

С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік  
университетінің ғылыми журналы  
Научный журнал Павлодарского государственного  
университета им. С. Торайғырова

---

1997 жылы құрылған

Основан в 1997 г.



İ Ì Ó  
ÕÀÁÀÐØ ÛÑÛ

ÂÃÑÒÍ ÈÊ Ì ÑÓ

ФИЗИКО - МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

Научный журнал Павлодарского государственного университета  
им. С. Торайгырова

**СВИДЕТЕЛЬСТВО**

о постановке на учет средства массовой информации  
№ 4533-Ж

выдано Министерством культуры, информации и общественного согласия  
Республики Казахстан  
31 декабря 2003 года

**Главный редактор:**

Арын Е.М., д.э.н., профессор (главный редактор);

Тлеуменов С.К., д.ф.-м.н., профессор (зам. гл. редактора);  
Жукенов М.К. (отв. секретарь);

**Члены редакционной коллегии:**

Абдильдин М.М., д.ф.-м.н., академик НАН РК;  
Бахтыбаев К.Б., д.ф.-м.н., профессор;  
Данаев Н.Т., д.ф.-м.н., академик НИА РК;  
Кумеков С.Е., д.ф.-м.н., профессор;  
Куралбаев З., д.ф.-м.н., профессор;  
Оспанов К.Н., д.ф.-м.н., профессор;  
Отельбаев М.О., д.ф.-м.н., академик НАН РК;  
Уалиев Г.У., д.ф.-м.н., профессор, академик НАН РК;  
Айтжанова Д.Н. (тех.редактор).

За достоверность материалов и рекламы ответственность несут авторы и рекламодатели.

Мнение авторов публикаций не всегда совпадает с мнением редакции.

Редакция оставляет за собой право на отклонение материалов.

Рукописи и дискеты не возвращаются.

При использовании материалов журнала ссылка на «Вестник ПГУ» обязательна.

**МАЗМҰНЫ**

<b>Д.Б. Ақнаибетов, Д.Ж. Сәрсембаев</b> Шахталық ленталы конвейердің синхронды айналатын көпқозғалтқышты асинхронды электр жетегі.....	6
<b>Е. Аринов, Ж.Е. Сарсенбаев</b> Таудың сілемі бірнеше рет формасы өзгерген - шиеленіс қалпы таужыныс айналасында көлденең терең өнделіп орналасқан.....	13
<b>В.А. Далингер, А.А. Кисабекова</b> Кәсіптік құзыреттілігінің қалыптастыру мақсатындағы контекстік есептердің көмегімен педагогикалық университеттердің студенттерін математикалық талдауға оқыту барысында пәнаралық байланыстарды іске асыру .....	25
<b>З.С. Мажит</b> Квазиклассикалық сутекті плазманың қысымын зерттеу .....	33
<b>З.С. Мажит</b> Шала иондалған сутекті плазманың радиалдық үлестіру функциялары және статикалық структуралық факторлары.....	38
<b>А.К. Сейтханова</b> Термосерпімді жартылай кеңістіктің шекарасындағы серпімді толқынның шағылу-сыну есебі туралы .....	42
<b>С.К. Тлеукенов, М.К. Жукенов</b> Электромагниттік толқындардың магнитэлектрлік эффектісі бар анизотропты орталарда таралуы .....	51
<b>С.К. Тлеукенов, Н.А. Испулов</b> Термосерпімді толқынның таралуындағы байланысқан есептің шешімі туралы .....	56
<b>А.Б. Тлеулесова</b> Импульстік әсері бар сызықтық шекаралық есептің шешілімділігі туралы .....	65
<b>А.В. Дегтярёв</b> Сигналдарды цифрлік өңдеу: қондырғыларды талдау және олардың ерекшеліктері .....	75
<b>В.Н. Украинаец</b> Серпімді жартылай кеңістігінде қалың қабырғалы қабықшаға жүгірмелі жүктеудің әрекеті .....	81
<b>Д.Т. Куренкеева, А.Т. Кеңжебаева</b> Хроматографиялық процестің фазалары арасындағы массаберілуді есептеу әдісі .....	87
<b>Д.Т. Куренкеева, А.Т. Кеңжебаева</b> Моменттер бойынша хроматографиялық шынның түрін қалыпына келтіру үшін асимметриялық Гаусс қисығын түрлендіру .....	90
<b>М.Ш. Алинова, Н.В. Прокопенко</b> Жер қабатының конструкциясына берілетін физикалық шарттарын есептеу тәжірибесі.....	93
<b>В.Н. Украинаец, М.К. Бейсембаев, С.Р. Гирнис, А.К. Тлеулесов</b> Серпімді кеңістікте көп қабатты жіңішке қабырғалы қабықшаға жүгірмелі периодты жүктеудің әрекеті туралы есеп.....	100
<b>Н.Н. Пудич, О.Г. Потапенко</b> Құралдарға және автоматтандыру жүйелеріне арналған конкурс мәлімдемелері.....	105
Біздің авторлар .....	111
Авторлар үшін ереже .....	113

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Д.Б. Акпапбетов, Д.Ж. Сарсембаев</i> Трехдвигательный асинхронный электропривод синхронного вращения шахтного ленточного конвейера .....	6
<i>Е. Аринов, Ж.Е. Сарсенбаев</i> Напряженно-деформированное состояние неоднородного массива горных пород вокруг горизонтальной выработки глубокого заложения.....	13
<i>В.А. Далингер, А.А. Кисабекова</i> Реализация межпредметных связей в процессе обучения математическому анализу студентов педуваза посредством контекстных задач с целью формирования их профессиональной компетентности .....	25
<b>З.С. Мажит</b> Исследование давления квазиклассической водородной плазмы .....	33
<b>З.С. Мажит</b> Радикальные функции распределения и статические структурные факторы частично ионизированной водородной плазмы.....	38
<i>А.К. Сейтханова</i> О задаче отражения - преломления упругой волны на границе термоупругого полупространства.....	42
<i>С.К. Тлеуенов, М.К. Жуkenов</i> Распространение электромагнитных волн в анизотропных средах с магнитоэлектрическим эффектом.....	51
<i>С.К. Тлеуенов, Н.А. Испулов</i> О решении связанной задачи распространения термоупругой волны .....	56
<i>А.Б. Тлеулесова</i> О разрешимости линейной краевой задачи с импульсным воздействием.....	65
<i>А.В. Дегтярёв</i> Цифровая обработка сигналов: обзор устройств и их особенности .....	75
<i>В.Н. Украинец</i> Действие подвижной нагрузки на толстостенную оболочку в упругом полупространстве.....	81
<i>Д.Т. Куренкеева, А.Т. Кеңжебаева</i> Метод расчета массопередачи между фазами проявительного хроматографического процесса .....	87
<i>Д.Т. Куренкеева, А.Т. Кеңжебаева</i> Модификация асимметрической Гауссовской кривой для восстановления формы хроматографического пика по его моментам.....	90
<i>М.Ш. Алинова, Н.В. Прокопенко</i> Опыт учета физических требований к конструкциям земляного полотна.....	93
<i>В.Н. Украинец, М.К. Бейсембаев, С.Р. Гирнис, А.К. Тлеулесов</i> Задача о действии подвижной периодической нагрузки на многослойную тонкостенную оболочку в упругом пространстве.....	100
<i>Н.Н. Пудич, О.Г. Потапенко</i> Конкурс заявок на средства и системы автоматизации .....	105
Наши авторы.....	111
Правила для авторов.....	113

---

 CONTENT
 

---

***D.B. Akpanbetov, D.Zh. Sarsembayev***

The three-impellent asynchronous electric drive of synchronous rotation  
of the mine tape conveyor..... 6

***E. Arinov, Zh. E. Sarsembayev***

Mode of deformation heterogeneous massif of rocks around a deep lateral opening..... 13

***V.A. Dalinger, A.A. Kissabekova***

Realization of interdisciplinary connections during studying of mathematical analysis of  
pedagogical higher educational establishment through the context  
of problems in order to form their professional competence.....25

***Z.S. Mazhit***

Investigation of quasiclassical hydrogen plasmas pressure .....33

***Z.S. Mazhit***

Partially ionized hydrogen plasmas radial distribution functions  
and static structural factors .....38

***A.K. Seythanova***

About the problem of reflection - refractions of the elastic wave  
on border of thermoelastic semispace.....42

***S.K. Tleukenov, M.K. Zhukenov***

Propagation path of electromagnetic mode in anisotropic medium  
and magnetoelectric effect .....51

***S. Tleukenov, N.A. Ispulov***

About the decision of connected problem of propagation of the thermoelastic wave .....56

***A.B. Tleulesova***

On solvability of the linear boundary-value problem with impulse influence ..... 65

***A. Degtyaryov***

Digital processing of signal: review of constructions and their peculiarities .....75

***V.N. Ukrainetz***

Action of moving loading on a thick shell in elastic halfspace ..... 81

***D.T. Kurenkeeva, A.T. Kenzhebaeva***

The method of calculation of mass transfer between phases  
of the developing chromatographic process ..... 87

***D.T. Kurenkeeva, A.T. Kenzhebaeva***

Modification of the asymmetric Gaussian curve for recovery  
of the chromatographic peak's shape of its moments .....90

***M.S. Alinova, N.V. Prokopenko***

Experience of the account of physical requirements to designs of the earthen cloth .....93

***V.N. Ukrainetz, M.K. Beisembayev, S.R. Girnis, A.K. Tleulesov***

Action of a moving periodic loading on a thin multi-layer shell in elastic space.....100

***N.N. Pudich, O.G. Potapenko***

Call for Proposals for equipment and automation systems..... 105

Our authors..... 111

Rules for authors ..... 113

## **ТРЕХДВИГАТЕЛЬНЫЙ АСИНХРОННЫЙ ЭЛЕКТРОПРИВОД СИНХРОННОГО ВРАЩЕНИЯ ШАХТНОГО ЛЕНТОЧНОГО КОНВЕЙЕРА**

**Д.Б. Акпанбетов**

*Казахский национальный технический университет  
им. К.И. Сатпаева*

**Д.Ж. Сарсембаев**

*Жезказганский университет им. О.А. Байконурова*

В настоящее время на подземных рудниках корпорации «Казахмыс» (рудники «Степной», «Анненский», «Жомарт») внедрена конвейерная технология транспортирования руды, которая вытеснила электровозную откатку, применявшуюся уже десятки лет, как основное средство доставки руды от рудоспусков до околоствольного двора.

Достоинствами ленточных конвейеров являются [1, 2]: высокая производительность, мало зависящая от крупности и влажности материала; возможность транспортирования руды по горизонтали, под уклон и на подъем до 30°; возможность удлинения конвейера; удобство загрузки конвейера с дробилки или прямо с рудоспуска через специальные затворы; сравнительно небольшой шум при работе.

Определение составных элементов привода ленточных конвейеров и выбор системы управления ими должны базироваться на знании: режима работы конвейера; числа приводных барабанов и электродвигателей; месторасположения приводных барабанов; условий работы [3]. Режим работы конвейера характеризуется: продолжительной работой в течение значительного промежутка времени; редкими пусками и остановами; постоянством направления движения тягового органа конвейера; неравномерностью нагрузки, сравнительно тяжелыми условиями пуска.

Конструкция аппаратуры автоматизации конвейеров должна удовлетворять требованиям «Правил изготовления взрывозащищенного рудничного электрооборудования для угольных шахт и нормального исполнения для шахт не опасных по газу и пыли», обеспечивать надежную работу в условиях высокой влажности и запыленности среды при напряжениях 660, 380 или 36 В с использованием магнитных пускателей серий ПМВ и ПМВИ, иметь искробезопасные выходные параметры цепей управления, контроля и сигнализации.

Известно, что определение составных элементов привода ленточных конвейеров и выбор системы управления ими должны базироваться на знании: режима работы конвейера; числа приводных барабанов и электродвигателей; месторасположения приводных барабанов; условий работы [3]. В настоящее время разработаны автоматизированные системы, способные обеспечить управление линиями с числом конвейеров до 60 при неограниченном количестве ответвлений [4]. В составе линий могут быть ленточные и скребковые конвейеры с числом двигателем до четырех и с нерегулируемой скоростью рабочего органа.

На руднике «Жомарт» для автоматизации цикла доставки руды от забоя до бункера дробленой руды на горизонте -190 м применена автоматизированная система управления конвейерным транспортом (*АСУ КТ*), разработанная ООО «Научно-производственное предприятие Уральской государственной горно-геологической академии» (г. Екатеринбург). Режим работы установки – 350 дней в году, минимум 18 часов в сутки, 6480 рабочих часов в год. Срок службы системы – не менее 7 лет.

*АСУ КТ* предназначена для автоматизации следующих процессов [5]:

- отработки технологических последовательностей запуска и останова магистральных *КЛ* №№1,2,3,4, предназначенных для транспортирования руды по рудному горизонту с загрузкой в бункер дробленой руды в руд дворе, работающих в функции заполнения бункера;

- контроля технического состояния машин и механизмов;

- обеспечения блокировок и защит, обнаружения предаварийных и аварийных ситуаций, формирования команд аварийного останова *КЛ*;

- передачи информации о параметрах и состоянии оборудования комплекса *КЛ* и наполнении бункера дробленой руды на автоматизированное рабочее место оператора (*АРМО*) на отметке +64 м башенного копра.

Структурная схема автоматизированной конвейерной линии показана на рисунке 1.

Система *АСУ КТ* имеет трехуровневую иерархическую структуру, включающую:

- диспетчерский уровень, *АРМО* системы со средствами операторского интерфейса;

- уровень централизованного управления *АСУ КТ*, состоящий из центрального поста управления (*ЦПУ АСУ КТ*);

- уровень управления технологическим объектом, состоящий из индивидуальных контуров управления электроприводом *САУ КЛ1-САУ КЛ4*.

Дистанционное управление подсистемами *АСУ КТ* осуществляется с панели *ЦПУ АСУ КТ*, расположенной под землей на отметке -190 м.

Электроснабжение *АСУ КТ* обеспечивается напряжением 380 В, 50 Гц через силовой автоматический выключатель от комплектной трансформаторной подстанции с первичным напряжением 6 кВ.

Технологический комплекс состоит из комплекса КЛ и АРМО. Комплекс КЛ составляют четыре КЛ типа УКЛС-1200-У и два приемных бункера.

Частотный преобразователь (ЧПП) предназначен для плавного пуска двигателя КЛ, управления двигателем в режимах рабочей и ремонтной скорости конвейера, защиты двигателя от перегруза, обрыва фазы и др. ЧПП Danfoss (Дания) в зависимости от их мощности имеют или напольное исполнение (315 кВт) или исполнение в виде навесного шкафа (200 кВт, 75 кВт). На передней панели преобразователя располагается съемная панель управления. Информация по состоянию ЧПП передается в шкаф управления по интерфейсу RS-485. Эксплуатация и программирование ЧПП осуществляется в соответствии с инструкцией по его эксплуатации.

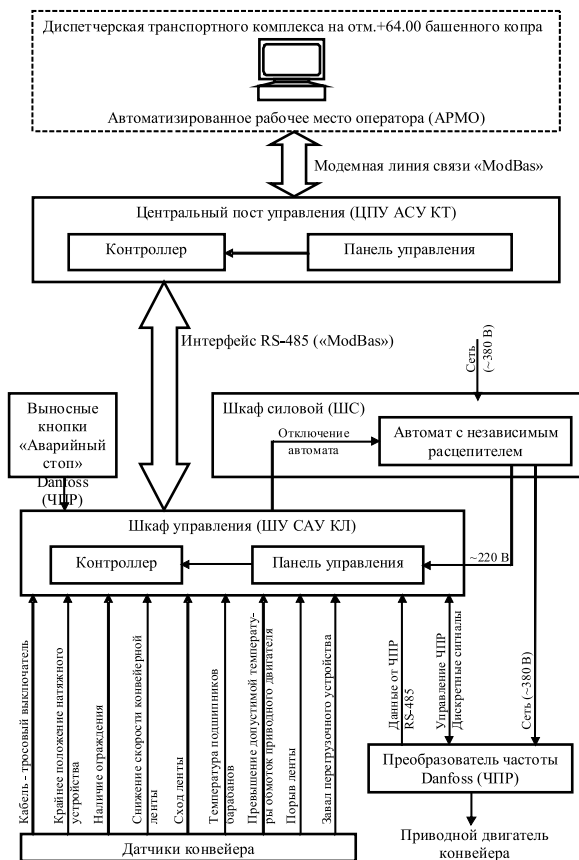


Рисунок 1 – Структурная схема автоматизированной однодвигательной конвейерной линии



Силовой шкаф (ШС) содержит: выключатели автоматические, трансформатор, пускатели, диодные матрицы, вставки плавкие, реле промежуточные, диоды светоизлучающие, резисторы, конденсаторы.

