯМ»

ӘОЖ 372.551

Б. Т. Калимбетов[1], Ж. О. Хабибуллаев[2]
[1]ф.-м.ғ.д., доцент, [2]PhD докторанты
Қ. А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркестан қ.
e-mail: [1]bkalimbetov@mail.ru; [2]jako4884@mail.ru

СИНГУЛЯР АУЫТҚЫҒАН ТЕҢДЕУЛЕРДІ ОҚЫТУДА ПӘНАРАЛЫҚ БАЙЛАНЫСТАР

Мақала сингуляр ауытқыган теңдеулерді оқыту арқылы пәнаралық байланыстарды жаратылыстану-гылыми багытындагы математиктерді кәсіби даярлаудың құралы ретінде пайдалану мәселелері және қоршаган ортаны танумен багалаудагы орнын айқындауга арналган

Кілттік сөздер: білім беру, пәнаралық байланыстар, сингуляр ауытқыган теңдеулер, математиктерді кәсіби даярлау.

КІРІСПЕ

ЖОО жаратылыстану-ғылыми бағытындағы математик бакалаврлардың шығармашылық тұлғасының дамуына нақты үлесті дифференциалдық теңдеулер қосады. Әдетте дифференциалдық теңдеулермен сипатталған нақты процесс немесе құбылыстағы дифференциалдық қатынастарда физикалық қағидалар үйлесім табады. Ережеге сәйкес мұндай теңдеулерде жоғары ретті туындының алдында кіші параметрлер жиі кездеседі – бұл шектес қабаттар теориясындағы тұтқырлық мәні, кванттық электродинамикадағы электромагнитті өзара әрекеттестіктің интенсивтілігі, аспан механикасында планета массасының күн массасына қатынасы және т.с.с., яғни құбылыстардың физикалық орта қасиеттерін анықтайтын параметрлер. Егер кіші параметр формальды түрде нөлге тең болса, онда дифференциалдық теңдеулер үшін шешімнің бар болуының классикалық теоремасы орындалмай қалады. Кіші параметр дифференциалдық теңдеу үшін оқшауланған ерекше нүкте болып табылады. Мұндай теңдеулер сингуляр ауытқыған теңдеулер деп аталып, оның мазмұны қолданбалы математиканың заманауи бағыттарының бірі болып табылатын сингуляр ауытқу теориясының негізінде қалыптасады.

Пәнаралық байланыс - түрлі оқу пәндерінің арасындағы өзара байланысын айқындау шарты, білім беру мен оқытудың негізгі талаптарының бірі болып табылады. Пәнаралық байланыс кезінде, оқушылардың ойының тиянақталуына, қиялдауына, ұғымды меңгеруге, ойда сақтау мүмкіндіктерін арттыруға жағдай жасалады.

НЕГІЗГІ БӨЛІМ

Математикаға қатысты пәнаралық байланыстарды қолданбалы есептермен бір мезетте пайдалануыды А. А. Столярдың зерттеулерінде көруге болады [1]. Математиканың практикамен тығыз байланысы математикалық модель түрінде болып, әр түрлі физикалық күйінің және көрінісінің көмегімен зерттеледі. Н. В. Чхаидзе, Р. П. Исаева математиканың пәнаралық байланыстарын қолданбалы есептер мен жаттығулар, зертханалық жұмыстар жүйесін құру арқылы зерттеуді ұсынады [2,3]. В. Н. Федорованың зерттеулерінде, техникалық жоғарғы оқу орындарда әмбебап қолданбалы бағыттарды оқыту басқа пәндермен байланысын орнату арқылы қалыптасу мәселелері қарастырылған [4]. Р. П. Исаеваның жоғары математика пәнін оқытуда зертханалық жұмыстар жүйесінің мазмұны және құрылымын қайта жасауы, білімді ынталандырып оқытудың айрықша түріне, қолданбалы есептептер туралы білімдер және ұғымдардың дамуына, техникалық ЖОО студентердің кәсіби дайындығы және математикалық қарқынының жоғарғы деңгейге көтерілуіне септігін тигізуінің куәсі боламыз. Р. П. Петрованың зерттеулері математика, физика және т.б. жалпылама оқу пәндеріндегі техникалық ЖОО студенттерінің ғылыми түсінігін қалыптастыру кезіндегі пәнаралық байланысты орнату формасының жүйеленуіне арналған [5].

Н. Т. Донченконың зерттеулерінде құбылыстар және процестердің физикалық және математикалық моделдерін құруда қажетті болатын негізгі қағидалар тұжырымдалған [6]:

1) физика және математика дәрістерінде бірдей құбылыстың моделі жасалса, ал математика сабақтарында ол одан әрі үлкен дәрежеде абстрактілену жолымен жалпыланады;

2) моделді нақтылау объектінің идеал етіп алынған қасиеттерін ашып көрсететін және физикалық шама ретінде қолданылатын сипаттауыштарды ендіру арқылы орындалады;

3) нақты объектінің немесе процесстің өлшемін сипаттайтын физикалық шамаларды анықтауда математикалық аппаратты қолданады, әсіресе оның көмегімен өлшемдегі есептеу қателіктеріне есептеулер жүргізіледі;

4) нысанның немесе процесстің негізгі функционалдық тәуелділіктерін математикалық ұғымдарды қолдана отырып орнату кезінде үйренушілер математикалық моделдеуді орындайды;

5) есепті шешу кезінде алынған шешімдер фундаменталдық іс-әрекеттің бір түрдегі моделі болып, идеал ретінде алынған объектіні, динамикадағы процесстерді көрсетуге мүмкіндік береді.