Для построения средств локальной автоматики была выбрана контроллерная платформа производства ФГУП НПО «Автоматика» (г.Екатеринбург, Россия). Связь между АРМО и ЦПУ АСУКТ осуществляется по протоколу ModBus по модемной линии связи с использованием модема Telebyte 227.

Применение в качестве привода конвейера асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором с повышенным пусковым моментом может привести к созданию повышенных динамических усилий в тяговом органе в период пуска незагруженного конвейера. Для пуска конвейеров большой протяженности необходимо плавное приложение движущего момента, что позволит снизить перенапряжения в тяговом органе, вызываемые упругими деформациями.

Поэтому при конвейерах большой длины с многодвигательным электроприводом ставится задача автоматического регулирования отдельных двигателей с целью перераспределения нагрузки между ними и обеспечения равномерности натяжения ленты по ее длине [6,7].

На рисунке 2 приведена структурная схема многодвигательного асинхронного электропривода ленточного конвейера, обеспечивающая синхронное вращение электродвигателей [8].

Многодвигательный электропривод конвейера состоит из трех асинхронных двигателей с короткозамкнутым ротором (АД1-3), трех преобразователей частоты (ПЧ1-3), трех регуляторов скоростей (РС1-3). Каждый АД с ПЧ имеет свою обратную связь по скорости с коэффициентами обратных связей  $k_{\alpha c1}$ ,  $k_{\alpha c2}$ ,  $k_{\alpha c3}$ . Для обеспечения синхронного вращения двигателей введены дополнительно обратные связи по рассогласованию скоростей двигателей ( $k_{\alpha p.c1}$ ,  $k_{\alpha p.c2}$ ,  $k_{\alpha p.c3}$ ). Скорости первого  $\Delta\omega_1$  и второго  $\Delta\omega_2$  двигателей сравниваются в устройстве  $\Sigma_1$ , выходной сигнал  $\Delta u_{o.p.c21} = k_{o.p.c1} \Delta\omega_2$  с которого подается в устройство  $\Sigma_{14}$ , где поданный сигнал  $\Delta u.p.c_{13}$  сравнивается с задающим сигналом управления  $\Delta u_{c.n}$  и с отрицательным сигналом рассогласования скоростей  $\Delta u.p.c_{13}$  первого и третьего

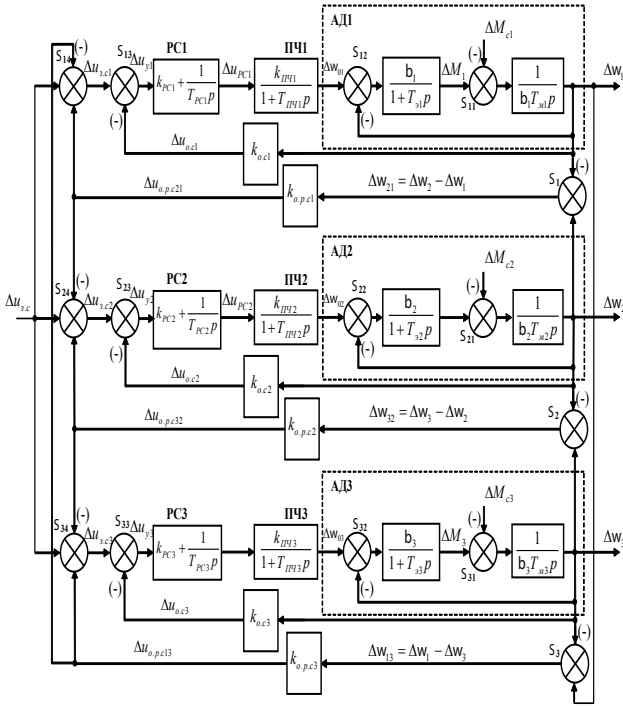


Рисунок 2 – Трехдвигательный асинхронный электропривод с преобразователями частоты ленточного конвейера

двигателей, после чего подается задающий сигнал управления  $\Delta u_{c.н1}$  на первый АД с ПЧ МАЭП. Скорости второго  $\Delta\omega_2$  и третьего  $\Delta\omega_3$  двигателей сравниваются в устройстве  $\Sigma_2$ , выходной сигнал  $\Delta u_{o.p.c32} = k_{o.p.c2} \Delta\omega_{32}$  с которого подается в устройство  $\Sigma_{24}$ , где поданный сигнал  $\Delta u_{p.c13}$  сравнивается с задающим сигналом управления  $\Delta u_{c.н}$  и с отрицательным сигналом рассогласования скоростей  $\Delta u_{i.\delta.н2}$  первого и второго двигателей, после чего подается задающий сигнал управления  $\Delta u_{c.н2}$  на второй АД с ПЧ МАЭП. Скорости первого  $\Delta\omega_1$  и третьего  $\Delta\omega_3$  двигателей сравниваются в устройстве  $\Sigma_3$ , выходной сигнал  $\Delta u_{o.p.c13} = k_{o.p.c3} \Delta\omega_{13}$  с которого подается в устройство  $\Sigma_{34}$ , где поданный сигнал  $\Delta u_{p.c13}$  сравнивается с задающим сигналом управления  $\Delta u_{c.н}$  и с отрицательным сигналом рассогласования скоростей  $\Delta u_{i.\delta.н3}$  второго и третьего двигателей, после чего подается задающий сигнал управления  $\Delta u_{c.н3}$  на третий АД с ПЧ МАЭП.

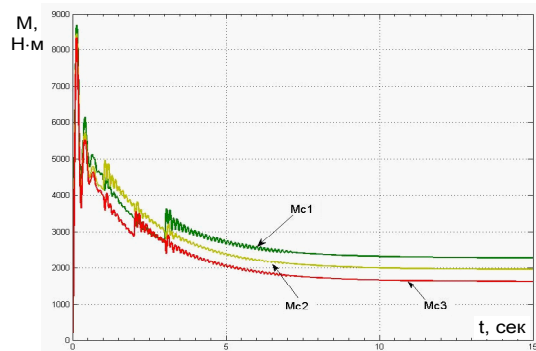
В программном расширении Simulink программного пакета MatLab7.0 выполнено моделирование переходных процессов при различных нагрузках, согласно структурной схеме, показанной на рисунке 2. На рисунке 3 приведены программа расчета и осциллограмма переходных процессов.

```

C:\Program Files\MATLAB71\work\MAP.m
function dx=MAP(t,x)
1 - dx=zeros(12,1);
2 - b1=1098.039; b2=1098.039; b3=1098.039; Tm1=0.344; Tm2=0.344; Tm3=0.344;
3 - Ta1=0.085; Ta2=0.085; Ta3=0.085; Kc1=20; Kc2=20; Kc3=20;
4 - Koc1=0.4; Koc2=0.4; Koc3=0.4; Krc1=0.8; Krc2=0.8; Krc3=0.8;
5 - Trc1=0.1; Trc2=0.1; Trc3=0.1; Trpch1=0.001; Trpch2=0.001; Trpch3=0.001;
6 - U=10; Kpch1=2; Kpch2=2; Kpch3=2; Mnom=163;
7 - if t<=3 Mc1=Mnom; else Mc1=1.4*Mnom; end;
8 - if t<=1 Mc2=0.8*Mnom; else Mc2=1.2*Mnom; end;
9 - if t<=2 Mc3=0.7*Mnom; else Mc3=Mnom; end;
10 - dx(1)=(1/(b1*Tm1))*x(2)-(1/(b1*Tm1))*Mc1;
11 - dx(2)=(1/(Tm1))*x(3)-(1/(Tm1))*x(2);
12 - dx(3)=(Kpch1/Trpch1)*x(4)-(1/Trpch1)*x(3);
13 - dx(4)=Krc1*Koc1/(b2*Tm2)*x(6)-Mc2*Krc3*(Krc1+Krc3+Koc1)/(b1*Tm1)*x(2)-Mc1*Krc3/(b3*Tm3)*x(10)-Mc3*...
14 - U;
15 - U*(Trc1+Krc1/Trc1)*x(5)-(Krc1+Krc3+Koc1)/Trc1*x(1)+Krc3/Trc1*x(8);
16 - dx(5)=(1/(b2*Tm2))*x(6)-(1/(b2*Tm2))*Mc2;
17 - dx(6)=(b2/Te2)*x(7)-(b2/Te2)*x(5)-(1/Te2)*x(6);
18 - dx(7)=(Kpch2/Trpch2)*x(8)-(1/Trpch2)*x(7);
19 - dx(8)=Krc2*Koc2/(b3*Tm3)*x(10)-Mc3*Krc2*(Krc2+Koc2)/(b2*Tm2)*x(6)-Mc2*Krc1/(b1*Tm1)*x(2)-Mc1*...
20 - U*(Trc2+Krc2/Trc2)*x(9)-(Krc2+Krc1+Koc2)/Trc2*x(5)+Krc1/Trc2*x(1);
21 - dx(9)=(1/(b3*Tm3))*x(10)-(1/(b3*Tm3))*Mc3;
22 - dx(10)=(b3/Te3)*x(11)-(b3/Te3)*x(9)-(1/Te3)*x(10);
23 - dx(11)=(Kpch3/Trpch3)*x(12)-(1/Trpch3)*x(11);
24 - dx(12)=Krc3*Koc3/(b1*Tm1)*x(2)-Mc1*Krc3+Krc2+Koc3)/(b3*Tm3)*x(10)-Mc3+Krc2/(b2*Tm2)*x(6)-Mc2+...
25 - U*(Trc3+Krc3/Trc3)*x(1)-(Krc3+Krc2+Koc3)/Trc3*x(9)+Krc2/Trc3*x(8);
26 - end

```

а)



б)

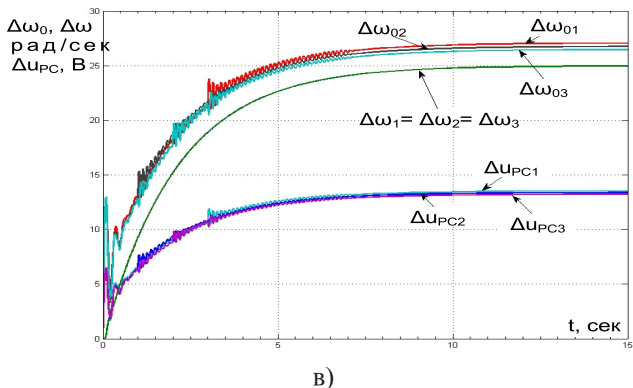


Рисунок 3 – Программа расчета (а) и осциллограммы переходных процессов  
(б – моменты, в – сигналы с выходов ПЧ1-3, РС1-3; угловые скорости) трехдвигательного асинхронного электропривода при различных статических нагрузках во времена  $t=1c$ ,  $t=2c$ ,  $t=3c$

Таким образом, как показали результаты моделирования, разработанный многодвигательный асинхронный электропривод обеспечивает надежную синхронную работу электродвигателей в различных режимах работы (синхронный плавный пуск, останов, синхронное торможение), тем самым обеспечивает бесперебойное и безопасное транспортирование конвейерным комплексом отбитой горной массы от забоев до бункеров дробленой руды.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев В.Н., Дьяков В.А., Пухов Ю.С. Транспортные машины для подземных разработок. - М.: Недра, 1984. - 383 с.
2. Полунин В.Т., Гуленко Г.Н. Эксплуатация мощных конвейеров. - М.: Недра, 1986. - 344 с.
3. Малиновский А.К. Автоматизированный электропривод машин и установок шахт и рудников. - М.: Недра, 1987. - 277 с.
4. Ткачев В.В. и др. Компьютерная система автоматизированного управления конвейерным транспортом (статья) / Горный журнал №6, 1999 г., С. 48-50.
5. АСУ ТП конвейерным транспортом на горизонте-190 м. Т1. – Екатеринбург: НПО «УГГГА», 2005. – 65 с.
6. Галкин В.И., Дмитриев В.Г., Дьяченко В.П., Запенин И.В., Шешко Е.Е. Современная теория ленточных конвейеров горных предприятий. – М.: МГУ, 2005. – 543 с.

7. Белов М.П., Новиков В.А., Рассудов Л.Н. Автоматизированный электропривод типовых производственных механизмов и технологических комплексов. – М.: Академия, 2004. – 576 с.

8. Акпанбетов Д.Б. Энергосберегающий многодвигательный асинхронный электропривод ленточного конвейера: Автореф. дис. канд. техн. наук. – Алматы, 2010. – 16 с.

### **Түйіндеме**

*Мақалада «Жомарт» кенішінің конвейер кешенінің автоматтандырылған басқару жүйесінің орындау функциясы мен мақсаттары көрсетіліп, электр қозғалтқыштары синхронды айналатын көпқозғалтқышты асинхронды электр жетекті құрылып зерттелді. Модельдеу нәтижелері көрсеткендей, құрастырылған көпқозғалтқышты асинхронды электр жетек әр түрлі жұмыс істеу режимдерінде электр қозғалтқыштардың беріктік синхронды жұмысын қамтамасыз етеді. Соның нәтижелері конвейер кешенімен үзгізген тау массаларын үздіксіз және қауіпсіз тасымалдауға мүмкіндік береді.*

### **Resume**

*In article function of work and the purpose of the automated control system are considered by a conveyor complex of mine "Zhomart", the three-impellent asynchronous electric drive of synchronous rotation of the tape conveyor is developed and researched. As have shown results of the modelling, the developed multiimpellent asynchronous electric drive provides reliable synchronous work of electric motors in various operating modes, thereby provides uninterrupted and safe transportation by a conveyor complex of the beaten off mountain weight from faces to bunkers broken ores.*

УДК 681-5

## **НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕОДНОРОДНОГО МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД ВОКРУГ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ВЫРАБОТКИ ГЛУБОКОГО ЗАЛОЖЕНИЯ**

**Е. Аринов, Ж.Е. Сарсенбаев**

*Жезказганский университет им. О.А. Байконурова, г. Жезказган*

Предполагается, что рассматриваемая выработка проведена в неоднородном изотропном массиве на достаточно большой глубине  $H$

(рис.1); вокруг выработки образуется полностью охватывающая ее зона пластических деформаций, в которой имеет место условие предельного состояния в виде условия Кулона-Мора:

$$\sigma_{\theta} - \alpha_1 \sigma_r = \beta K(\rho_0, \rho), \quad (1)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad \alpha_2 = \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad (\alpha_2 = \alpha_1 - 1), \quad \beta = \frac{2 \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}.$$

Здесь  $\varphi$  – угол внутреннего трения,  $K(\rho_0, \rho)$  – переменный коэффициент сцепления пород массива.

Для определения напряженно-деформированного состояния неоднородного массива горных пород вокруг горизонтальной выработки используется упругопластический модель, согласно которой рассматриваемый массив моделируется невесомой плоскостью с круговым отверстием (рис. 2); при этом на бесконечности действует сжимающие усилия  $\gamma H$ , то есть напряженное состояние нетронутого массива принимается гидростатическим, а по контуру отверстия действует равномерное давление  $P$  (реакция крепи).

Неоднородность механических характеристик массива в области упругих деформаций моделируется переменным модулем упругости пород, предоставленным в виде обобщенного ряда Лорана:

$$E(\rho) = E_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^n e_i \rho^{-i} \right), \quad (2)$$

где  $E_0$  – значение модуля упругости массива на бесконечности (в нетронутом массиве).

Задача решается в безразмерных полярных координатах  $\rho$ ,  $\theta$  (все величины с размерностью длины отнесены к радиусу выработки,

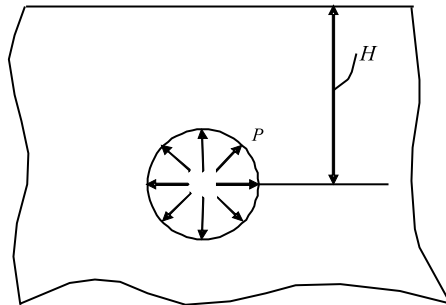


Рисунок 1

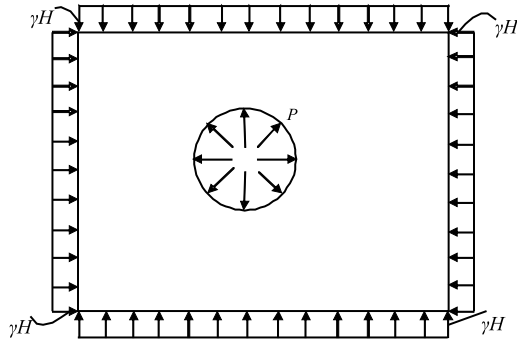


рисунок 2

следовательно радиус выработки  $\rho=1$ ). Таким образом,  $\rho$  есть безразмерная радиальная координата произвольной точки массива.

Неоднородность механических характеристик массива в зоне неупругих деформаций моделируется переменным коэффициентом сцепления пород, выраженным в наиболее общем виде:

$$K = K(\rho_0, \rho), \quad (3)$$

то есть в виде произвольной функции от радиальной координаты и от безразмерного радиуса зоны неупругих деформаций.

Угол внутреннего трения  $\varphi$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  горных пород, согласно данным [2], приняты постоянными.

Для определения напряженно-деформированного состояния в области неупругих деформаций используется уравнение равновесия (вместе с условием (1):

$$\frac{\partial \sigma_{\rho}^0}{\partial \rho} + \frac{\sigma_{\rho}^0 - \sigma_{\theta}^0}{\rho} = 0, \quad (4)$$

где  $\sigma_{\rho}^0$  и  $\sigma_{\theta}^0$  – основные компоненты напряжений, которые для рассматриваемого случая осесимметричного равновесия изотропных тел зависят только от одной радиальной координаты.

Совместные решения уравнений (1) и (4) позволяет определить  $\sigma_{\rho}^0$  и  $\sigma_{\theta}^0$  в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{[\rho]}^0 &= \beta S_1(\rho_0, \rho) + P \rho^{\alpha_2}, \\ \sigma_{[\theta]}^0 &= \beta S_2(\rho_0, \rho) + \alpha_1 P \rho^{\alpha_2}, \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь квадратные скобки у индексов означают, что указанная величина относится к пластической зоне; для определения постоянного интегрирования решений (5) использовано первое условие (6) из граничных условий:

$$\sigma_p^0 = P \text{ при } \rho=1; \quad (6)$$

$$\sigma_0^0 = \gamma H \text{ при } \rho = \infty. \quad (7)$$

При этом, специальные функции  $S_1(\rho, \rho_0)$  и  $S_2(\rho, \rho_0)$  найдены следующими образами:

$$S_1(\rho_0, \rho) = \rho^{\alpha_2} \int_1^{\rho} K(\rho_0, \rho) \rho^{-\alpha_2-1} d\rho$$

$$S_2(\rho_0, \rho) = \alpha_1 \rho^{\alpha_2} \int_1^{\rho} K(\rho_0, \rho) \rho^{-\alpha_2-1} d\rho + K(\rho_0, \rho). \quad (8)$$

Заметим, что

$$S_1(\rho_0, 1) = 0, \quad S_2(\rho_0, 1) = K(\rho_0, 1).$$

В рассматриваемом случае (осесимметричного равновесия однородного массива вокруг выработки) имеется только один компонент перемещения  $u_p^0$ , зависящий от  $\rho$  ( $u_p^0 = 0$ ). Для определения  $u_p^0$  в зоне упругих деформации используется соотношение деформационной теории пластичности и соотношения Коши. Согласно положению деформационной теории компоненты деформации определяются следующими образами:

$$\varepsilon_{[p]}^0 = \lambda_0 \frac{\partial \Phi(\sigma_p^0, \sigma_0^0)}{\partial \sigma_p^0},$$

$$\varepsilon_{[0]}^0 = \lambda_0 \frac{\partial \Phi(\sigma_p^0, \sigma_0^0)}{\partial \sigma_0^0} \quad (9)$$

Здесь

$$\Phi(\sigma_p^0, \sigma_0^0) = \sigma_0^0 - \alpha_1 \sigma_p^0 - \beta K(\rho_0, \rho), \quad (10)$$

пластический потенциал, которого принимаем в виде условия (1). Заметим, что для случая осесимметричного равновесия  $\gamma_{[p]}^0 = 0$ ,  $\tau_{[p]}^0 = 0$ . Из выражений (9) и (10) следует, что

$$\alpha_1 \varepsilon_{[p]}^0 + \varepsilon_{[0]}^0 = 0. \quad (11)$$

Соотношение Коши имеет следующий вид:

$$\varepsilon_{[p]}^0 = \frac{du_{[p]}^0}{d\rho},$$



$$\varepsilon_{[\rho]}^0 = \frac{u_{[\rho]}^0}{\rho}. \quad (12)$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение, позволяющее найти  $u_{[\rho]}^0$ :

$$\frac{du_{[\rho]}^0}{d\rho} + \frac{\alpha_1}{\rho} u_{[\rho]}^0 = 0. \quad (13)$$

Ее решение имеет вид

$$u_{[\rho]}^0 = C_2 \rho^{-\alpha_1}. \quad (14)$$

Здесь  $C_2$  постоянное интегрирования ( $C_1$  неявно было использовано в случае уравнений (4), где определено, что  $C_1 = P$ ). Таким образом, соотношения (5) и (14) определяют НДС в зоне пластических деформаций ( $1 \leq \rho \leq \rho_0$ ); при этом постоянное  $C_2$  определяется из условия сопряжения при  $\rho = \rho_0$  (граница зоны пластических и упругих деформаций) после определения НДС в зоне упругих деформаций  $\rho > \rho_0$ . Для этой зоны справедливы уравнения равновесия (4), соотношения обобщенного закона Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{[\rho]}^0 &= (2\mu + \lambda) \varepsilon_{(\rho)}^0 + \lambda \varepsilon_{(\theta)}^0, \\ \sigma_{[\theta]}^0 &= (2\mu + \lambda) \varepsilon_{(\theta)}^0 + \lambda \varepsilon_{(\rho)}^0, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} 2\mu &= 2G(\rho) = \frac{E(\rho)}{1+\nu}, \\ \lambda &= \frac{2\nu G(\rho)}{1-2\nu} \end{aligned}$$

переменные коэффициенты Ляме ( $G(\rho)$  – переменный модуль сдвига пород массива), а также соотношения Коши (12):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{[\rho]}^0 &= \frac{du_{[\rho]}^0}{d\rho}, \\ \varepsilon_{[\theta]}^0 &= \frac{u_{[\rho]}^0}{\rho}. \end{aligned}$$

Круглые скобки при индексах означают, что указанные компоненты относятся к упругой зоне.

Подставляя  $\varepsilon_{(\theta)}^0$  и  $\varepsilon_{(\rho)}^0$  в соотношения (15), можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned}\sigma_{(\rho)}^0 &= \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot E(\rho) \cdot \left( \frac{du_{(\rho)}^0}{d\rho} + \nu_1 \frac{u_{(\rho)}^0}{\rho} \right), \\ \sigma_{(\theta)}^0 &= \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot E(\rho) \cdot \left( \nu_1 \frac{du_{(\rho)}^0}{d\rho} + \frac{u_{(\rho)}^0}{\rho} \right), \\ \sigma_{(\theta)}^0 - \sigma_{(\rho)}^0 &= \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot E(\rho) \cdot (1-\nu_1) \left( \frac{du_{(\rho)}^0}{d\rho} + \frac{u_{(\rho)}^0}{\rho} \right),\end{aligned}\quad (16)$$

где  $\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$ .

Используя найденные зависимости, из уравнения равновесия (4) получим дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами, позволяющее определить  $u_{(\rho)}^0$ :

$$E(\rho) \frac{d^2 u_{(\rho)}^0}{d\rho^2} + \left[ \frac{dE(\rho)}{d\rho} + \frac{E(\rho)}{d\rho} \right] \frac{d^2 u_{(\rho)}^0}{d\rho^2} + \left[ \frac{\nu_1}{\rho} \frac{dE(\rho)}{d\rho} - \frac{E(\rho)}{\rho^2} \right] u_{(\rho)}^0 = 0. \quad (17)$$

При этом переменная модуль упругости определяется согласно (2). Тогда

$$\frac{dE(\rho)}{d\rho} = -E_0 \cdot \sum_{i=1}^n i e_i \rho^{-i-1}.$$

Подставляя значения  $E(\rho)$  и  $\frac{dE(\rho)}{d\rho}$  в (17), найдем уравнение, определяющее перемещение  $u_{(\rho)}^0$  в следующем виде:

$$\frac{d^2 u_{(\rho)}^0}{d\rho^2} \cdot \sum_{i=0}^n i e_i \rho^{-i} + \frac{du_{(\rho)}^0}{d\rho} \cdot \sum_{i=0}^n (1-i) e_i \rho^{-i-1} - u_{(\rho)}^0 \cdot \sum_{i=0}^n (1-i\nu_1) e_i \rho^{-i-2} = 0. \quad (18)$$

Здесь принято, что  $e_0 = 1$  и соотношение (2) записано в другом виде:

$$E(\rho) = E_0 \sum_{i=0}^n e_i \rho^{-i}.$$

Решение (18) ищем в виде обобщенного ряда:

$$u_{(\rho)}^0 = \sum_{k=0}^n u_k \rho^{-k+\lambda}. \quad (19)$$

Отсюда

$$\frac{du_{(\rho)}^0}{d\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - k) u_k \rho^{-k+\lambda-1},$$

$$\frac{d^2 u_{(\rho)}^0}{d\rho^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - k)(\lambda - k - 1) u_k \rho^{-k+\lambda-2}.$$

В результате (18) с учетом (19) примет такой вид:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n [(\lambda - k)(\lambda - k - i) - i\nu_1 - 1] e_i u_k \rho^{-i-k} = 0. \quad (20)$$

Объединим одинаковые члены относительно каждой степени  $\rho^{-i-k}$ . Для этой цели обозначим:  $j = i + k$ ; отсюда  $k = j - i$ .

Пределы изменения  $j$  определяются следующим образом:

$$j_{\min} = 0 \text{ при } i = i_{\min} = 0, k = k_{\min} = 0;$$

$$j_{\max} = \infty \text{ при } i = i_{\max} = n, k = k_{\max} = \infty;$$

Тогда (20) принимает следующий вид:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n [(\lambda - j + i)(\lambda - j) - v_1 - 1] e_i u_{j-i} \rho^{-j} = 0. \quad (21)$$

В этом случае для выполнения равенства необходимо и достаточно, что любой член при каждой степени  $\rho^{-j}$  должен быть равен нулю:

$$\sum_{i=0}^n [(\lambda - j + i)(\lambda - j) - v_1 - 1] e_i u_{j-i} = 0. \quad (22)$$

Здесь  $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ , согласно (19) имеем, что

$$j - i \geq 0, \text{ то есть } i \leq j. \quad (23)$$

Если  $j = 0$ , то  $i = 0$  и из (22) остается единственный член:

$$[\lambda^2 - 1] e_0 u_0 = 0,$$

отсюда

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= 1, \\ \lambda_3 &= -1, \\ \lambda_4 &= 1 \end{aligned} \quad (24)$$

Обозначение индексов  $l$  через 3 и 4 обусловлено дальнейшим удобством в записи. Далее (22) перепишем в таком виде:

$$j(j - 2\lambda) u_j = - \sum_{i=1}^n [i(j - 2\lambda) + i(\lambda - j - v_1)] e_i u_{j-i}, \quad (25)$$

то есть слагаемую при  $i = 0$  записали отдельно. Соотношение (25) может быть справедливым только при значениях параметра  $\lambda = \lambda_3 = -1$  и  $\lambda = \lambda_4 = 1$ . Дальнейшее исследование (25) показывает, что при  $\lambda = 1$  из (25) вытекает, что  $e_2 = \frac{1}{2}(1 + v_1) e_1^2$ , в частности  $e_1 = e_2 = 0$ . В дальнейшем будем принимать, что решение уравнения (18) в виде (19) возможно только в случае  $e_1 = e_2 = 0$ . Тогда

$$u_j = - \frac{1}{j(j - 2\lambda)} = - \sum_{i=1}^n [i(j - 2\lambda) + i(\lambda - j - v_1)] e_i u_{j-i}. \quad (26)$$

Получена рекуррентная формула для коэффициента  $u_j$ , позволяющая определить  $j$ -член через предыдущие  $n$ -члены  $u_{j-1}, u_{j-2}, \dots, u_{j-n}$ , при этом заметим, что некоторые из этих членов могут быть равны и нулю, так как  $u_{j-i} = 0$ , если  $j < i$ . Любой член  $u_j$  тогда может быть представлен в виде  $u_j = f_j(\lambda_\alpha, e_i) \cdot u_0$ . При этом в зависимости от значения  $l$  могут быть получены два независимые решения (18) при  $\lambda = \lambda_3 = -1$  и  $\lambda = \lambda_4 = 1$ :

$$u_j^{(3)} = f_j(\lambda_3, e_i) \cdot u_0^{(3)}$$

$$u_j^{(4)} = f_j(\lambda_4, e_i) \cdot u_0^{(4)}$$

Следовательно, каждой из решений

$$u_{(\rho)}^0 = u^{(3)} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(3)} \rho^{-k+\lambda_3}$$

$$u_{(\rho)}^0 = u^{(4)} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(4)} \rho^{-k+\lambda_4}$$

также будет удовлетворять уравнению (18). Удовлетворяет эту уравнению и их комбинация в виде

$$u_{(\rho)}^0 = C_3 u^{(3)} + C_4 u^{(4)} \quad (27)$$

Здесь  $C_3 = u_0^{(3)}$ ,  $C_4 = u_0^{(4)}$  постоянные интегрирования дифференциального уравнения второго порядка (18). В этом случае (26) определяет безразмерные коэффициенты  $\frac{u_j}{u_0}$  и решение (26) примет следующий вид:

$$u_k^{(\alpha)} = -\frac{1}{k(k-2\lambda_\alpha)} \cdot \sum_{i=3}^n [k(k-2\lambda_\alpha) + i(\lambda_\alpha - k - v_1)] e_i u_{k-i}^{(\alpha)} \quad (28)$$

где  $\lambda_3 = -1$ ,  $\lambda_4 = 1$ ,  $\alpha = 3$  и  $4$ ;  $u_1^{(\alpha)} = u_2^{(\alpha)} = 0$  и также  $u_k^{(\alpha)} = 0$  ( $k = 3, 4, 5, \dots$ ). При этом

$$u^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(\alpha)} \rho^{-k+\lambda_\alpha} \quad (29)$$

При  $k \rightarrow \infty$  имеем предельную формулу:

$$u_k^{(\alpha)} = -\sum_{i=1}^n e_i u_{k-i}^{(\alpha)} \quad (30)$$

так, как

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{i(\lambda_\alpha - k - v_1)}{k(k-2\lambda_\alpha)} = 0$$

Сходимость ряда, определяемая через формулу (28) совпадает со сходимостью ряда, определяемой через (30). Исследование сходимости ряда,

определяемой через рекуррентное соотношение (30) показывает, то полученный ряд в основном знакопеременный и условие его абсолютной сходимости имеет такой вид [1]:

$$\sum_{i=1}^n |e_i| < 1. \tag{31}$$

Исследование на компьютере показало, что исследуемый ряд всегда расходится, если выполняется условие

$$\sum_{i=1}^n e_i \geq 1. \tag{32}$$

При этом коэффициенты  $e_i$  могут быть как и положительными, так и отрицательными. При выполнении условия (30) ряд всегда сходится, а при невыполнении условия (31) исследуемый ряд может и сходиться, а может и не сходиться в зависимости от знания коэффициентов  $e_i$  (интересно отметить, что нам не удалось найти сходящийся ряд при значениях коэффициента  $e_i \geq 2$ ).