Сингуляр ауытқыған есептерді оқытуда пәнаралық байланысты біртіндеп ендіру арқылы әртүрлі жаратылыстану пәндерінің бәріне ортақ физикалық және басқа құбылыстардың, процестердің математикалық моделдерін құру кезінде студенттердың айтарлықтай дәрежеде жалпы игерген білімдері артады. Сингуляр ауытқыған есептерді оқыту процесінде әртүрлі ғылымдардың арасындағы пәнаралық байланыстар білім деңгейімен ашылады.

Дж. Коэль «Методы возмущений в прикладной математике» атты кітабында: Сингуляр ауытқыған есептер иілудің қаттылығы бүкіл берілген аралықпен салыстырғанда айырмашылығы аз болғанда туындайды. Әдетте физикалық құбылыстың күрделі моделі құрылғанда (мысалы, ішектен бөренеге өткенде) дифференциалдық теңдеудің реті өседі. Сәйкесінше шекаралық шарттарда күрделене түседі; жоғары ретті теңдеулер үшін шекаралық шарттарда көбейеді. Ішек есебі үшін орын ауыстыруды берсек болғаны. Бөрене есебінде тіреудің шарты берілуі тиіс. Бөрене-ішек есебінен ішек есебіне өту кезінде шекаралық шарттың жоғалуы тіреудің аймағында шекаралық қабаттың бар екендігін білдіреді және ол иілудің қаттылығына тәуелді. Осыған ұқсас құбылыстар, егер облыстағы түсетін күш немесе белгілі бір нүктенің аймағында жинақталған күш тез өзгерсе орын алады деген пікірді келтірген [7].

К. Чанг, Ф. Хауэс «Нелинейно сингулярно возмущенные краевые задачи» атты кітабында: Ғажабы, бұл сала қазіргі таңда теоретиктердің арасында кең танымалдығы және қолданбалы бағыттағылар үшін қажеттілігіне қарамастан жалпы қолданылатын бір атауға ие болған жоқ. Бір авторлар бұл зерттеу саласын үлкен туындыда кіші параметр қатысқан теңдеу, ал басқалары сингуляр ауытқыған деп айтады, үшіншілері көптеген есептеудің қолданысында пайда болған әртүрлі терминологияларды пайдаланады: шекаралық қабат, шекаралық эффект, тығыз секіріс есептері. Меніңше келтірілген атаулардың ішінде біріншісі дәлірек келеді, бірақ ол айтуға қолайсыз болғандықтан қолданыста ыңғайлы емес. Ал сингуляр ауытқу терминіне келсек, ол жалпы айтқанда айтарлықтай кең мағынаға ие, бірақ тиянақты мағына бермейді деген концепцияны ұсынады [8].

А. И. Калинин «Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем» атты еңбегінде: Кіші параметр қатысқан тиімді басқару есептерін зерттеудің кең тараған тәсілі максимум принципіне негізделген шекаралық есепке ауытқыған дифференциал теңдеулердің шешімдеріне асимптотикалық жіктеу әдісімен табуды қолдануды пайдаланады. Осы әдісті қолдану классикалық вариация есептері, яғни ашық аймақтағы басқару және біртегіс басқару ықпалы есептерінің асимптотикалық шешімдерін құруға мүмкіндік береді. Басқару әрекеттері мәндерінде тұйық теңсіздік түрінде тікелей шектеуі бар заманауи тиімді басқару теориясының есептерінде осы әдісті орындауда күрделі қиындықтарға жолығады, себебі максимум принципінің шекаралық есебінің динамикалық теңдеуі асимптотикалық әдістерді қолдану үшін қажетті шарттарға толық жауап бере бермейді. Сондықтан болса керек шектік есепке зерттеулер жүргізгенде, негізінен тек кіші параметрі нөлге ұмтылғанда ауытқыған есептің шешімінің жинақтылығын анықтауға назар аударылады. Тұйықталған аймақтағы басқару әрекетінің мүмкін болатын мәндері есептеріне асимптотикалық шешімді құруға келсек, мұндағы алынған нәтижелер әлі практикадағы қажеттіліктерді қанағаттандыру деңгейінен алыста. Бұл бірінші кезекте сызықты емес сингуляр ауытқыған есептермен тиімді басқару есептерінің асимптотикалық жуықтауларын құру мәселесіне қатысы бар және ондағы көптеген мәселелердің жауабы ашылмаған және көптеген зерттеулерді қажет етеді деген ойды айтады [9].

Білім мазмұнын жаңарту пәндердің циклі үшін оқу материалы мазмұнының жоғары ғылыми, әрі оқушыға түсінікті деңгеймен оның ғылыми логикасына сәйкес баяндалуын қамтамасыз ететіндей жүйесін анықтау міндетін жүктейді. Бұл міндет циклдегі әр пән бағдарламасымен цикл пәндерінің терең өзара байланысын қамтамасыз ететіндей болып құрылуы арқылы шешілмек.

Ғылыми дүниетанымды қалыптастыру оқытылатын барлық пәндерді қамтитын күрделі үдеріс. Соның ішінде, әсіресе, жаратылыстану циклiндегі пәндердің, бакалаврлардың санасына әлемнің біртұтастығы туралы түсінікті қалыптастырудағы маңызы ерекше. Ал табиғат құбылыстары жайлы біртұтас ғылыми көзқарасты қалыптастыру осы пәндердің арасындағы өзара байланысты жүзеге асыру арқылы мүмкін болады.Жаратылыстану-ғылыми бағытындағы пәндерді оқытуда пәнаралық байланысты жүзеге асыру, әсіресе, осы пәндердің мазмұнын жаңарту қазіргі таңдағы жоғарғы білім беру мекемелерінің алдында тұрған өзекті мәселелердің бірі болып тұр. Себебі, бұл пәндердің өзара байланысы оқу материалының мазмұны мен оның өтілу ретін анықтаудағы аса маңызды белгісі болып табылады.