При  $\lambda = \lambda_3 = -1$  формула (28) принимает следующий вид:

$$u_k^{(3)} = -\frac{1}{k(k+2)} \cdot \sum_{i=3}^n [k(k+2) + i(-1-k-v_1)] e_i u_{k-i}^{(3)}, \tag{33}$$

и полученный ряд запишется таким образом:

$$u_k^{(3)} = \rho^{-1} - \frac{1}{5}(1-v_1)e_3 \cdot \rho^{-4} - \frac{1}{6}(1-v_1)e_4 \cdot \rho^{-5} - \frac{1}{7}(1-v_1)e_5 \cdot \rho^{-6} - \dots$$

Аналогично при  $\lambda = \lambda_4 = 1$

$$u_k^{(4)} = -\frac{1}{k(k-2)} \cdot \sum_{i=3}^n [k(k-2) - i(-1+k+v_1)] e_i u_{k-i}^{(4)}, \tag{34}$$

и

$$u_k^{(4)} = \rho + (1+v_1)e_3 \cdot \rho^{-2} + \frac{1}{2}(1+v_1)e_4 \cdot \rho^{-3} + \frac{1}{3}(1+v_1)e_5 \cdot \rho^{-4} + \dots$$

Отсюда видно, то

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} u^{(4)} = \infty$$

При  $e_1 = e_2 = e_3 = \dots = e_n = 0$  получается классический случай (невесомая однородная упругая плоскость, ослабленная круговым отверстием):

$$u^{(3)} = \frac{1}{\rho}, \quad u^{(4)} = \rho.$$

Аналогично классическому случаю отбрасываем член  $\rho$  (который соответствует гидростатическому напряжению на бесконечности  $\sigma_{(\rho)}^\infty = \sigma_{(0)}^\infty = \gamma H$ ), считая, что перемещение, соответствующее этому члену произошло до образования круговой отверстия. Следовательно, (27) должна иметь следующий вид:

$$u_{(\rho)}^0 = C_3 u^{(3)} + C_3 (u^{(4)} - \rho). \quad (35)$$

Однако в соотношения обобщенного закона Гука, записанных через

перемещения  $u_{(\rho)}^0$  должен входить бесконечный член  $\rho$ , то есть при определении компонентов напряжении из зависимости (16) мы должны использовать (27):

$$\sigma_{(\rho)}^0 = v_0 E(\rho) \sum_{\alpha=3}^4 C_{\alpha} \left[ \frac{du^{(\alpha)}}{d\rho} + v_1 \frac{u^{(\alpha)}}{\rho} \right],$$

$$\sigma_{(\theta)}^0 = v_0 E(\rho) \sum_{\alpha=3}^4 C_{\alpha} \left[ v_1 \frac{du^{(\alpha)}}{d\rho} + \frac{u^{(\alpha)}}{\rho} \right], \quad (36)$$

где

$$v_0 = \frac{1-v}{(1+v)(1-2v)}. \quad (37)$$

С учетом (29) соотношения (36) примут следующий вид:

$$\sigma_{(\rho)}^0 = v_0 E(\rho) \sum_{\alpha=3}^4 C_{\alpha} \Gamma_3^{(\alpha)}(\rho),$$

$$\sigma_{(\theta)}^0 = v_0 E(\rho) \sum_{\alpha=3}^4 C_{\alpha} \Gamma_4^{(\alpha)}(\rho). \quad (38)$$

Здесь

$$S_3^{(\alpha)}(\rho) = \frac{du^{(\alpha)}}{d\rho} + v_1 \frac{u^{(\alpha)}}{\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_{\alpha} - k + v_1) u_k^{(\alpha)} \cdot \rho^{\lambda_{\alpha} - k - 1},$$

$$S_4^{(\alpha)}(\rho) = v_1 \frac{du^{(\alpha)}}{d\rho} + \frac{u^{(\alpha)}}{\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} [v_1 (\lambda_{\alpha} - k) + 1] u_k^{(\alpha)} \cdot \rho^{\lambda_{\alpha} - k - 1}. \quad (39)$$

Так, как  $\lambda_3 = -1$ , то  $\lambda_3 - k - 1 = -k - 2 < 0$  и

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} S_3^{(3)}(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} S_4^{(3)}(\rho) = 0;$$

Аналогично при  $\lambda_4 = 1$  имеем:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} S_3^{(4)}(\rho) = (1 - 0 + v_1) \cdot u_0^{(4)} \cdot \rho^{1-0-1} = (1 + v_1) \cdot 1 \cdot 1 = 1 + v_1,$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} S_4^{(4)}(\rho) = [v_1(1 - 0) + 1] \cdot u_0^{(4)} \cdot \rho^{1-0-1} = (1 + v_1) \cdot 1 \cdot 1 = 1 + v_1.$$

Здесь использован предел

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^k = \begin{cases} \infty, & \text{нпу } k > 1, \\ 1, & \text{нпу } k = 0, \\ 0, & \text{нпу } k < 0. \end{cases}$$

Следовательно

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sigma_{(\rho)}^0 = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sigma_{(\theta)}^0 = v_0 E_0 C_4 (1 + v_1) = \frac{1-v}{(1+v)(1-2v)} \cdot \left(1 + \frac{v}{1-v}\right) E_0 C_4 = \frac{E_0 C_4}{(1+v)(1-2v)}$$

Граничное условие (7) при  $\rho \rightarrow \infty$  дает:

$$\frac{E_0 C_4}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \gamma H,$$

Отсюда

$$C_4 = \frac{\gamma H(1+\nu)(1-2\nu)}{E_0}, \quad (40)$$

или

$$C_4 = \frac{\gamma H(1-\nu)}{\nu_0 E_0}. \quad (41)$$

Таким образом, неизвестными остались постоянные интегрирования  $C_2$  и  $C_3$ , а также радиус зоны пластических и упругих деформаций  $\rho_0$ , которые определяются из условия сопряжения в границе зоны пластических и упругих деформаций [3]:

$$\begin{aligned} u_{[\rho]}^0 &= u_{(\rho)}^0, \\ \sigma_{[\rho]}^0 &= \sigma_{(\rho)}^0, \\ \sigma_{(0)}^0 - \alpha_1 \sigma_{(\rho)}^0 &= \beta K(\rho_0, \rho) \quad \text{при } \rho = \rho_0. \end{aligned} \quad (42)$$

Подставляя (5), (14), (34) и (38) в условия (42), составим систему трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} C_2 \rho_0^{-\alpha_1} &= C_3 u^{(3)} + C_4 (u^{(4)} - \rho_0), \\ \beta K_1(\rho_0, \rho_0) + P \rho_0^{\alpha_2} &= \nu_0 E(\rho_0) \cdot [C_3 C_3^{(3)}(\rho_0) + C_4 C_3^{(4)}(\rho_0)], \\ \nu_0 E(\rho_0) \cdot [C_3 C_4^{(3)}(\rho_0) + C_4 C_4^{(4)}(\rho_0) - \alpha_1 [C_3 C_3^{(3)}(\rho_0) + C_4 C_3^{(4)}(\rho_0)]] &= \beta K(\rho_0, \rho_0) \quad \text{при } \rho = \rho_0 \end{aligned} \quad (43)$$

Отсюда найдем

$$C_3 = \frac{S_5(\rho_0, \rho) - C_4 S_3^{(4)}(\rho_0)}{S_3^{(3)}(\rho_0)}, \quad (44)$$

где

$$S_5(\rho_0, \rho) = \frac{\beta S_1(\rho_0, \rho) + P \rho^{\alpha_2}}{\nu_0 E(\rho)}, \quad (45)$$

$$C_2 = \rho_0^{-\alpha_1} [C_3 u^{(3)} + C_4 (u^{(4)} - \rho_0)] \quad \text{при } \rho = \rho_0. \quad (46)$$

Последнее уравнение систем (43) дает трансцендентную уравнению, которые определяет неизвестный радиус  $\rho_0$  зоны пластических деформаций:

$$P = \left\{ \frac{1}{\alpha_1 S_3^{(3)}(\rho_0) + S_4^{(3)}(\rho_0)} [H(1-\nu) \nu_0 S_3^{(3)}(\rho_0) S_4^{(4)}(\rho_0) - S_3^{(4)}(\rho_0) S_4^{(3)}(\rho_0) - S_3^{(3)}(\rho_0) \beta K(\rho_0, \rho_0)] - \beta S_1(\rho_0, \rho_0) \right\} \rho_0^{-\alpha_2}. \quad (47)$$

Это уравнение определяет  $\rho_0$  в зависимости от внешних параметров  $\rho$  и  $\gamma H$ , реакцию крепи  $P$  как функцию от радиуса зоны пластических деформаций. Здесь

$$c_0 = \frac{E(\rho_0)}{E_0}. \quad (48)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алимжанов М.Т. Устойчивость равновесия тел и задачи механики горных пород. – Алма-Ата: Наука, 1982. – 272 с.
2. Алимжанов А.М., Киякбаев С.Н. Напряженно-деформированное состояние и устойчивость упругопластического равновесия неоднородного массива вокруг горизонтальной выработки кругового сечения. //ММПТ, 1996. №1. с. 54-56
3. Гордон В.И. Исследование устойчивости упруго-пластического равновесия толстостенных оболочек и полостей в сплошном массиве. //Дисс. ... канд. миз. –мат. н., Алма-Ата. – 1987. – 136 с.

## Түйіндеме

*Контур бойынша бірқалыпты үлестірілген жүктеме, яғни Р тірек реакциясы түсірілген горизонтальды цилиндрлік оңдеумен әлсіретілген, таулықен жыныстарының біртекті емес массивінің кернеулі-деформацияланған күйі зерттеледі. Таужыныстың біртексіз массивінің горизонталь өндірімінің айналасындағы кернеу-деформацияланған күйін анықтау үшін серпімді пластикалық модель қолданылады. Мұнда қарастырылып отырған массив доңгелек саңылауы бар салмақсыз жазық ретінде модельденеді. Бұл жағдайда шексіздікте  $\gamma H$  сығу күші әсер етеді, яғни қол тимеген массивтің кернеу күйі гидростатикалық болып саналады, ал саңылау контурсы бойынша Р (тірек реакциясы) біртекті қысым әсер етеді.*

## Resume

*The deflected mode of heterogeneous massif is studied that was weakened by lateral cylindrical opening, on the contour of which the uniformly distributed load was imposed – the reaction of the support P. For definition of the is intense-deformed condition of a non-uniform file of rocks round horizontal development it is used elastic plastic model according to which the considered file is modelled by a weightless plane with a circular aperture; thus on infinity operates compressing efforts  $\gamma H$ , that is the intense condition of an untouched file is accepted hydrostatic, and on an aperture contour uniform pressure P operates.*



**РЕАЛИЗАЦИЯ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ  
СВЯЗЕЙ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ  
МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ СТУДЕНТОВ  
ПЕДВУЗА ПОСРЕДСТВОМ КОНТЕКСТНЫХ  
ЗАДАЧ С ЦЕЛЮ ФОРМИРОВАНИЯ ИХ  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ**

**В.А. Далингер**

*Омский государственный педагогический университет, г. Омск*

**А.А. Кисабекова**

*Инновационный Евразийский университет, г. Павлодар*

Повышение качества образования является одной из актуальных проблем для всего мирового сообщества. Решение этой проблемы связано с модернизацией содержания образования, оптимизацией способов и технологий организации образовательного процесса, а также переосмыслением цели и результата образования [1].

Сегодня ожидаемый результат профессиональной подготовки – это становление профессиональной компетентности учителя, поскольку уровень профессиональной компетентности определяет качество образования. В условиях современного образования одним из важных является вопрос о том, как в рамках высшего учебного заведения обеспечить качественную подготовку профессионально компетентных специалистов.

Необходим поиск новых путей повышения эффективности учебного процесса, направленного на повышение уровня математической подготовки студентов физических специальностей педагогических вузов, которое есть одна из составляющих профессиональной компетентности.

Из исследований И.А. Зимней [2], Ю.Г. Татура [3], В.И. Байденко [4], А.В. Хуторского [5] и др. следует, что специалист с высшим образованием должен обладать определенным набором компетенций, характеризующих его как человека и специалиста.

Из статьи И.А. Зимней «Ключевые компетенции – новая парадигма результата образования» [2] следует, что «ЗУН» – существующая долгие годы парадигма результата образования» включает теоретическое обоснование, определение номенклатуры, иерархии знаний, умений и навыков, методик их формирования, контроля и оценки. Однако, происходящие в мире изменения в области целей образования, соотносимые, в частности, с глобальной задачей

обеспечения вхождения человека в социальный мир, его продуктивной адаптации в этом мире, вызывают необходимость в организации такого образования, которое направлено на достижение более полного, лично и социально интегрированного результата. В качестве общей базы определения такого интегрального социально-лично-поведенческого феномена как результата образования в совокупности мотивационно-ценностных, когнитивных составляющих и выступило понятие «компетенция /компетентность».

*Компетенция*, в переводе с латинского, – это круг вопросов, в которых человек хорошо осведомлен, обладает познаниями и опытом; *компетенция* – совокупность взаимосвязанных качеств личности (знаний, умений, навыков, способов деятельности), задаваемых по отношению к определённому кругу предметов и процессов и необходимых, чтобы качественно и продуктивно действовать по отношению к ним.

*Компетентность* – владение, обладание человеком соответствующей компетенцией, включающей его личностное отношение к ней и предмету деятельности. Компетентный в определенной области человек обладает соответствующими знаниями и способностями, позволяющими ему обоснованно судить об этой области и эффективно действовать в ней. Компетентность проявляется в случае применения знаний и умений при решении задач, отличных от тех, в которых эти знания усваивались.

Итак, особо подчеркнем, что совершенствование процесса подготовки специалистов, в том числе и учителей, предполагает реализацию компетентного подхода к обучению.

Компетентный подход – это совокупность общих принципов определения целей образования, отбора содержания образования, организации образовательного процесса и оценка образовательных результатов. Компетентный подход предполагает формирование ключевых, базовых и специальных компетентностей. Как отмечается, компетентность «имеет деятельностный характер обобщенных умений в сочетании с предметными умениями и знаниями в конкретных областях; компетентность проявляется в умении осуществлять выбор, исходя из адекватной оценки себя в конкретной ситуации» [6, с. 9]. Компетентность – это способность действовать в ситуации неопределенности.

Повышение уровня образованности выпускников вузов должно заключаться в:

- расширении круга проблем, которые способен решать выпускник;
- повышении сложности проблем, которые готов решать выпускник;
- расширении арсенала средств, способов деятельности, методов, обеспечивающих возможность выбора эффективного инструментария для решения проблем.

А.В. Хуторской [5] предлагает трехуровневую иерархию компетенций:

– ключевые – относятся к общему (метапредметному) содержанию образования;

– общепредметные – относятся к определенному кругу учебных предметов и образовательных областей;

– предметные – частные по отношению к двум предыдущим уровням компетенции, имеющие конкретные описания и возможность формирования в рамках учебных предметов.

Предметные компетенции – это специфические способности, необходимые для эффективного выполнения конкретного действия в конкретной предметной области и включающие узкоспециальные знания, особого рода предметные умения, навыки, способы мышления. Например, **математическая компетенция** – это «способность структурировать данные (ситуацию), вычленять математические отношения, создавать математическую модель ситуации, анализировать и преобразовывать ее, интерпретировать полученные результаты» [7, с. 20].

В журнале «Математика в школе» № 6, 2008 г. опубликована интересная, содержательная статья Л.О. Денищевой, Ю.А. Глазкова, К.А. Краснянской «Проверка компетентности выпускников средней школы при оценке образовательных достижений по математике» [7]. Скорее всего это первая методическая публикация, в которой речь идёт о дидактическом инструментарии проверки предметной (математической) компетентности.

В настоящее время в международных исследованиях общепринято выделять три уровня математической компетентности: уровень воспроизведения, уровень установления связей, уровень рассуждений [7].

*Первый уровень* – это прямое применение в знакомой ситуации известных фактов, стандартных приемов, распознавание математических объектов и свойств, выполнение стандартных процедур, применение известных алгоритмов и технических навыков, работа со стандартными, знакомыми выражениями и формулами, непосредственное выполнение вычислений.

*Второй уровень* строится на репродуктивной деятельности по решению задач, которые, хотя и не являются типичными, но все же знакомы учащимся или выходят за рамки известного лишь в очень малой степени. Содержание задачи подсказывает, материал какого раздела математики надо использовать и какие известные методы применять. Обычно в таких задачах присутствует больше требований к интерпретации решения, они предполагают установление связей между разными представлениями ситуации, описанной в задаче, или установление связей между данными в условии задачи.

*Третий уровень* строится как развитие предыдущего уровня. Для решения задач этого уровня требуется определенная интуиция, размышления

и творчество в выборе математического инструментария, интегрирование знаний из разных разделов курса математики, самостоятельная разработка алгоритма действий. Задания, как правило, включают больше данных, от учащихся часто требуется найти закономерность, провести обобщение и объяснить или обосновать полученные результаты.

В настоящее время выделяют следующие цели обучения математике в педвузе:

- повышение уровня математической культуры;
- развитие общих интеллектуальных способностей и профессионально значимых приемов умственной деятельности;
- освоение студентами математического аппарата, позволяющего моделировать, анализировать и решать теоретические и профессиональные практические задачи;
- формирование навыков самообразования в области математики и ее приложений и воспитание потребности в совершенствовании знаний.

Важную роль в повышении научного уровня преподавания играет совершенствование содержания учебных дисциплин, которое невозможно без взаимосвязи знаний, умений и навыков, приобретаемыми студентами в процессе изучения различных дисциплин, т.е. осуществление интеграции базовых и специальных знаний, а также организация интегрированного обучения математике в вузе должна проводиться на одном из трех уровней: уровне целостности, дидактического синтеза или межпредметных связей. Мы остановили свой выбор на реализации интеграции курсов математического анализа и физики на уровне межпредметных связей и сделали мы это сознательно, ибо другие уровни предполагают создание единого курса, но согласно государственным стандартам подготовки учителя названные дисциплины стоят обособленно.

Педагогические закономерности реализации межпредметных связей в обучении нашли отражение в исследованиях В.А. Далингера [8, 9, 10], И.Д. Зверева [11], В.Н. Максимовой [12], В.Н. Монахова [13] и других авторов.

Важная роль в формировании профессиональной компетентности отведена решению контекстных задач (или практико-ориентированных, или задач с практическим содержанием). Обучение математике посредством решения контекстных задач, связанных с профессиональной направленностью математического образования, обеспечивает эффективность подготовки будущих специалистов в высших учебных заведениях. Решение таких задач выразительно демонстрирует практическую ценность математических знаний. Математические знания превращаются в инструмент, который востребован при решении задач специальных и профессиональных дисциплин.

Понятие «контекстные задачи» появилось в связи с появлением технологии контекстного обучения, суть которой поясним ниже.

Долгое время система образования была ориентирована в основном на усвоение и ретрансляцию обучающимися имеющихся знаний и известных достижений, что вело к поддержанию, но не к развитию общества.