Сингуляр ауытқыған теңдеулерді математика мамандығы студенттеріне оқытудың мақсаттарының бірі, бұл математик бакалаврлардың диалектикаматериалистік дүниетанымның қалыптасуына, нақты әлемді, өзара байланыс құбылыстарын түсінуге мүмкіншілік беретін пәнаралық қатынастардың рөлін көрсету. Сонымен қатар, пәнаралық байланыстар пәннің қолданбалы бағыттылығын арттыруға, шешімдерді заманауи компьютерлік бағдарламалар арқылы зерттеуде студенттердің математикалық дайындық сапасын жоғарылатуға, компьютерде шешуге арналған есептерді іріктеуге, математикалық әдістердің мүмкіндіктерін толығырақ ашуға, әдістерді толық және жылдам қолдана алатын мамандарды дайындауда көмектеседі.

ҚОРЫТЫНДЫ

Жаратылыстану бағытындағы бакалавр математиктерді дайындау барысында сингуляр ауытқымалы теңдеулер теориясының даму процесі оның абстрактілі сипатынан қолданбалы бағытында қарқын алғанын байқаймыз. Сингуляр ауытқымалы теңдеулердің шешімдерін зерттеу процесінде бакалаврлардың санасына ғылыми теориялардың негізін қалаумен және оның негізгі түсініктерінің пайда болуы мен дамуы; басқа ғылымдармен пәнаралық байланысы және олардың арасындағы алатын орны; абстрактылы математиканың әмбебаптығы мен сипаттамасының көпсатылығы; келелі мәселелерді зерттеу әдістері, осы ғылымның әдіснамалық және тарихи аспектілерін ашу арқылы жететін, болашақ математик бакалаврлардың ғылыми деңгейінің негізінде айқындалатын дүниеге көзқарастарын қалыптастыруда үлкен үлес қосуға тиіс.

ПАЙДАЛАНҒАН ДЕРЕКТЕР ТІЗІМІ

1 **Столяр, А. А.** Логические проблемы преподавания математики: Дисс. ... д-ра пед.наук. – М., 1970. – 596 с.

2 **Чхаидзе, Н. В.** Использование межпредметных связей курса математики во втузе для построения оптимальной системы задач и упражнений: Автореф.дисс. ... канд. пед. наук. – М., 1986. – 16 с.

3 **Исаева, Р. П.** Система лабораторных работ как средство усиления математической подготовки студентов технического вуза: Автореф. дисс. ... канд. пед. наук. – Саранск, 1994. – 31 с.

4 **Федорова, В.Н.** Профессионально-прикладная направленность обучения математическому анализу студентов технических вузов связи: Автореф. дисс. ... канд. пед. наук. – М., 1994. – 17 с.

5 **Петрова, Р. П.** Систематизация форм реализации межпредметных связей при формировании у студентов втуза научных понятий: Автореф. дисс. ... канд. пед. наук. – Челябинск, 1993. – 21 с.

6 **Донченко, Н. Т.** Осуществление взаимосвязи в обучении физике и математике в средней школе. – М. : Просвещение, 1984. – 278 с.

7 **Коэль, Дж.** Методы возмущений в прикладной математике. – М. : Мир, 1972. – 274 с.

8 **Чанг К., Хауэс, Ф.** Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. Теория и приложения. – М. : Мир, 1988. – 247 с.

9 **Калинин, А. И.** Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. – Минск, Экоперспектива, 2000. – 231 с.

Материал 15.12.16 баспаға түсті.

Б. Т. Калимбетов, Ж. О. Хабибуллаев

Межпредметные связи при обучении сингулярно возмущенным уравнениям

Международный казахско-турецкий
университет имени Х. А. Ясави, г. Туркестан.
Материал поступил в редакцию 15.12.16.

B. Kalimbetov, Zh. Huabibullaev

Interdisciplinary communication at teaching the singularly perturbed equations

H. A.Yesevi International Kazakh-Turkish University, Turkestan.
Material received on 15.12.16.

Статья посвящена вопросу выделения межпредметных связей при обучении сингулярно возмущенным уравнениям как средства профессиональной подготовки математиков естественно-научного направления и выступающие в качестве ориентира в познании и оценке явлений действительности.

The article is devoted to the question of allocating interdisciplinary connections at teaching a singularly perturbed equation as a means of vocational training of mathematicians of natural-science direction and projecting as a landmark in the knowledge and evaluating the phenomena of reality.

УДК 378.146.51

Н. И. Мухамедзянова
магистр математики, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар
e-mail: muhamedzanovani@gmail.com

К ВОПРОСУ ОЦЕНКИ РАБОТЫ СТУДЕНТА НА ПРАКТИЧЕСКОМ ЗАНЯТИИ ПО МАТЕМАТИКЕ В ВУЗЕ

В данной работе рассматривается методика интерактивного обучения и различные подходы к оценке учебной деятельности студентов на практических занятиях по дисциплине «Высшая математика», и даются рекомендации к реализации этих подходов в процессе формирования аудиторной и самостоятельной работы студентов.

Ключевые слова: методика интерактивного обучения, самостоятельная работа студентов.

ВВЕДЕНИЕ

Основной целью преподавания курса «Математика» или «Высшая математика» для студентов технических и технологических специальностей является ознакомление их с основными математическими понятиями и математическими методами, которые необходимо им знать в процессе учебы, для изучения специальных курсов, а также для самостоятельного изучения прикладных вопросов применения математики. В ходе изучения дисциплины студент должен развивать математическую интуицию и научиться использовать изученные математические методы в решении задач, связанных с будущей специальностью. В целях и задачах преподавания дисциплины говорится, что, «совершенствуя свою математическую подготовку, студент должен подняться до уровня изучения и понимания математических моделей, применяемых в различных технологиях».