На рубеже XXI века в образовании обозначилось основное направление её модернизации - приоритет личностного образования и самореализации обучающихся, что ведет к конструированию будущего, а не только усвоению опыта прошлого.

Традиционные технологии, ориентированные на передачу обучающему первоначально отчужденного от него «ничейного» знания, вступали в противоречие с необходимостью воспитать личность, способной самостоятельно решать проблемы, действовать продуктивно, опираясь на свой индивидуальный потенциал.

Стали разрабатываться и внедряться технологии обучения, которые позволяют обеспечивать обучающихся не только знаниями, умениями и навыками, но и личностно значимыми качествами.

Глубинной причиной возникновения таких технологий является неэффективность отечественного образования, которая проявляется в отсутствие результатов, значимых вне самой системы образования, в замкнутости системы.

Такой технологией, обеспечивающей достижение результатов, значимых вне самой системы образования, является технология контекстного подхода, разработанная А. А. Вербицким [14, 15, 16]. «Контекстным является также обучение, в котором на языке наук и с помощью всей системы форм, методов и средств обучения последовательно моделируется предметное и социальное содержание будущей профессиональной деятельности обучающихся» [15, с. 43].

В содержании образования выделяют следующие виды контекстов:

- социокультурный;
- контекст научного знания;
- контекст учебного предмета;
- дидактический;
- контекст личностной значимости содержания образования.

Методисты считают, что контекстное обучение, обеспечивая постепенный переход к профессиональному обучению нового типа, тесно взаимосвязано с компетентностным подходом. Методическими компонентами, реализуемых в контекстном обучении, могут быть:

- задания, требующие использования дополнительной информации;
- задания на составление текстов разных видов;
- задания на подбор количественных данных из сфер деятельности человека;
- разработка внеаудиторных мероприятий для школьников;
- разработка дидактических материалов для проведения уроков математики;

- составление системы упражнений, серий задач, контрольных мероприятий разного назначения и т. д.

А. А. Вербицкий и О. Г. Ларионова [16] считают, что в числе действий обучающихся при выполнении таких заданий будут:

- освоение способов целенаправленного поиска информации;
- составление текстов различного предназначения;
- составление собственного банка специальной информации;
- проведение аналитических обзоров информации;
- подбор информации;
- пополнение собственного банка дидактических материалов (на разных носителях: бумажных, электронных).

Контексты должны направлять деятельность учащихся на осмысление реальной жизненной ситуации, описание которой одновременно отражает не только какую-либо практическую проблему, но и актуализирует определенный комплекс знаний, подлежащий усвоению при решении данной проблемы.

Приведем примеры контекстных задач, которые направлены на интеграцию математики с физическими дисциплинами. Достаточное число таких задач приведено в наших работах [17, 18].

1. Тело брошено под некотором углом к горизонту (сопротивлением воздуха пренебрегаем). При какой величине угла дальность полета максимальна? Заметаемая площадь максимальна?

2. Два автомобиля движутся по взаимно перпендикулярным прямолинейным шоссе со скоростями соответственно 10 и 5 метров в секунду. Когда расстояние между ними окажется наименьшим, если в начале движения они находились от перекрестка на расстоянии 70 м и 50 м соответственно?

3. Две моторные лодки, имеющие одинаковые скорости в стоячей воде, проходят по двум рекам одинаковое расстояние и возвращаются обратно. В какой реке на это движение потребуется больше времени: в реке с быстрым течением или в реке с медленным течением?

4. Два источника света расположены в 30 м друг от друга. На прямой, соединяющей их, найти наименее освещенную точку, если силы источников относятся как 27:8.

5. Имеется гальванический элемент, внутреннее сопротивление которого  $r$ . При каком внешнем сопротивлении  $R$  мощность тока, получаемого от этого элемента во внешней цепи, будет наибольшей?

Контекстные задачи, являющиеся составным компонентом контекстного обучения обеспечивают адекватную требованиям времени подготовку студентов к профессиональной деятельности. Они создают условия для трансформации учебно-познавательной деятельности студентов в квазипрофессиональную.

Наш опыт и опыт других коллег свидетельствует о целесообразности интеграции математического анализа и физических дисциплин на основе контекстных задач, реализующих межпредметные связи, так как это способствует формированию профессиональной компетентности, а, значит, обеспечивает качественную подготовку будущих учителей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Компетентностный подход. – СПб: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2005. – 12 с.
2. Зимняя И.А. Ключевые компетенции – новая парадигма результата образования // Высшее образование сегодня. – № 5. – 2003. – С. 34 – 42.
3. Татур Ю.Г. Компетентностный подход в описании результатов и проектировании стандартов высшего профессионального образования. Авторская версия. – М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2004. – 16 с.
4. Байденко В.И. Компетентностный подход к проектированию государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования (методологические и методические вопросы): Методическое пособие. Изд. 2-е. – М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2005. – 114 с.
5. Хуторской А.В. Ключевые компетенции как компонент личностно-ориентированной парадигмы образования // Народное образование. – № 2. – 2003. – С. 58 – 63.
6. Компетентностный подход в педагогическом образовании: Коллективная монография / Под ред. проф. В.А. Козырева, проф. Н.Ф. Радоновой, проф. А.П. Тряпицыной. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2005. – 391 с.
7. Денищева Л.О., Глазков Ю.А., Краснянская К.А. Проверка компетентности выпускников средней школы при оценке образовательных достижений по математике // Математика в школе. – № 6. – 2008. – С. 19 – 30.
8. Далингер В.А. Компетентностный подход – альтернатива экстенсивному пути развития системы образования: Материалы международной научной конференции «Инновационные технологии в высшем и профессиональном образовании», Испания (Коста Брава), 18 – 25 июля 2007 года // Фундаментальные исследования. №10. – 2007. – М.: Изд-во «Академия Естествознания». – С. 46 – 47.
9. Далингер В.А. Особенности целеполагания в образовании в условиях компетентностного подхода // Материалы II научно-практической конференции «Проблемы и перспективы развития математического и экономического образования». – Омск: Полиграфический центр КАН, 2008. – С. 5 – 8.



10. Далингер В.А. Совершенствование процесса обучения математике на основе целенаправленной реализации внутрипредметных связей. – Омск: Изд-во ОмИПКРО, 1993. – 323 с.
11. Зверев И.Д. К вопросу о системе обучения основам наук // Советская педагогика. – 1970. – № 6. – С. 44 – 56.
12. Максимова В.Н. Межпредметные связи и совершенствование процесса обучения. – М.: Просвещение, 1984. – 143 с.
13. Монахов В.Н. Преподавание математики и экономическая подготовка учащихся ПТУ: Методическое пособие для ПТУ. – М: Высшая школа, 1989. – 102 с.
14. Вербицкий А. А. Контекстное обучение в системе подготовки учителя математики // Высшее образование сегодня. – 2007. – №6. – С. 79–83.
15. Вербицкий А. А. Контексты содержания образования. – М.: РИЦ МГОПУ им. М. А. Шолохова, 2003 – 80 с.
16. Вербицкий А. А. Новая образовательная парадигма и контекстное обучение: Монография. – М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 1999. – 75 с.
17. Далингер В.А., Симонженков С.Д. Сборник прикладных задач на экстремум: учебное пособие для учащихся школ и классов математического профиля. – Омск: ООО ИПЦ «Сфера», 2007. – 60 с.
18. Туяков Е.А., Кисабекова А.А. Контекстные задачи интегрирующие курсы математического анализа и физики: учебное пособие. – Павлодар: Изд-во ПГПИ, 2010. – 60 с.

### **Түйіндеме**

*Мақалада пәнаралық байланысты жазуға асырылатын контекстік есептердің негізінде математикалық талдаудың және физикалық пәндердің интеграцияның мақсаттылығы көрсетілген. Бұл болашақтағы мұғалімдердің кәсіби құзыреттілігінің қалыптастырып, сонымен қатар сапалы дайындауға қамтамасыз етеді.*

### **Resume**

*In the article is shown an appropriateness of mathematical analysis integration and physical discipline on the basis of contextual tasks realizing subject interaction that promotes for forming of professional competence and as a result it provide future teachers with qualitative training.*



## ИССЛЕДОВАНИЕ ДАВЛЕНИЯ КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЙ ВОДОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

### З.С. Мажит

*Павлодарский государственный педагогический институт*

Плазма представляет собой квазинейтральную систему заряженных и нейтральных частиц. Физические параметры плазмы – степень ионизации, свободная энергия, давление, среднее межчастичное расстояние, радиус Дебая и др. – взаимосвязаны [1]. Квантовые эффекты дифракции способствуют ослаблению взаимодействий частиц и снижению степени ионизации плазмы [2]. Важнейшая практическая задача – определение давления квазиклассической плазмы в зависимости от параметров. Основным методом исследования является применение квазиклассического подхода в описании плазмы в приближении парных корреляций в рамках псевдопотенциальной модели [1].

Состояние плазмы описывается с помощью безразмерных параметров плотности  $\Gamma_s$  и связи  $\Gamma$ :  $\Gamma_s = a/a_B$ , где  $a$  – среднее расстояние между частицами,  $a_B$  – Боровский радиус;  $\Gamma = \frac{e^2}{ak_B T}$ ,  $e$  – заряд электрона,  $T$  – температура плазмы,  $k_B$  – константа Больцмана. Базовые потенциалы взаимодействия частиц (микрopotенциалы) записываются в виде:

$$\varphi_{pn}(r) = -\varphi_{en}(r) = e^2 \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{a_B} \right) \exp \left( -\frac{2r}{a_B} \right), \quad (1)$$

$$\varphi_{ee}(r) = \frac{e^2}{r} \left( 1 - \ell \frac{r}{\lambda_{ce}} \right), \quad \varphi_{pp}(r) = -\frac{e^2}{r} \left( 1 - \ell \frac{r}{\lambda_{cp}} \right), \quad (2)$$

$$\varphi_{pp}(r) = \frac{e^2}{r} \left( 1 - \ell \frac{r}{\lambda_{pp}} \right), \quad \varphi_{nn}(r) = \frac{e^2}{r} \ell^{-\sqrt{2}r/a_B}. \quad (3)$$

Здесь  $r$  – расстояние между частицами,  $m_e$  – масса электрона,  $\lambda_{ab} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m_{ab}k_B T}}$  – длина волны де Бройля центра масс пары частиц,  $\hbar$  – постоянная Планка,  $m_{ab}$  – приведенная масса системы частиц « $a$ » и « $b$ » ( $a$  и  $b=e, p, n$ ), индекс « $e$ » соответствует электронам, « $p$ » – протонам, « $n$ » – атомам.

Макрopotенциалы (псевдопотенциалы), учитывающие парные корреляции, определяются из системы уравнений [1, 2]:

$$\Delta_i \Phi_{\alpha\beta}(\alpha r_i, \beta r_j) = \Delta_i \Phi_{\alpha\beta}(\alpha r_i, \beta r_j) - \sum_{\gamma} \frac{n_{\gamma}}{k_B T} \int^{\gamma} dr_k \Delta_i \Phi_{\alpha\gamma}(\alpha r_i, \gamma r_k) \Phi_{\gamma\beta}(\gamma r_k, \beta r_j),$$

где  $D_i$  – оператор Лапласа “ $i$ ”-той частицы,  $\Phi_{\alpha\beta}$  - псевдопотенциал, описывающий коллективные явления в плазме.

Состоянию термодинамического равновесия системы соответствует минимум свободной энергии (потенциала Гельмгольца). Свободная энергия системы определяется как сумма свободной энергии идеального газа и корреляционной энергии  $E$ :

$$E = 2\pi \int_0^{\infty} \sum_{a,b} n_a n_b \Phi_{ab} g_{ab}(r) r^2 dr, \quad (4)$$

где  $j_{ab}(r)$  – потенциал взаимодействия частиц « $a$ » и « $b$ »,  $g_{ab}(r)$  – радиальная функция распределения,  $n_a$  и  $n_b$  – концентрации частиц сорта « $a$ » и « $b$ ». При минимуме свободной энергии системы определяется степень ионизации плазмы. Давление плазмы с учетом радиальной функции распределения далее можно найти по формуле [1]

$$P = P_{id} - \frac{2\pi}{3} \int_0^{\infty} \sum_{a,b} n_a n_b \frac{d\Phi_{ab}(r)}{dr} g_{ab}(r) r^3 dr, \quad (5)$$

где  $P_{id} = (n_e + n_p + n_n) k_B T$  представляет давление идеального газа. Для идеальной, полностью ионизованной плазмы давление максимально:  $P = P_{max} = 2n_p k_B T$ .

Радиальная функция распределения определяется статистической суммой, которая записывается либо в форме Планка-Ларкина, либо как усеченная атомная статистическая сумма [1].

На рисунке 1 приведена полученная описанным выше способом зависимость степени ионизации  $\alpha$  от параметров плазмы  $\Gamma_s$  и  $\Gamma$ .

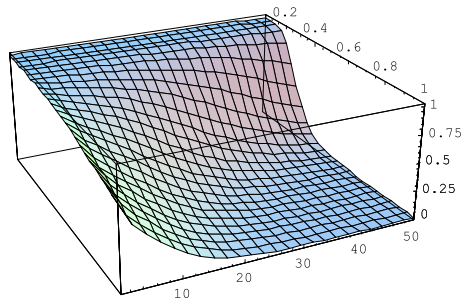


Рисунок 1 - Зависимость степени ионизации  $\alpha$  от параметров плотности  $\Gamma_s$  и связи  $\Gamma$  для квазиклассической водородной плазмы

При высоких значениях параметра связи  $\Gamma$  (сильно связанная плазма) и параметра плотности  $r_s$  (разреженная плазма) степень ионизации стремится к нулю, т.е. для квазиклассической плазмы средней плотности (повышение значения  $r_s$  соответствует увеличению расстояния между частицами плазмы, соответственно – уменьшению плотности) при определенной температуре (рост  $\Gamma$  означает, с одной стороны, понижение температуры, а с другой – уменьшение расстояния между частицами) давление стремится к величине, равной половине максимального давления  $1/2P_{\max}$ . Поскольку максимальное давление в относительных единицах ( $P_{\max}/P_{id}$ ) равно 2, то давление стремится к давлению идеального газа и определяется лишь давлением нейтральной компоненты. На рис.2 очевидно стремление давления к пределу  $1/2P_{\max}$ , что реально объясняется устремлением степени ионизации  $\alpha$  к нулю при высоких значениях  $r_s$  и  $\Gamma$  (рис. 1).

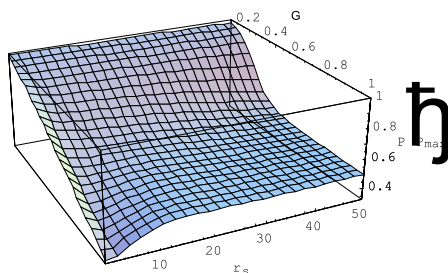


Рисунок 2 - Давление квазиклассической водородной плазмы в зависимости от параметров плотности  $r_s$  и связи  $\Gamma$ . Использована статистическая сумма в форме Планка-Ларкина

Из рис.3 следует, что зависимость корреляционной энергии от параметра связи является немонотонной, величина корреляционной энергии максимальна при  $\Gamma \sim 0.4$  в случае  $r_s = 20$ .

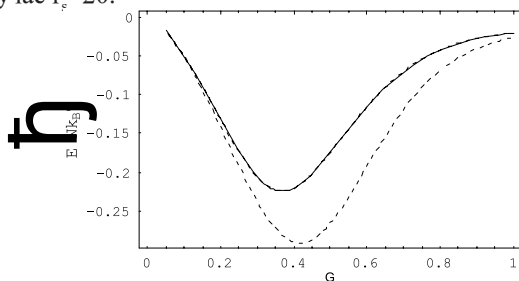


Рисунок 3 - Энергия корреляции частично ионизованной водородной плазмы:  $r_s = 20$ . Сплошная линия – квазиклассическое рассмотрение,

штриховая линия соответствует классической плазме

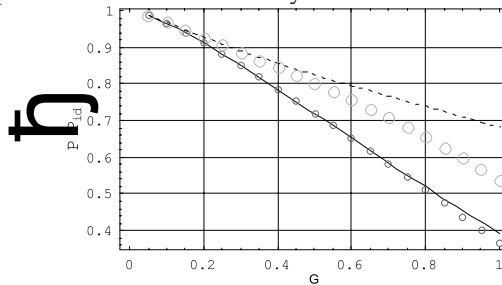


Рисунок 4 - Давление квазиклассической водородной плазмы как функция параметра связи  $\Gamma$  для  $r_s=1$ . статистическая сумма в форме Планка-Ларкина: сплошная линия – уравнение Саха, точки – с учетом корреляций. Усеченная статистическая сумма: штриховая линия – уравнение Саха, крупные точки – с учетом корреляций

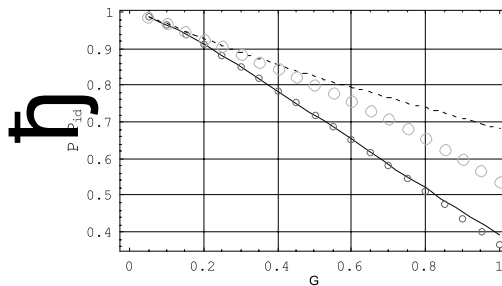


Рисунок 5 - Зависимость давления квазиклассической водородной плазмы от параметра связи  $\Gamma$ : сплошная линия соответствует  $r_s=5$ , штриховая линия -  $r_s=10$ , точки -  $r_s=40$

Как упоминалось выше, ослабление взаимодействия между частицами плазмы, т.е. снижение величины  $\Gamma$ , ведёт к уменьшению давления (рис.4). Учет парных корреляций способствует большему снижению давления с возрастанием  $\Gamma$  по сравнению с ионизационным равновесием Саха, поскольку происходит затрата энергии на коллективные явления, степень ионизации падает (рис.1).

На рис.5 приведена немонотонная зависимость давления от параметра связи  $\Gamma$  при фиксированном значении параметра плотности, явная для  $r_s=10$  и  $r_s=40$ . Она обусловлена увеличением корреляционной энергии (рис.3). Минимум давления смещается с ростом параметра плотности в сторону малых значений  $\Gamma$ .

Таким образом, в данной работе исследована зависимость давления квазиклассической водородной плазмы от параметров плазмы. Показано,

что давление в зависимости от параметра связи в общем случае имеет немонотонный характер, что обусловлено увеличением корреляционной энергии плазмы. Рост параметра связи связан с понижением степени ионизации. Парные корреляции приводят к снижению степени ионизации в сравнении с ионизационным равновесием Саха при  $\Gamma \approx 0.4$  и падению давления в сравнении с давлением идеального газа, которое также снижается. Далее для исследования уравнения состояния плазмы в квазиклассическом приближении необходимо рассмотреть поведение радиальных функций распределения и потенциалов взаимодействия частиц.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Архипов Ю.В., Баимбетов Ф.Б., Давлетов А.Е., Стариков К.В. Псевдопотенциальная теория плотной высокотемпературной плазмы. Алматы: «Қазақ университеті», 2002. – 113 с.

2. Мажит З.С. Известия НАН РК. Серия физико-математическая. 2009. – сдана в печать.

### Түйіндеме

Мақалада жұптық түзету жақындауы тұрғысынан квазиклассикалық сутекті плазманың еркін энергиясы үшін теңдеуін шешу арқылы ионизация дәрежесінің және қысымның плазма параметрлерінен тәуелділіктері анықталған. Болшектердің кванттық қасиеттері базалық потенциалдар өрнектерінде есепке алынды. Жалпы жағдайда қысымның байланыс параметріне тәуелділігінің сипаты монотонды емес. Бұл плазманың корреляциялық энергиясының өсуімен қамтылады. Байланыс параметрінің өсуі ионизация дәрежесінің төмендеуімен байланысты. Жұптық корреляциялар  $\Gamma \approx 0.4$  кезіндегі Саха ионизациялық тепе-теңдікпен салыстырғанда иондалу дәрежесінің төмендеуіне және идеал газ қысымымен салыстырғанда қысымның төмендеуіне әкеледі.

### Resume

In an article in pair correlation approximation by solving equation of free energy for quasi-classical hydrogen plasmas ionization degree and pressure dependences on plasmas parameters have been gotten. The particles quantum properties have been taken into account in basic potentials. It is shown, that pressure depending on communication parametre generally has nonmonotonic character that is caused by increase in correlation energy of plasma. Growth of parametre of communication is connected with fall of degree of ionisation. Pair correlations lead to decrease in degree of ionisation in comparison with ionic balance Sakha at  $\Gamma \approx 0.4$  and to pressure drop in comparison with pressure of ideal gas which also decreases.

## **РАДИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И СТАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРНЫЕ ФАКТОРЫ ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ ВОДОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ**

**З.С. Мажит**

*Павлодарский государственный педагогический институт*

Состояние ионизационного равновесия плазмы характеризуется определённым набором термодинамических величин: температурой, давлением, свободной энергией и др. Некоторые из них могут быть заданы, другие определяются посредством радиальных функций распределения. В рамках химической модели плазма представляет собой систему заряженных и нейтральных частиц, которые рассматриваются как отдельные химические виды, взаимодействующие друг с другом. Приближение парных корреляций позволяет связать термодинамические и электродинамические параметры и получить самосогласованную химическую модель плазмы.

Плазма характеризуется следующими безразмерными параметрами:

параметром связи  $\Gamma = \frac{e^2}{ak_B T}$ ,  $a$  - среднее расстояние между частицами,  $e$  – элементарный электрический заряд,  $T$  - температура плазмы,  $k_B$  - константа

Больцмана, и параметром плотности  $\Gamma_s = \frac{a}{a_B}$ ,  $a_B$  - Боровский радиус.

В приближении парных корреляций радиальная функция распределения  $g_{ab}(r)$  выражается через псевдопотенциал  $F_{ab}(r)$  в виде [1]

$$g_{ab}(r) = 1 - \frac{\Phi_{ab}(r)}{k_B T} . \quad (1)$$

Здесь  $r$  – расстояние между взаимодействующими частицами сортов « $a$ » и « $b$ ».

Статический структурный фактор  $S_{ab}(k)$  характеризует микроскопические свойства системы и определяется через радиальную функцию распределения

$$S_{ab}(k) = \delta_{ab} + \int (g_{ab}(r) - 1) \exp(i\vec{k}\vec{r}) d\vec{r} \quad (2)$$

где  $k$  – волновое число,  $\delta_{ab}$  – символ Кронекера.

Поскольку в приближении парных корреляций [1,2] радиальная функция распределения выражается через псевдопотенциал  $\Phi_{ab}(r)$ , формула (1), выражение (2) можно привести к виду

$$S_{ab}(k) = \delta_{ab} - \int \frac{\Phi_{ab}(r)}{k_B T} e^{ik\vec{r}} d\vec{r} \quad (3)$$

Псевдопотенциалы, учитывающие коллективные эффекты, определяются по формуле

$$\Phi_{ab}(r) = \int \tilde{\Phi}_{ab}(k) \exp(ikr) dk \quad (4)$$

В (4)  $\tilde{\Phi}_{ab}(k)$  - Фурье-образ потенциала взаимодействия. При подстановке (4) в выражение для статического структурного фактора (3) можно получить

$$S_{ab}(k) = \delta_{ab} + \frac{\sqrt{n_a n_b}}{k_B T} \tilde{\Phi}_{ab}(k) \quad (5)$$

Здесь  $n_a$  и  $n_b$  - концентрации частиц.

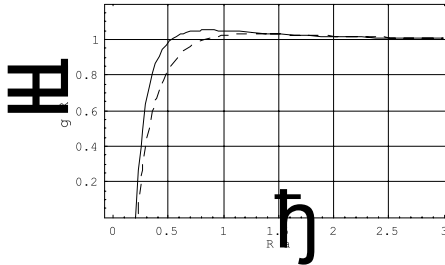


Рисунок 1 - Радиальная функция распределения взаимодействия электрон-электрон:  $r_s=5$ ,  $\Gamma=0.5$ . Сплошная линия – классический подход, пунктирная линия – квазиклассическое рассмотрение

Классический подход подразумевает, что заряженные компоненты плазмы взаимодействуют посредством кулоновского потенциала, при квазиклассическом рассмотрении учитываются квантовые эффекты дифракции и симметрии на расстояниях, порядка размеров самих взаимодействующих частиц. Наличие слабой немонотонности в пространственной зависимости электрон-электронной радиальной функции распределения (рисунок 1) свидетельствует об эффекте появления упорядоченности в распределении частиц плазменной среды. Появление максимума в аналогичной зависимости, полученной для взаимодействия протон-атом (рисунок 2), является свидетельством того, что на близких расстояниях имеет место перенормировка эффективного заряда атома [2]. Исследование электрон-электронной радиальной функции распределения при  $r_s=5$  и  $\Gamma=0.5$  выявляет на расстояниях *где*, что вклад квантовых эффектов дифракции незначителен.

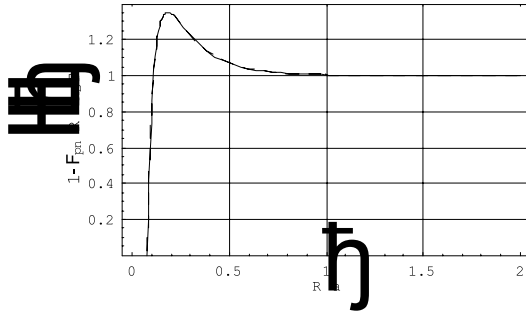


Рисунок 2 - Радиальная функция распределения взаимодействия протон-атом:  $r_s=5$ ,  $\Gamma=0.5$

На рисунках 3 и 4 приведены графики зависимостей электрон-электронного и протон-атомного структурных факторов в зависимости от волнового числа при фиксированных параметрах плотности и связи. Структурный фактор взаимодействия электрон-электрон монотонно зависит от расстояния.

Радиальная функция распределения и структурный фактор взаимодействия протон-атом характеризуются немонотонными пространственными зависимостями (рисунки 2 и 4). Немонотонность в пределах 1% углубляется с ростом параметра связи  $\Gamma$  и уменьшением параметра плотности  $r_s$ , т.е. для более плотной плазмы. Здесь сказывается влияние парных корреляций, которое существенно в случае более плотной плазмы.

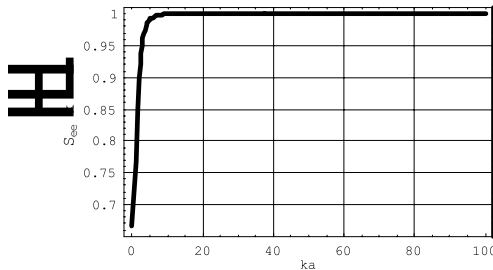


Рисунок 3 - Электрон-электронный структурный фактор при  $r_s=5$  и  $\Gamma=0.5$



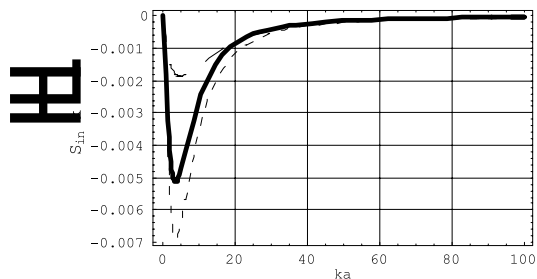


Рисунок 4 - Протон-атомный структурный фактор: сплошная линия -  $r_s=5$ ,  $\Gamma=0.5$ , длинный пунктир -  $r_s=10$ ,  $\Gamma=0.5$ , короткий пунктир -  $r_s=5$ ,  $\Gamma=0.75$

Выводы: Исследованы радиальные функции распределения и статические структурные факторы частиц частично ионизованной квазиклассической плазмы. Электрон-электронные пространственные зависимости радиальной функции распределения и статического структурного фактора имеют монотонный характер в отличие от аналогичных протон-атомных зависимостей. Показана возможность возникновения упорядоченности в распределении частиц плазменной среды.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Архипов Ю.В., Баимбетов Ф.Б., Давлетов А.Е., Стариков К.В. Псевдопотенциальная теория плотной высокотемпературной плазмы. - Алматы: «Қазақ университеті», 2002. – 113 с.
2. Мажит З.С. Известия НАН РК. Серия физико-математическая. 2009. – сдана в печать.

## Түйіндеме

Мақалада жұптық түзету жақындауы тұрғысынан квазиклассикалық сутекті плазманың радиалдық үлестіру функциялары мен структуралық факторлар есептелді. Плазма бөлшектерінің таралуында зарядтың қайта нормалануы және реттің пайда болу мүмкіндігі көрсетілді. Үлесудің радиалдық функциясы және Жартылай иондалған квазиклассикалық плазма бөлшектерінің статикалық құрылымдық факторлары зерттелді. Үлесудің радиалдық функциясының және статикалық құрылымдық фактордың электрон-электрондық кеңістік тәуелділігінің протон-атомдық тәуелділіктен айрықша монотонды болады.

## Resume

In an article in pair correlation approximation quasiclassical hydrogen plasmas particles radial distribution functions and static structural

factors have been gotten. It is shown that there is some ordering in distribution of particles of plasma medium, which can be possible. Radial functions of distribution and static structural factors of particles partially ionized quasiclassical plasmas are investigated. Elektron-electronic spatial dependences of radial function of distribution and the static structural factor have monotonous character unlike dependences similar a proton-nuclear.

УДК 539.3:534.2

## **О ЗАДАЧЕ ОТРАЖЕНИЯ – ПРЕЛОМЛЕНИЯ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ ТЕРМОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА**

**А.К. Сейтханова**

Павлодарский государственный университет  
им. С. Торайгырова

Матрица коэффициентов  $B$  в случае распространения термоупругой волны в анизотропной среде тетрагональной сингонии классов 4,  $\bar{4}$ ,  $4/m$  в одномерном случае ( $m=0, n=0$ ) [1]:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega b_{17} & b_{87} & 0 \end{pmatrix}; \quad (1)$$

Компоненты матрицы коэффициентов (1) имеют вид:

$$b_{12} = \frac{1}{c_{33}}, \quad b_{17} = \frac{(2\beta_{13} + \beta_{33})}{c_{33}}, \quad b_{21} = -\omega^2 \rho,$$

$$b_{87} = -i\omega \left( \frac{\beta_{33}^2}{c_{11}} + \frac{c_{\varepsilon}}{T_0} \right), \quad b_{78} = -\frac{1}{\lambda_{33}}.$$

Во втором приближении имеем

$$P_{(2)} = E + \frac{B^2}{2} h^2; \quad (2)$$

где  $E$  – единичная матрица,  
 $B$  – матрица коэффициентов,

$h$  – период неоднородности.

$$P_{(2)} = \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega b_{17} & b_{87} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega b_{17} & b_{87} & 0 \end{pmatrix} + E = \quad (3)$$

$$= \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & P_{14} \\ 0 & P_1 & P_{23} & 0 \\ 0 & -i\omega P_{14} & P_2 & 0 \\ -i\omega P_{23} & 0 & 0 & P_2 \end{pmatrix};$$

Компоненты матрицы коэффициентов (3) имеют вид:

$$P_1 = I + \frac{1}{2} h^2 b_{12} b_{21}; \quad P_{14} = \frac{1}{2} h^2 b_{17} b_{78};$$

$$P_{23} = \frac{1}{2} h^2 b_{17} b_{21}; \quad P_2 = I + \frac{1}{2} h^2 b_{78} b_{87};$$

В связи с широким применением периодически неоднородные среды являются одним из важных классов неоднородных сред. Структура фундаментальных решений дает возможность определить самые общие уравнения дисперсии термоупругих волн в периодически неоднородных средах.