Мониторинг знаний студентов предполагает сохранение преемственности в критериях и показателях для каждого из учебных предметов и курсов обучения, поэтому необходимо разработать критерии выставления баллов по каждому виду осуществляемого контроля. А студенты должны быть ознакомлены на первых же занятиях с требованиями по дисциплине и с критериями начисления и выставления баллов в блоке. Студент должен понять, что итоговая оценка, а главное качество полученных знаний будут зависеть от результатов текущего контроля, регулярной работы в течение семестра, а не от итогового экзамена.

На практических занятиях, СРСП и рубежном контроле осуществляется текущий контроль. «Текущий контроль — это систематическая проверка учебных достижений обучающегося, проводимая преподавателем на занятиях в соответствии с учебной программой дисциплины».

Рейтинговая система контроля и оценки знаний обеспечивает систематическую ритмичную мотивированную работу и студента, и преподавателя. Внедрение рейтинговой системы оценки знаний обеспечивает постоянное стремление студентов набрать больше баллов в ходе учебного процесса, повышает их интерес к учебе.

Однако стабильное знание математики достигается только при систематической работе студента на занятиях. При этом в ходе учебного процесса основной формой общения преподавателя со студентами являются практические занятия, на которых преподаватель имеет возможность наблюдать за работой студента, выявлять отношение к дисциплине, поддерживать творческую активность студента на занятиях и стимулировать самостоятельную работу вне аудитории.

Меняя методы и формы контроля, нужно и можно заставить студента учить учиться. В итоге студента нужно и можно научить перерабатывать материал настолько, чтобы он чувствовал в этом внутреннюю потребность

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Для многих технических специальностей курс «Математика» или «Высшая математика» содержит от 4 до 6 кредитов на весь курс.

В связи с сокращением лекционных и практических часов для освоения программного материала разработана и введена методика интерактивного обучения.

Темы практических занятий даны в «Силлабусе» дисциплины на весь семестр:

1) в начале занятия отрабатываются вопросы новой темы, они сформулированы в УМКД в разделе «Планы практических занятий»;

2) решение задач проводится на доске, активность поощряется баллами (при условии правильного ответа или решения);

3) в аудитории, например, решают четные номера из серии типовых заданий, для домашнего задания даются примеры этой же серии – нечетные номера. Такая методика выдачи заданий удобна при контролировании выполнения домашних заданий;

4) в УМКД к каждому практическому занятию даны методические рекомендации (алгоритм решения примера, задачи);

5) самостоятельное решение ИДЗ позволяет качественно закрепить изучаемый материал и подготовиться к рубежному и итоговому контролю.

Этими рекомендациями студенты пользуются при работе в аудитории и при выполнении домашнего задания.

За 1-2 практических занятия в неделю, в зависимости от числа кредитов по дисциплине, студент может получить максимально 100 баллов. Если число студентов более пяти, встает вопрос о том, как максимально эффективно оценить работу каждого студента за столь ограниченное время работы?

На своих занятиях я выборочно использую оценку нескольких видов деятельности:

1 проверка домашнего задания (5-8 баллов, в зависимости от объема работы). Постоянство проверки дисциплинирует студентов;

2 опрос студентов по теоретическому материалу (5-10 баллов)

3 аудиторная практическая работа и работа у доски (30-40 баллов), причем активность поощряется дополнительными баллами;

4 выполнение самостоятельной работы на занятиях (каждый студент работает со своим заданием) с проверкой результатов преподавателем (20-30 баллов). Это приучает студента внимательно выполнять и контролировать общую работу у доски, грамотно использовать теоретический материал;

5 домашние контрольные работы по вариантам и по уровням сложности (30-40 баллов);

6 домашние мини-конспекты по некоторым вопросам, для более углубленного изучения лекционного материала, с их последующей отработкой на практическом занятии (10-15 баллов).

Например, в группе СТР-102 по дисциплине «Математика 1» (3 кредита) проводилось следующее распределение баллов на практическом занятии (2 урока):

5 неделя: 20 баллов – проверка домашней работы, выполненной по вариантам и разным уровням сложности; 40 баллов – аудиторное решение задач; 40 баллов – проверочная самостоятельная работа по вариантам;

11 неделя: 20 баллов – 10 минутный письменный опрос теории; 5 баллов – проверка домашнего задания; 40 баллов – аудиторное решение задач; 35 баллов – проверочная самостоятельная работа по вариантам.

Таким образом, за практическое занятие студент получает минимум три оценки, сумма которых определяет общий балл за неделю, причем каждый вид работы должен быть выполнен в срок, а студент имеет возможность набора максимального количества баллов, что является хорошим стимулом для систематической подготовки к занятиям.

ВЫВОДЫ

Следует отметить еще одну немаловажную функцию контроля работы студента на практическом занятии – заставить студента работать самостоятельно, приучить его к тому, чтобы для него было немыслимо иначе, как собственными силами усвоить материал, чтобы он самостоятельно думал, искал, проявлял себя, развивал свои способности.

Хорошо организованная практическая работа в аудитории позволяет превратить самостоятельную работу студента в творческий процесс, а это есть главное в работе преподавателя.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 **Такишева, Г. А.** Положение о балльно-рейтинговой системе оценки успеваемости студентов // Актобе : КРМУ, 2014.

2 **Самиева, А. Б., Сбитнева А. Н.,** Самостоятельная работа студентов вуза в условиях кредитной технологии обучения // Вектор науки. – 2013. – № 1.