Условием существования нетривиальных решений для определения волновых чисел, является равенство следующего определителя [2]:

$$\det |P_{(2)} - I E| = 0; \quad (4)$$

Корни характеристического уравнения имеют вид:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{b_{12} b_{21}}{2} + \frac{b_{78} b_{87}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{b_{12}^2 b_{21}^2 - 2b_{12} b_{21} b_{78} b_{87} + b_{78}^2 b_{87}^2 - 4i\omega b_{17}^2 b_{21} b_{78}}};$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\frac{b_{12} b_{21}}{2} + \frac{b_{78} b_{87}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{b_{12}^2 b_{21}^2 - 2b_{12} b_{21} b_{78} b_{87} + b_{78}^2 b_{87}^2 - 4i\omega b_{17}^2 b_{21} b_{78}}};$$

$$\lambda_3 = \sqrt{\frac{b_{12} b_{21} + b_{78} b_{87} - \sqrt{b_{12}^2 b_{21}^2 - 2b_{12} b_{21} b_{78} b_{87} + b_{78}^2 b_{87}^2 - 4i\omega b_{17}^2 b_{21} b_{78}}}{2}};$$

$$\lambda_4 = -\sqrt{\frac{b_{12} b_{21} + b_{78} b_{87} - \sqrt{b_{12}^2 b_{21}^2 - 2b_{12} b_{21} b_{78} b_{87} + b_{78}^2 b_{87}^2 - 4i\omega b_{17}^2 b_{21} b_{78}}}{2}};$$
(5)

Абсолютным значением волновых векторов упругой и тепловой волны второй среды  $k$  и  $\chi$  равны:

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}(-b_{12}b_{21} - \sqrt{(b_{12}b_{21} - b_{78}b_{87})^2 - 4i\omega b_{17}^2 b_{21}b_{78}})}; \quad (6)$$

$$\chi = \sqrt{\frac{1}{2}(-b_{12}b_{21} + \sqrt{(b_{12}b_{21} - b_{78}b_{87})^2 - 4i\omega b_{17}^2 b_{21}b_{78}})};$$

Матрица  $\Pi$  имеет вид:

$$\dot{I} = \frac{I}{\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2} (P_{(2)} - \frac{I}{2}(\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)E) \quad (7)$$

В матричном виде уравнение (7) примет вид:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 & 0 & \Pi_{14} \\ 0 & \Pi_1 & \Pi_{23} & 0 \\ 0 & -i\omega\Pi_{14} & -\Pi_1 & 0 \\ -i\omega\Pi_{23} & 0 & 0 & -\Pi_1 \end{pmatrix}; \quad (7)$$

Компоненты матрицы коэффициентов (7) имеют вид:

$$\dot{I}_{11} = \frac{b_{12}b_{21} - b_{78}b_{87}}{2(\chi^2 - k^2)}; \quad \dot{I}_{14} = \frac{b_{17}b_{78}}{\chi^2 - k^2}; \quad \dot{I}_{23} = \frac{b_{17}b_{21}}{\chi^2 - k^2};$$

В рамках метода матрицанта усредненный матрицант, описывающий распространение связанных гармонических термоупругих волн в анизотропных средах с термомеханическим эффектом имеет вид [2]:

$$T_{\text{уср}}^{\pm} = \left( \pi + \frac{1}{2}E \right) \left( E \cos kz \pm \frac{B}{k} \sin kz \right) - \left( \pi - \frac{1}{2}E \right) \left( E \cos \chi z \pm \frac{B}{\chi} \sin \chi z \right) \quad (8)$$

$$\frac{d\vec{W}}{dz} = B\vec{W} \quad \vec{W} = (U_z, \sigma_{zz}, U_x, \sigma_{xz}, U_y, \sigma_{yz}, \theta, q_z)$$

где

$$\cos kz = \frac{e^{ikz} + e^{-ikz}}{2}; \quad \sin kz = \frac{e^{ikz} - e^{-ikz}}{2}; \quad (9)$$

С учетом (9) и принимая, что физический смысл имеет  $e^{-k(\epsilon)z}$  (8) запишется в виде:

$$T = \left( \Pi + \frac{1}{2} E \right) \frac{1}{2} \left( E e^{-ikz} - \frac{B}{ik} e^{-ikz} \right) - \left( \Pi - \frac{1}{2} E \right) \frac{1}{2} \left( E e^{-i\chi z} - \frac{B}{\chi} e^{-i\chi z} \right); \quad (10)$$

Усредненный матрицант  $T_0^+$  в этом случае для термоупругой среды примет вид:

$$T_0^+ = \left( \Pi + \frac{1}{2} E \right) \left( E - \frac{B}{ik} \right) - \left( \Pi - \frac{1}{2} E \right) \left( E - \frac{B}{i\chi} \right); \quad (11)$$

Структура матрицанта (11) примет вид:

$$T_0^\pm = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & 0 \\ t_{21} & 1 & 0 & t_{24} \\ t_{31} & 0 & 1 & t_{34} \\ 0 & t_{42} & t_{43} & 1 \end{pmatrix}; \quad (12)$$

где

$$t_{12} = -b_{12} b_{78} b_{87} - i\omega b_{17}^2 b_{78} + \sqrt{b_{21} b_{78} (b_{12} b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{13} = b_{17} \sqrt{b_{21} b_{78} (b_{12} b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{21} = -b_{21} b_{78} b_{87} + \sqrt{b_{21} b_{78} (b_{12} b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{24} = b_{17} b_{21} b_{78};$$

$$t_{31} = -i\omega b_{17} b_{21} b_{78};$$

$$t_{34} = -b_{12} b_{21} b_{78} + \sqrt{b_{21} b_{78} (b_{12} b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{42} = -i\omega b_{17} \sqrt{b_{21} b_{78} (b_{12} b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{43} = -b_{12} b_{21} b_{87} - i\omega b_{17}^2 b_{21} + \sqrt{b_{21} b_{78} (b_{12} b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

При  $z=0$  усредненный матрицант (11) может быть записан в виде:

$$T_0^\pm = \frac{1}{2} E \mp R; \quad (13)$$

Матрица  $R$  имеет вид:

$$R = \frac{1}{2i} \left( \frac{k-\chi}{k\chi} \right) \pi B - \frac{1}{4i} \left( \frac{k+\chi}{k\chi} \right) B \quad (14)$$

где

$$T_0^\pm = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & 0 \\ t_{21} & 1 & 0 & t_{24} \\ t_{31} & 0 & 1 & t_{34} \\ 0 & t_{42} & t_{43} & 1 \end{pmatrix}; \quad (15)$$

Компоненты матрицы (15) получены в виде:

$$t_{12} = -b_{12} b_{78} b_{87} - i\omega b_{17}^2 b_{78} + \sqrt{b_{21} b_{78} (b_{12} b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{13} = b_{17} \sqrt{b_{21} b_{78} (b_{12} b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{21} = -b_{21} b_{78} b_{87} + \sqrt{b_{21} b_{78} (b_{12} b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{24} = b_{17} b_{21} b_{78};$$

$$t_{31} = -i\omega b_{17} b_{21} b_{78};$$

$$t_{34} = -b_{12} b_{21} b_{78} + \sqrt{b_{21} b_{78} (b_{12} b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{42} = -i\omega b_{17} \sqrt{b_{21} b_{78} (b_{12} b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{43} = -b_{12} b_{21} b_{87} - i\omega b_{17}^2 b_{21} + \sqrt{b_{21} b_{78} (b_{12} b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

Полагая:  $\vec{U}_P$  - поле падающих волн,  $\vec{U}_R$  - поле отраженных волн и  $\vec{U}_t$  - поле преломленных волн, на основе [3]

$$\vec{U}_P + \vec{U}_R = \vec{U}_t; \quad (16)$$

имеем:

$$T_0^P \vec{U}_P + T_0^R \vec{U}_R = T_0^t \vec{U}_t, \text{ при } z = 0$$

или

$$\left( \frac{1}{2} E - R_0 \right) \vec{U}_P + \left( \frac{1}{2} E + R_0 \right) \vec{U}_R = \left( \frac{1}{2} E - R_t \right) \vec{U}_t; \quad (17)$$

Учитывая непрерывность полей на контакте сред (16):

получим:

$$R_0 \vec{U}_P - R_0 \vec{U}_R = R_t \vec{U}_t; \quad (18)$$

С учетом (16) выражение (18) есть искомого граничное условие для векторов  $\vec{U}_P, \vec{U}_R, \vec{U}_t$  в матричной форме.

В (16) и (18) неизвестны вектора  $\vec{U}_R$  и  $\vec{U}_t$ . Подстановка (16) в (18) дает уравнение:

$$(R_0 + R_t) \vec{U}_R = (R_0 - R_t) \vec{U}_P;$$

откуда следует представление для отраженных волн:

$$\vec{U}_R = (R_0 + R_t)^{-1} (R_0 - R_t) \vec{U}_P;$$

Поле преломленных волн  $\vec{U}_t$  определяется формулой (16).

Пусть

$$R_0 + R_t = Q_1, R_0 - R_t = Q_2; \quad (19)$$

Тогда

$$\vec{U}_R = (Q_1)^{-1} (Q_2) \vec{U}_P \quad (20)$$

Элементы матриц  $Q^+$  и  $Q^-$  определяются как

$$\tau_{ij}^+ = r_{ij}^0 + r_{ij}^t, \tau_{ij}^- = r_{ij}^0 - r_{ij}^t; \quad (21)$$

Поле отраженных волн:

$$\vec{U}_R = G \vec{U}_P; \quad (22)$$

Из (16):

$$\vec{U}_R = \vec{U}_t - \vec{U}_P; \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22) получим поле преломленных волн [4]:

$$\vec{U}_t = (G + E) \vec{U}_P; \quad (24)$$

где

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & g_{14} \\ 0 & g_{22} & g_{23} & 0 \\ 0 & g_{32} & g_{33} & 0 \\ g_{41} & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix}; \quad (25)$$

элементы матрицы  $G$  получены в виде:

$$g_{11} = -I + \frac{2b_{21}(b_{78} + a\chi r_{34})}{b_{21}(b_{78} + a\chi r_{34}) + ak(i\omega\chi r_{24}^2 + r_{21}(b_{78} + a\chi r_{34}))};$$

$$g_{14} = -\frac{2ab_{78}kr_{24}}{b_{21}(b_{78} + a\chi r_{34}) + ak(i\omega\chi r_{24}^2 + r_{21}(b_{78} + a\chi r_{34}))};$$

$$g_{22} = -I + \frac{2b_{12}(b_{87} + a\chi r_{43})}{b_{12}(b_{87} + a\chi r_{43}) + ak(i\omega\chi r_{13}^2 + r_{12}(b_{87} + a\chi r_{43}))};$$

$$g_{23} = -\frac{2ab_{87}kr_{13}}{b_{12}(b_{87} + a\chi r_{43}) + ak(i\omega\chi r_{13}^2 + r_{12}(b_{87} + a\chi r_{43}))};$$

$$g_{32} = \frac{2i\omega b_{12}\chi r_{13}}{b_{12}(b_{87} + a\chi r_{43}) + ak(i\omega\chi r_{13}^2 + r_{12}(b_{87} + a\chi r_{43}))};$$

$$g_{33} = -I + \frac{2b_{87}(b_{12} + ak r_{12})}{b_{12}(b_{87} + a\chi r_{43}) + ak(i\omega\chi r_{13}^2 + r_{12}(b_{87} + a\chi r_{43}))};$$

$$g_{41} = \frac{2i\omega b_{21}\chi r_{24}}{b_{21}(b_{78} + a\chi r_{34}) + ak(i\omega\chi r_{24}^2 + r_{21}(b_{78} + a\chi r_{34}))};$$

$$g_{44} = -I + \frac{2b_{78}(b_{21} + ak r_{21})}{b_{21}(b_{78} + a\chi r_{34}) + ak(i\omega\chi r_{24}^2 + r_{21}(b_{78} + a\chi r_{34}))};$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \vec{U}_R &= (U_{zR}, \sigma_{zR}, \theta_R, q_{zR}) \\ \vec{U}_t &= (U_{zt}, \sigma_{zt}, \theta_t, q_{zt}) \end{aligned} \quad (26)$$

полагая

$$\vec{U}_P = (U_{zP}, \sigma_{zP}, 0, 0) \quad (27)$$

Подставляя в уравнение (22), получим поле отраженных волн:



$$\begin{pmatrix} U_{zR} \\ \sigma_{zR} \\ \theta_R \\ q_{zR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & g_{14} \\ 0 & g_{22} & g_{23} & 0 \\ 0 & g_{32} & g_{33} & 0 \\ g_{41} & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} U_{zP} \\ \sigma_{zP} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$U_{zR} = g_{11} U_{zP}; \quad \sigma_{zR} = g_{22} \sigma_{zP};$$

$$\theta_R = g_{32} \sigma_{zP}; \quad q_{zR} = g_{41} U_{zP};$$

Подставляя в уравнение (24) получем поле преломленных волн:

$$\begin{pmatrix} U_{zt} \\ \sigma_{zt} \\ \theta_t \\ q_{zt} \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & g_{14} \\ 0 & g_{22} & g_{23} & 0 \\ 0 & g_{32} & g_{33} & 0 \\ g_{41} & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] * \begin{pmatrix} U_{zP} \\ \sigma_{zP} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (29)$$

$$U_{zt} = (1 + g_{11}) U_{zP}; \quad \sigma_{zt} = (1 + g_{22}) \sigma_{zP};$$

$$\theta_t = g_{32} \sigma_{zP}; \quad q_{zt} = g_{41} U_{zP};$$

Таким образом, работа посвящена приложению матричного метода матрицанта к изучению распространения связанных упругих и тепловых волн в анизотропной среде. В работе аналитически решена задача отражения-преломления упругой волны на границе термоупругого пространства.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тлеукунов С.К., Кудерин М.К., Козионов В.А., Испулов Н.А., Баяубаев Е.К., Сейтханова А.К. Динамические и термодинамические процессы в скальных грунтах и строительных конструкциях. Монография под ред. академика АЕН, д.ф.-м.н., профессора С.К. Тлеукунова. - Павлодар, 2006.

2. Тлеукунов С.К. Метод матрицанта. - Павлодар, НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004. 148 с.

3. Тлеукунов С.К., Сейтханова А.К., Ильясов М.Н., Досумбеков К.Р. О матричной формулировке задачи отражения и преломления термоупругих волн // Материалы международной научной конференции «Вторые Ержановские чтения», г. Актобе, 2007 г.

4. Тлеукунов С.К., Сейтханова А.К., Досумбеков К.Р. О коэффициентах отражения и преломления упругих и термоупругих волн // Материалы международной научной конференции «Вторые Ержановские чтения», г. Актобе, 2007 г.

5. Новацкий В. Теория упругости. - М.: «Мир», 1986, 556 с.

6. Айталиев Ш.М., Тлеуменов С.К., Сейтханова А.К. / 4 класты тетрагоналды сингониялы анизотропты ортада термосерпимді толқындардың таралуы туралы. Вестник КазНПУ им. Абая, Серия механика, физика, информатика, Алматы. - 2007.

### *Түйіндеме*

*Термомеханикалық эффектiмен болатын серпiмдi орталарда толқындық процесстердiң заңдылықтарды зерттеу актуалдығы, геофизика, сейсмология, композиттік материалдардың механикасының теориялық және қолданбалы есептердi шешуiнде қажеттiлiгiмен байланысты. Байланысқан қозғалыс теңдеулерi мен жылуоткiзiшiк теңдеулерi физика–механикалық параметрлердiң күрделiгi мен көп болуымен ерекшеленедi. Осыған байланысты деформацияланатын қатты дене механикасының – термосерпiмдiлiк деген тарауы қарқынды дамып келедi. Осы бағыттың аясында анизотропты орталардың кейбiр физика–механикалық қасиеттерiн қолдана отырып, байланысқан жылулық және механикалық өрiстер зерттеледi. Берiлген мақалада, матрицант әдiсi негiзiнде, 4–шi реттi коэффициенттер матриалары үшiн, бiртектi анизотропты термосерпiмдi орталардың шекарасындағы толқындардың шағылу–сыну есебi қарастырылған.*

### *Resume*

*The urgency of research of laws of wave processes in elastic environments with thermo mechanical effect is connected with necessity of the decision of theoretical and applied problems of geophysics, seismology, mechanics of composite materials etc. Connected equations of movement and the heat conductivity equation differ complexity and an abundance of physical–mechanical parameters. In this connection the section of mechanics of a deformable firm body, - thermo elasticity intensively develops. Within the limits of this direction, leaning against use of certain physical–mechanical properties anisotropic environments, the connected thermal and mechanical fields are studied. In given article, on the basis of a method matrixant, the decision of a problem of reflexion-refraction of waves on border of homogeneous anisotropic thermoelastic environments, for a case of matrixes of factors of 4<sup>th</sup> order is received.*

## **РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ С МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЭФФЕКТОМ**

**С.К. Тлеуенов**

*Евразийский национальный университет им. Л. Гумилева,  
г. Астана*

**М.К. Жукенов**

*Павлодарский государственный университет им. С.Торайгырова*

Современный прогресс в науке и технике неразрывно связан с развитием наших знаний в области композиционных материалов. Спектр применений композиционных материалов чрезвычайно широк - от космических аппаратов до бытовых приборов. Важное место среди известных композиционных материалов занимают материалы, уникальные свойства которых обусловлены существованием магнитоэлектрического эффекта.

В последние годы, благодаря исследованиям магнитоэлектрического эффекта появилась надежда на его широкое практическое применение.

Анизотропные среды характеризуются обилием параметров. Одним из конструктивных путей преодоления этих трудностей является последовательное и детальное изучение свойств решений уравнений Максвелла в достаточно широком классе анизотропных сред с тем, чтобы установить закономерности этих решений от структуры тензорных величин, определяющих анизотропию среды. В данном исследовании рассматриваются гармонически зависящие от времени решения уравнений Максвелла в диэлектрических средах с магнитоэлектрическим эффектом.

Представление решений волновых полей  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{V}, \vec{D}$  рассматриваются в виде:

$$\vec{F} = \vec{F}(z)e^{i\omega t \pm k_x x \pm k_y y} \quad (1)$$

где  $\omega$  - частота,  $k_x, k_y$  - соответственно X - и Y - компоненты волнового вектора. Свойства среды от координат X и Y не зависят, т.е. предполагается, что среда однородна вдоль оси Z.

При отсутствии объемной плотности зарядов  $\rho$ , вектора плотности токов и гармонической зависимости решений волновых полей от времени уравнения Максвелла принимают вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = i\omega \vec{D} \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad (3)$$

К данным уравнения необходимо добавить материальные уравнения:

$$\begin{aligned} D_i &= \varepsilon_0 \varepsilon_j E_j, \quad \varepsilon_j = \varepsilon_j(\omega) \\ \vec{B}_j &= \mu_0 \mu_j \vec{H}_j, \quad \mu = \mu_j(\omega) \end{aligned} \quad (4)$$

Среда полагается непроводящей.