Материал поступил в редакцию 15.12.16.

Н. И. Мухамедзянова

ЖОО-дағы математика пәнінен тәжіреби сабақтарда студенттерді бағалау туралы

С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.
Материал 15.12.16 баспаға түсті.

N. Mukhamedzyanova

On evaluation of the student practical work in mathematics in a higher education institution

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.
Material received on 15.12.16.

Бұл жұмыста интерактивті оқыту және математика пәнінен тәжіреби сабақтарда студенттерді бағалау әр түрлі әдістері мен ұсыныстар көрсетілген.

In this work the technique of interactive tutoring and various approaches to assessment of the educational activity of students in practical training on the discipline «Higher mathematics» are considered; and recommendations to realization of these approaches in the course of formation of classroom and self-contained work of students are made.

UDC 004.04

***N. Zhanserik*[1], *T. Zhukabayeva*[2]**
[1]master student, [2]PhD
Faculty of Information Technologies, L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana
e-mail: [1]zhanserik.nur@gmail.com; [2]zhukabaeva_tk@enu.kz

THE BASICS OF CLOUD COMPUTING

Cloud computing is a new way for information technologies globalization and virtualization. Over the past few years, the scale of the implementation of cloud computing and virtualization are growing rapidly and became popular in the field of information technology. The article deals with issues such as cloud terms, advantages over traditional debuged servers. This technology is described in the ways of relevance, deployment and services. Given some example on opportunities and difficulties transacting to cloud.
Keywords: public cloud, private cloud, hybrid cloud, community cloud, SaaS, PaaS, IaaS.

INTRODUCTION

What is the cloud? Where is the cloud? Are we in the cloud now? These are all questions you have probably heard or even asked yourself. The term «cloud computing» is everywhere [1].

Cloud Computing – is the technology of distributed computing, where computer resources and capacity are available to the user as an online internet service.

This is a special client-server technology where the use of resources of a group of servers on the network, that of a software, CPU, RAM, disk space, network links and so on, by a client cooperates as follows:

– for client whole group looks like a single virtual server;

– client in case of change of their needs can transparently and with a high flexibility change the volume of resources consumption, such as increasing/decreasing server capacity;

Relevance of cloud computing:

Activities of any organization: large, medium or small, anyway, is connected to the computer. And to remain competitive in the market of services it’s necessary to monitor the main trends of IT development and know how to use them properly.

MAIN PART

Deployment Models:

Public Cloud - cloud infrastructure, where server capacity is located at the side of the cloud service provider, which provides resources to multiple organizations from a single cloud [2].

Private Cloud - cloud infrastructure is provided for the exclusive use of one organization [2].

Hybrid Cloud- simultaneous use of private and public clouds [2].

Community Cloud- some firms may of one industry use a private cloud for their own purposes [2].

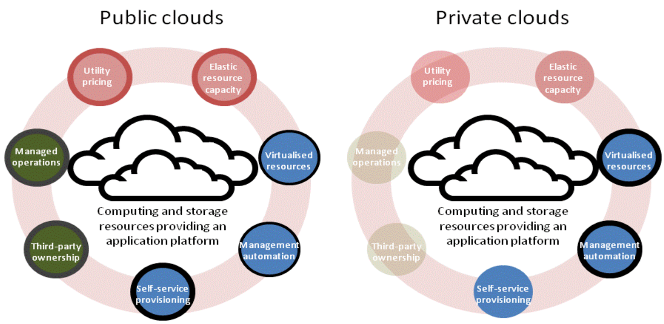


Figure 1 – Private vs Public Cloud [3].

Service Models:

SaaS – Software as a Service. User has access to the remote application, software on the server provider. The main advantage of this model is the absence of costs for installation and maintenance of network equipment and related software [4].

Features of SaaS services:

– application can be accessed remotely by means of different devices and Web clients;

– possibility of multiple customers to use a single application;

– monthly subscription fee or payment for the amount of transactions;

– generally, update is transparent to the client; only in exceptional cases, service is temporarily stopped.

PaaS – Platform as a Service. User gets access to the information technology platform [4].

IaaS - Infrastructure as a Service. Giving the user computing power, processors, RAM, etc. in the form of services [4].

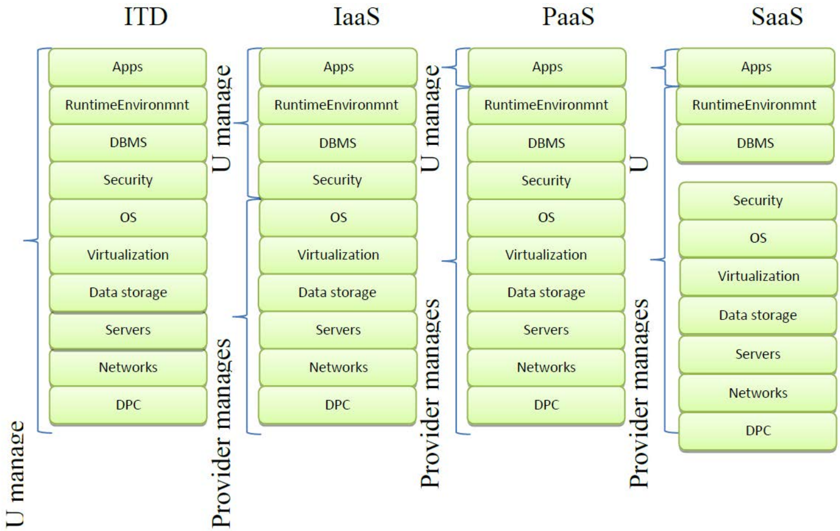
IaaS consists of three main components:

– Hardware (servers, storage, client systems, network equipment);

– Operating systems and system software (virtualization, automation, resource management);

– Middleware (such as System Management);

Table 1 – Classical IT infrastructure vs Cloud



ITD – IT Department

Consider one example of the construction of the IT infrastructure of financial institutions using cloud computing:

Task:

– Uninterrupted service to all bank branches;

– Data storage 400 TB;

– Service of more than 100 computers;

– The level of data center resiliency - Tier3;

Table 2 – Tier standarts [5].

Tier 1	Tier 2	Tier 3	Tier 4
28 hours	22 hours	1,6 hours	0,4 hours

According to the statistics of «Gartner», an hour of downtime in the data center will cost the financial sector banks 4.6 thousands of dollars [6].

Problems of transition of banks to the “cloud”:

Difficulties:

– The responsibility of banks in security policy;

– Personal data protection;

Advantages:

– The opening of new branches in any part of the globe;

– The scalability and flexibility of IT infrastructure;

– cloud ATMs.

CONCLUSION

The cloud represents one of the most significant shifts that computing has gone through. As we move developing the cloud, we will discover a new service-based world, where many words that were once common in IT market like servers, data centers, OS, middleware and clustering will get erased.

The cloud has already helped companies increase their competitiveness today and will play an important role in ensuring it tomorrow. Those who reject cloud solutions as not being flexible, secure or good enough will fail under the weight of their own IT costs and lack of agility. As of today, any company creating new IT assets that does not consider the cloud in some form is increasing the legacy burden that will make their move to the cloud more painful and their business less competitive [7].

REFERENCES

1 **Zhao, G., Liu, J., Tang, Y., Sun, W., Zhang, F., Ye, X., Tang, N.** Cloud Computing: A Statistics Aspect of Users. In: First International Conference on Cloud Computing (CloudCom). – Beijing, China. – Springer Berlin, Heidelberg. – P. 347–358. – 2009.

2 http://www.appcore.com/types-cloud-computing-private-public-hybrid-clouds/

3 **Zhang, Q., Cheng, L., Boutaba, R.** Cloud Computing: state-of-the-art and research challenges. Journal of Internet Services Applications 1(1):7–18. – 2010.

4 http://apprenda.com/library/paas/iaas-paas-saas-explained-compared/

5 http://radlab.cs.berkeley.edu/

6 http://blogs.gartner.com/andrew-lerner/2014/07/16/the-cost-of-downtime/
7 http://blog.cloudbees.com/2012/07/conclusion-cloud-is-its-most-important.html/

Material received on 15.12.16.

Н. Т. Жансерік[1], Т. Жукабаева[2]

Бұлттық есептеулер негіздері

[1,2]Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ.
Материал 15.12.16 баспаға түсті.

Н. Жансерик[1], Т. Жукабаева[2]

Основы облачного вычисления

[1,2]Евразийский национальный университет
имени Л. Н. Гумилева, г. Астана.
Материал поступил в редакцию 15.12.16.

Бұлттық есептеулер – бұл ақпараттық технологияларды жаһандардыру мен виртуализациялаудың жаңа тәсілі. Бұл технология - өзектілігімен, өрістетілуімен және де қызмет түрінде сипатталган. Парақшада бұлттық технологияларга көшудің мүмкіншіліктері мен қиыншылықтары сипатталган.

Облачные вычисления – это новый способ глобализации и виртуализации информационных технологий. Эта технология описана в пути актуальности, развертывания и услуг. Даны некоторые примеры возможности и трудности перехода к облачным вычислениям.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ПГУ ИМЕНИ С. ТОРАЙГЫРОВА

«ВЕСТНИК ПГУ. Серия физико-математическая»

Редакционная коллегия просит авторов при подготовке статей для опубликования в журнале руководствоваться следующими правилами.

Научные статьи, представляемые в редакцию журнала, должны быть оформлены согласно базовым издательским стандартам по оформлению статей в соответствии с ГОСТ 7.5-98 «Журналы, сборники, информационные издания. Издательское оформление публикуемых материалов», пристатейных библиографических списков в соответствии с ГОСТ 7.1-2003 «Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления».

Статьи должны быть поданы для опубликования в строгом соответствии со следующими правилами:

1. ПО СТРУКТУРЕ САМОЙ СТАТЬИ:

В журнал принимаются статьи набранные на компьютере, напечатанные на одной стороне листа с межстрочным интервалом 1,5, с полями 30 мм со всех сторон листа, электронный носитель со всеми материалами в текстовом редакторе «Microsoft Office Word (97, 2000, 2007, 2010) для WINDOWS».

Статья должна содержать:

УДК по таблицам универсальной десятичной классификации (шрифт 14 кегль, не жирными заглавными буквами)

Сведения об авторах статьи должны содержать И. О. Фамилия

на следующей строке ученую степень, ученое звание, место работы (учебы), город (страна для зарубежных авторов)

на следующей строке e-mail:

(ФИО прописными буквами жирным шрифтом, абзац 1см по левому краю, шрифт 14 кегль; остальное не жирным шрифтом)

Заголовок статьи должен отражать содержание статьи, тематику и результаты проведенного научного исследования. В заголовок статьи необходимо вложить информативность, привлекательность и уникальность научного творчества автора (не более 12 слов, заглавными буквами, жирным шрифтом, абзац 1 см по центру, шрифт 14 кегль, на трех языках: русский, казахский, английский)

Аннотация – краткая характеристика назначения, содержания, вида, формы и других особенностей статьи. Должна отражать основные и ценные, по мнению автора, этапы, объекты, их признаки и выводы проведенного исследования. (рекомендуемый объем аннотации – 30-60 слов, прописными буквами, нежирным шрифтом 12 кегль, абзацный отступ слева и справа 1 см, на трех языках: русский, казахский, английский)

Ключевые слова – набор слов, отражающих содержание текста в терминах объекта, научной отрасли и методов исследования. (Рекомендуемое количество ключевых слов – 5-7, количество слов внутри ключевой фразы – не более 3, оформляется как аннотация, на одном языке – языке статьи).

Основной текст статьи излагается в определенной последовательности его частей, включает в себя:

слово ВВЕДЕНИЕ / КІРІСПЕ / INTRODUCTION (нежирными заглавными буквами, шрифт 14 кегль, в центре)

Необходимо отразить результаты предшествующих работ уче-ных, что им удалось, что требует дальнейшего изучения, какие есть альтернативы (если нет предшествующих работ – указать приоритеты или смежные исследования). Освещение библиографии позволит отгородиться от признаков заимствования и присвоения чужих трудов. Любое научное изыскание опирается на предыдущие (смежные) открытия ученых, поэтому обязательно ссылаться на источники, из которых берется информация. Также можно описать методы исследования, процедуры, оборудование, параметры измерения, и т.д. (нежирными прописными буквами, шрифт 14 кегль, не более 1 страницы)

– слова ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ / НЕГІЗГІ БӨЛІМ / MAIN PART (*нежирными заглавными буквами, шрифт 14 кегль, в центре*)

Это отражение процесса исследования или последовательность рассуждений, в результате которых получены теоретические выводы. В научно-практической статье описываются стадии и этапы экспериментов или опытов, промежуточные результаты и обоснование общего вывода в виде математического, физического или статистического объяснения.

При необходимости можно изложить данные об опытах с отрицательным результатом. Затраченные усилия исключают проведение аналогичных испытаний в дальнейшем и сокращают путь для следующих ученых. Следует описать все виды и количество отрицательных результатов, условия их получения и методы его устранения при необходимости.

Проводимые исследования предоставляются в наглядной форме, не только экспериментальные, но и теоретические. Это могут быть таблицы, схемы, графические модели, графики, диаграммы и т.п. Формулы, уравнения, рисунки, фотографии и таблицы должны иметь подписи или заголовки. (*нежирными прописными буквами, шрифт 14 кегль, не более 3-8 страниц, формулы следует набирать в Microsoft Equation Editor; иллюстрации, перечень рисунков представляются в формате TIF или JPG с разрешением не менее 300 dpi.*)

– слово ВЫВОДЫ / ҚОРЫТЫНДЫ / CONCLUSION (*нежирными заглавными буквами, шрифт 14 кегль, в центре*)

Собираются тезисы основных достижений проведенного исследования. Они могут быть представлены как в письменной форме, так и в виде таблиц, графиков, чисел и статистических показателей, характеризующих основные выявленные закономерности. Выводы должны быть представлены без интерпретации авторами, что дает другим ученым возможность оценить качество самих данных и позволит дать свою интерпретацию результатов (*нежирными прописными буквами, шрифт 14 кегль, не более 1 страницы*).

– слова СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ / ПАЙДАЛАНҒАН ДЕРЕКТЕР ТІЗІМІ / REFERENCES (*Нежирными заглавными буквами, шрифт 14 кегль, в центре, не более 5-20 ссылок: книг, статей, интернет-сайтов используемых в статье. Очередность источников определяется следующим образом: сначала последовательные ссылки, т.е. источники на которые вы ссылаетесь по очередности в самой статье, затем дополнительные источники, на которых нет ссылок – т.е. источники, которые не имели место в статье, но рекомендованы вами для кругозора читателям, как смежные работы, проводимые параллельно.*)

2. ПО СЕКЦИЯМ:

СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИКА» – принимаются статьи теоретического и прикладного характера узкой направленности. К ним, например, относятся статьи следующего характера: доказательства полученных новых утверждений или новые способы доказательств известных утверждений, обобщение результатов, их сравнение и анализ; получение новых решений известных задач математики или формулировка (постановка) новых задач и способов их решения; приложение известных теоретических и практических математических исследований в смежных отраслях как физика, информатика, биология, химия и т.д.

СЕКЦИЯ «ФИЗИКА» – принимаются статьи теоретического и при-кладного характера. К ним, например, относятся статьи следующего характера: построение математической и компьютерной модели физических процессов, новых методов решения; обобщение известных результатов, их сравнение и анализ; физическое описание или сравнение явлений природы, встречающихся в астрономии, биологии, химии, инженерии и т.д.

СЕКЦИЯ «ИНФОРМАТИКА». К ним, например, относятся статьи следующего характера: компьютерная реализация математических задач, физических, экономических, химических, биологических и т.п. процессов; составление программных продуктов для реализации социальных, экологических, демографических и других проектов.

СЕКЦИЯ «НАУЧНО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ОТРАСЛЯМ» (не путать с методикой преподавания). К ним относятся статьи следующего характера: отслеживание, анализ, сравнение теоретических и прикладных исследований в области ма-тематики, физики, информатики; обзор и разработка программных средств, форм организации обучения для развития и стимулирования научной деятельности в образовательных учреждениях и т.п.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

Все статьи должны сопровождаться двумя рецензиями доктора или кандидата наук.

Редакция не занимается литературной и стилистической обработкой статьи. При необходимости статья возвращается автору на доработку. За содержание статьи несет ответственность Автор. Статьи, оформленные с нарушением требований, к публикации не принимаются. Датой поступления статьи считается дата получения редакцией ее окончательного варианта.

Статьи публикуются по мере поступления.

Периодичность издания журналов – четыре раза в год (ежеквартально).

Статью (бумажная, электронная версии, оригинал квитанции об оплате) следует направлять по адресу: 140008, Казахстан, г. Павлодар, ул. Ломова, 64, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, Издательство «Кереку», каб. 137.

Тел. 8 (7182) 67-36-69, (внутр. 1147), факс: 8 (7182) 67-37-05.

E-mai1: kereku@psu.kz

www.vestnik.psu.kz

Оплата за публикацию в научном журнале составляет 5000 (Пять тысяч) тенге.

Наши реквизиты:

РГП на ПХВ Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова РНН 451800030073 БИН 990140004654	РГП на ПХВ Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова РНН 451800030073 БИН 990140004654
АО «Цеснабанк» ИИК KZ57998FTB00 00003310 БИК TSESKZK A Кбе 16 Код 16 КНП 861	АО «Народный Банк Казахстана» ИИК KZ156010241000003308 БИК HSBKKZKX Кбе 16 Код 16 КНП 861

ОБРАЗЦЫ ОФОРМЛЕНИЯ БИБЛИОГРАФИИ

ОПИСАНИЕ КНИГ

К-во авторов	Примеры
1	1 **Эльсгольц, Л. Э.** Дифференциальные уравнения и вариацион-ные исчисление: [учебник]. – М. : Наука, 1965. – 424 с. 2 **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: [учебник]. В 3-х томах. Т. 1. – 7-е изд. стер. – М. : Наука, 1970. – 607 с.
2 и более	1 **Луговая, Г. Д.** Функциональный анализ. Специальные кур-сы:[учебное пособие] / Г. Д. Луговая, А. Н. Шерстнев. – М. : ЛКИ, 2008. – 255 с. 2 **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ: [учебник] / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – 2-е изд., перераб. – М. : Наука, 1977. – 741 с. 3 **Виленкин, Н. Я.** Дифференциальные уравнения: [учебное пособие] / Н. Я. Виленкин, М. А. Доброхотова, А. Н. Сафонов. – М. : Просвещение, 1984. – 176 с.

ОПИСАНИЕ СТАТЬИ ИЗ НАУЧНОГО ЖУРНАЛА

К-во авторов	**Примеры**
1	1 **Рахимжанова, А. К.** О политике безопасности компьютерных сетей в корпоративных инфраструктурах // Вестник ПГУ. Серия физико-математическая. – 2013. – №2. – С. 98-103.
2 и более	1 **Зацепин, П. М.** Комплексная безопасность потребителей экс-плуатационных характеристик строений / П. М. Зацепин, Н. Н. Теодорович, А. И. Мохов // Промышленное и гражданское строительство. – 2009. – № 3. – С. 42.

ОПИСАНИЕ СТАТЬИ ИЗ СБОРНИКА НАУЧНЫХ ТРУДОВ КОНФЕРЕНЦИЙ

К-во авторов	**Примеры**
1	1 **Тургумбаев, М. Ж.** О коэффициентах двойных рядов Фурье по мультипликативным системам // Материалы III Республиканской научной конференции по теории приближения и вложения функциональных пространств. – Караганда, 1998. – С. 140-144.
2 и более	1 **Данилова, Н. Е.** Моделирование процессов в следящем приво-де с исполнительным двигателем постоянного тока при независи-мом возбуждении / Н. Е. Данилова, С. Н. Ниссенбаум // Инновации в образовательном процессе: сб. тр. науч.-практич. конф. – Чебоксары: ЧПИ (ф) МГОУ, 2013. – Вып. 11. – С. 158-160.

ПУБЛИКАЦИОННАЯ ЭТИКА НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ПГУ ИМЕНИ С. ТОРАГЫРОВА («ВЕСТНИК ПГУ», «НАУКА И ТЕХНИКА КАЗАХСТАНА», «КРАЕВЕДЕНИЕ»)

Редакционная коллегия журналов «Вестник ПГУ», «Наука и техника Казахстана» и «Краеведение» в своей работе придерживается международных стандартов по этике научных публикаций и учитывает информационные сайты авторитетных международных журналов.

Редакционная коллегия журнала, а также лица, участвующие в издательском процессе в целях обеспечения высокого качества научных публикаций, во избежание недобросовестной практики в публикационной деятельности (использование недостоверных сведений, изготовление данных, плагиат и др.), обеспечения общественного признания научных достижений обязаны соблюдать этические нормы и стандарты, принятые международным сообществом и предпринимать все разумные меры для предотвращения таких нарушений.

Редакционная коллегия ни в коем случае не поощряет неправомерное поведение (плагиат, манипуляция, фальсификация) и приложить все силы для предотвращения наступления подобных случаев. В случае, если редакционной коллегии станет известно о любых неправомерных действиях в отношении опубликованной статьи в журнале или в случае отрицательного результата экспертизы редколлегий статья отклоняется от публикации.

Теруге 15.12.16 ж. жіберілді. Басуға 23.12.2016 ж. қол қойылды.
Пішімі 70x100 $^{1}/_{16}$. Кітап-журнал қағазы.
Шартты баспа табағы 4,94. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.
Компьютерде беттеген М. А. Шрейдер
Корректорлар: А. Р. Омарова, Б. Б. Ракишева
Тапсырыс № 2959

Сдано в набор 15.12.2016 г. Подписано в печать 23.12.2016 г.
Формат 70x100 $^{1}/_{16}$. Бумага книжно-журнальная.
Усл.печ.л. 4,94. Тираж 300 экз. Цена договорная.
Компьютерная верстка М. А. Шрейдер
Корректоры: А. Р. Омарова, Б. Б. Ракишева
Заказ № 2959

«Кереку» баспасынан басылып шығарылған
С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік университеті
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

«КЕРЕКУ» баспасы
С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік университеті
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.
67-36-69
e-mail: kereku@psu.kz
www.vestnik.psu.kz