Магнитоэлектрический эффект заключается в индуцировании электрической поляризации в материале во внешнем магнитном поле или в появлении намагниченности во внешнем электрическом поле.

Материальные уравнения связывающие  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  получаем из свободной энергии

$$F = F_{\text{эм}} + F_{\text{мэ}} \quad (5)$$

где  $F_{\text{эм}}$  – свободная энергия для электромагнитного поля

$$F_{\text{эм}} = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_i E_j + \mu_0 \mu_{ij} H_i H_j \quad (6)$$

$F_{\text{мэ}}$  – свободная энергия для поля с магнитоэлектрическим эффектом

$$F_{\text{мэ}} = -\alpha_{ik} E_i H_k \quad (7)$$

Тогда материальные уравнения есть:

$$\frac{\partial F}{\partial E_i} = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j - \alpha_{ij} H_j = D_i \quad (8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial H_i} = \mu_0 \mu_{ij} H_j - \alpha_{ij} E_i = B_j \quad (9)$$

где  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  – тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости для описания этих свойств среды;  $\alpha_k$  – несимметричный тензор материальных параметров магнитоэлектрического эффекта.

Для анизотропных диэлектриков с магнитоэлектрическим эффектом тетрагональной, тригональной и гексагональной сингонии на основе метода матрицанта систему уравнений, описывающая распространение электромагнитных волн, можно привести к эквивалентной системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\vec{U}}{dz} = B\vec{U} \quad \vec{U} = (E_y, H_x, H_y, E_x) \quad (10)$$

Решая в системе соотношения (2), (4), (8), (9) получим:

$$\begin{aligned}
\frac{dE_y}{dz} &= i \left[ \frac{k_x k_y}{\beta} \alpha_{11} E_y + \mu_0 \left( \frac{k_y^2}{\beta} \mu_2 + \omega \mu_1 \right) H_x - \frac{k_x k_y}{\beta} \mu_0 \mu_2 H_y - \left( \frac{k_y^2}{\beta} \alpha_{11} + \omega \alpha_{\perp} \right) E_x \right] \\
\frac{dH_x}{dz} &= i \left[ \varepsilon_0 \left( \frac{k_x^2}{\beta} \varepsilon_2 + \omega \varepsilon_1 \right) E_y + \frac{k_x k_y}{\beta} \alpha_{11} H_x - \left( \frac{k_x^2}{\beta} \alpha_{11} + \omega \alpha_{\perp} \right) H_y - \frac{k_x k_y}{\beta} \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_x \right] \\
\frac{dH_y}{dz} &= i \left[ \frac{k_x k_y}{\beta} \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_y + \left( \frac{k_y^2}{\beta} \alpha_{11} + \omega \alpha_{\perp} \right) H_x - \frac{k_x k_y}{\beta} \alpha_{11} H_y - \varepsilon_0 \left( \frac{k_x^2}{\beta} \varepsilon_2 + \omega \varepsilon_1 \right) E_x \right] \\
\frac{dE_x}{dz} &= i \left[ \left( \frac{k_x^2}{\beta} \alpha_{11} + \omega \alpha_{\perp} \right) E_y + \frac{k_x k_y}{\beta} \mu_0 \mu_2 H_x - \mu_0 \left( \frac{k_y^2}{\beta} \mu_2 + \omega \mu_1 \right) H_y - \frac{k_x k_y}{\beta} \alpha_{11} E_x \right]
\end{aligned} \tag{11}$$

где  $\beta = \omega(\alpha_1^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_2 \mu_0 \mu_2)$

Таким образом матрица коэффициентов  $B$  имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ -b_{24} & -b_{14} & -b_{11} & b_{34} \\ -b_{23} & -b_{13} & b_{43} & -b_{11} \end{pmatrix} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
b_{11} &= i \frac{k_x k_y}{\beta} \alpha_{11} & b_{12} &= i \mu_0 \left( \frac{k_y^2}{\beta} \mu_2 + \omega \mu_1 \right) & b_{13} &= -i \frac{k_x k_y}{\beta} \mu_0 \mu_2 \\
b_{14} &= -i \left( \frac{k_x^2}{\beta} \alpha_{11} + \omega \alpha_{\perp} \right) & b_{21} &= i \varepsilon_0 \left( \frac{k_x^2}{\beta} \varepsilon_2 + \omega \varepsilon_1 \right) & b_{23} &= -i \left( \frac{k_x^2}{\beta} \alpha_{11} + \omega \alpha_{\perp} \right) \\
b_{24} &= -i \frac{k_x k_y}{\beta} \varepsilon_0 \varepsilon_2 & b_{34} &= -i \varepsilon_0 \left( \frac{k_x^2}{\beta} \varepsilon_2 + \omega \varepsilon_1 \right) & b_{43} &= -i \mu_0 \left( \frac{k_y^2}{\beta} \mu_2 + \omega \mu_1 \right)
\end{aligned}$$

Распространение волн в координатных плоскостях описывается матрицей  $B$ :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & b_{14} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & 0 \\ 0 & -b_{14} & 0 & b_{34} \\ -b_{23} & 0 & b_{43} & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

При распространении волны в плоскости  $xz$  ( $k_y = 0$ ) элементы матрицы имеют вид:

$$\begin{aligned}
b_{12} &= i \omega \mu_0 \mu_1 & b_{14} &= -i \omega \alpha_{\perp} & b_{21} &= i \varepsilon_0 \left( \frac{k_x^2}{\beta} \varepsilon_2 + \omega \varepsilon_1 \right) \\
b_{23} &= -i \left( \frac{k_x^2}{\beta} \alpha_{11} + \omega \alpha_{\perp} \right) & b_{34} &= -i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_1 & b_{43} &= -i \mu_0 \left( \frac{k_x^2}{\beta} \mu_2 + \omega \mu_1 \right)
\end{aligned} \tag{14}$$

При распространении волны в плоскости  $yz$  ( $k_x = 0$ ) элементы матрицы имеют вид:

$$\begin{aligned}
 b_{12} &= i\mu_0 \left( \frac{k_y^2}{\beta} \mu_2 + \omega \mu_1 \right) & b_{14} &= -i \left( \frac{k_y^2}{\beta} \alpha_{11} + \omega \alpha_{\perp} \right) & b_{21} &= i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1 \\
 b_{23} &= -i\omega \alpha_{\perp} & b_{34} &= -i\varepsilon_0 \left( \frac{k_y^2}{\beta} \varepsilon_2 + \omega \varepsilon_1 \right) & b_{12} &= -i\omega \mu_0 \mu_1
 \end{aligned} \tag{15}$$

Структура матрицы коэффициентов В совпадает со структурой матрицы В [3] формула 1.2.14. Вследствие этого можно основываясь на результаты монографии [3] сразу выписать структуру фундаментальных решений системы уравнений (11):

$$T_{u,uc}^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & t_{12} & -t_{42} & -t_{32} \\ t_{21} & t_{11} & -t_{41} & -t_{31} \\ -t_{24} & -t_{14} & t_{44} & t_{34} \\ -t_{14} & -t_{13} & t_{43} & t_{33} \end{pmatrix}_{u,uc} \tag{16}$$

$$T^{-1} = T_u^{-1} - iT_{uc}^{-1} \tag{17}$$

Из общей структуры фундаментальных решений получится структура фундаментальных решений при распространении волн в координатных плоскостях:

$$\begin{aligned}
 T_u^{-1} &= \begin{pmatrix} t_{22} & 0 & -t_{42} & 0 \\ 0 & t_{11} & 0 & -t_{31} \\ -t_{24} & 0 & t_{44} & 0 \\ 0 & -t_{13} & 0 & t_{33} \end{pmatrix} & T_{uc}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & 0 & -t_{32} \\ t_{21} & 0 & -t_{41} & 0 \\ 0 & -t_{14} & 0 & t_{34} \\ -t_{23} & 0 & t_{43} & 0 \end{pmatrix} \\
 T^{-1} &= \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} & -t_{42} & -t_{32} \\ -t_{21} & t_{11} & t_{41} & -t_{31} \\ -t_{24} & t_{14} & t_{44} & -t_{34} \\ t_{23} & -t_{13} & -t_{43} & t_{33} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{18}$$

В связи с широким применением периодически неоднородные среды являются одним из важных классов неоднородных сред. Структура фундаментальных решений дает возможность определить самые общие уравнения дисперсии электромагнитных волн в периодически неоднородных средах с магнитоэлектрическим эффектом. При распространении электромагнитных волн в координатных плоскостях уравнения дисперсии определяются из условия:

$$\det(\mathbf{P} - E \cos \tilde{k}h) = 0 \tag{19}$$

здесь

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} (\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}) \tag{20}$$

Из структур  $T$  и  $T^{-1}$  структура матрицы  $P$  будет иметь вид:

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 & P_{13} & P_{14} \\ 0 & P_{11} & P_{14} & P_{24} \\ -P_{24} & P_{14} & P_{33} & 0 \\ P_{14} & -P_{13} & 0 & P_{33} \end{pmatrix} \quad (21)$$

из этого:

$$\tilde{P}_1, \tilde{P}_2 = \frac{1}{2} \left( P_{11} + P_{22} \pm \sqrt{(P_{11} - P_{22})^2 + 4(P_{14}P_{14} + P_{13}P_{24})} \right) \quad (22)$$

общий вид уравнения дисперсий:

$$\cos \tilde{k}_1 h = \tilde{P}_1 \quad \cos \tilde{k}_2 h = \tilde{P}_2 \quad (23)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982 г.
2. Вайнштейн Б.К., Современная кристаллография. Том-4. Наука, 1979г.
3. Тлеукунов С.К., Оспанов А.Т. Изучение электромагнитных полей в анизотропных средах. – Алматы: Наука, 1985. – 176 с.
4. Тлеукунов С.К. О характеристической матрице периодически неоднородного слоя. В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. – Ленинград: Зап. научн. семин., ЛОМИ, 1987. - Т.165. - С. 177-181.
5. Тлеукунов С.К., Метод матрицанта, Павлодар, НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004г., 148 с.
6. Байгонысов О., Тлеукунов С.К. О методе решения некоторых задач распространения упругих волн при наличии периодической неоднородности. - Ленинград: Зап. научн. сем. ЛОМИ АН СССР, 1985 т. 148. - С. 30-33.
7. Тлеукунов С.К. О характеристической матрице периодически неоднородного слоя. В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. – Ленинград: Зап. научн. семин., ЛОМИ, 1987. - Т.165. - С. 177-181.
8. Tleykenov S. The structure of propagator matrix and its application in the case of the periodical inhomogeneous media. Abstr. Semin. on Earthquake processes and their consequences Seismological investigations. 1989. - Kurukshetra, India. - P. 4.
9. Tleykenov S. Investigation of the thin layer influence of the boundary conditions. Abstracts «Seminar on earthquake processes and their consequences». - Kurukshetra, India. 1989.

## Түйіндеме

*Жұмыста магнит-электрлік эффектiсi бар анизотропты диэлектрлік орта үшін уақыттан гармоникалық тәуелдiлiкте болатын Максвелл*

теңдеулерінің шешімдері қарастырылады. Максвелл теңдеулерінің фундаментал шешімдерінің құрылымы анықталды (матрицант құрылымы). Алынған құрылымның негізінде магнитэлектрлік эффектiсі бар периодты біртекті орталарда электромагниттік толқындардың дисперсия теңдеулері анықталды. Магнитэлектрлік эффектiні зерттеу нәтижелерін магнит өрістердің және АЖЖ жаңа магнитэлектрлік бергіштерін құрастыруда қолдануға болады.

#### Resume

*In work harmoniously time-dependent decisions of equations Maxwell for anisotropic dielectric environments with magnetoelectric effect are considered. The structure of fundamental decisions of equations Maxwell (structure matrizer) is defined. On the basis of the received structure the equations of a dispersion of electromagnetic waves in periodically non-uniform environments with magnetoelectric effect are defined. Results of research of magnetoelectric effect can be applied, for example, in working out of new magnetoelectric gauges of a magnetic field and microwave frequency capacities. For such applications magnetoelectric materials are the most suitable thanks to a wide working temperature range.*

УДК 539.3:534.2

## О РЕШЕНИИ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕРМОУПРУГОЙ ВОЛНЫ

**С.К. Тлеуенов, Н.А. Испулов**

Павлодарский государственный университет  
им. С. Торайгырова

Матрица коэффициентов  $B$  (если параметры среды постоянны) в случае распространения одномерной термоупругой волны в анизотропной среде ромбической сингонии имеет вид [1]:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega b_{17} & b_{87} & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

здесь, коэффициенты  $b_{ij}$  равны:



$$b_{12} = \frac{I}{c_{33}}; \quad b_{17} = \frac{\beta_{33}}{c_{33}}; \quad b_{21} = -\omega^2 \rho; \quad b_{87} = -i\omega \left( \frac{\beta_{33}^2}{c_{33}} + c_e \right); \quad b_{78} = -\frac{I}{\lambda_{33}}$$

Учитывая условие [2]:

$$\det|B - I E| = 0 \quad (2)$$

для данной задачи получим характеристическое уравнение в виде:

$$I^4 - \hat{A}I^2 + \tilde{N} = 0 \quad (3)$$

$$\text{где } B = b_{12}b_{21} + b_{78}b_{87} \\ C = b_{21}b_{78}(i\omega b_{17}^2 + b_{12}b_{87})$$

Из (3) получаем:

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(b_{12}b_{21} + b_{78}b_{87}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(b_{12}b_{21} - b_{78}b_{87})^2 - 4i\omega b_{17}^2 b_{21}b_{78}} \quad (4)$$

Если допустить, что упругая продольная и тепловые волны распространяются несвязанно, т.е. термомеханические параметры  $\beta_{ij} = 0$ , тогда корни характеристического уравнения (3) будут равны:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega \sqrt{\frac{\rho}{c_{33}}}; \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{i\omega c_e}{\lambda_{33}}} \quad (5)$$

Из первого корня соотношения (5) следует скорость упругой продольной волны, которая будет распространяться с затуханием; второе соотношение определяет тепловую волну.

Из соотношения (4) получим четыре корня характеристического уравнения (3), имеющие вид:

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{a}{2} \left( I + \frac{2b - c}{\sqrt{2}\sqrt{D-x}} \right) + \frac{I}{2} i \left( b - \frac{I}{\sqrt{2}} \sqrt{D-x} \right)} \quad (6)$$

$$k_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{a}{2} \left( 1 - \frac{2b - \frac{c}{a}}{\sqrt{2}\sqrt{D-x}} \right) + \frac{1}{2}i \left( b + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{D-x} \right)}$$

где  $a = b_{12}b_{21}$ ;  $b = b_{78}b_{87}$ ;  $c = 4i\omega b_{17}^2 b_{21}b_{78}$

$$D = \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + (2ab - c)^2}$$

В корнях (6) уже учитывается эффект связанности упругой и тепловой волн, т.е.  $\beta_{ij} \neq 0$ .

Перепишем  $k_{1,2}$  в (6) в следующем виде:

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{x_1 + iy_1} = \sqrt[4]{x_1^2 + y_1^2} (\cos\psi + i\sin\psi) \quad (7)$$

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{x_1 + iy_1} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{y_1}{\sqrt{D_1 + x_1}} + i\sqrt{D_1 + x_1} \right) \quad (8)$$

где  $D_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

$$x_1 = \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{2b - \frac{c}{a}}{\sqrt{2}\sqrt{D-x}} \right); \quad y_1 = \frac{1}{2} \left( b - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{D-x} \right)$$

Корни  $k_{3,4}$  в (6) равны:

$$k_{3,4} = \pm \sqrt{x_2 + iy_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{y_2}{\sqrt{D_2 + x_2}} \pm i\sqrt{D_2 + x_2} \right) \quad (9)$$

где

$$x_2 = \frac{a}{2} \left( 1 - \frac{2b - \frac{c}{a}}{\sqrt{2}\sqrt{D-x}} \right); \quad y_2 = \frac{1}{2} \left( b + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{D-x} \right)$$

В явном виде корни (8) и (9) имеют вид:

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{c_\epsilon \omega}{2\lambda_{33}}} (1+i) \left[ 1 + \frac{\lambda_{33}}{2} \left( \frac{i\omega c_\epsilon \rho \lambda_{33} T_0^2 + c_{33}^3}{\rho^2 \omega^3 \lambda_{33}^2 T_0^2 + \omega c_\epsilon^2 c_{33}^2} \right) \beta_{33}^2 \right] \quad (10)$$

$$k_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{c_{33}}} \left( 1 - \frac{i\omega}{2c_{33}\lambda_{33}} \left( \frac{\rho \omega c_{33} \lambda_{33}^2 T_0^2 - i c_\epsilon c_{33}^2 \lambda_{33} T_0}{\rho^2 \omega^3 \lambda_{33}^2 T_0^2 + \omega c_\epsilon^2 c_{33}^2} \right) \beta_{33}^2 \right) \quad (11)$$

Рассмотрим корень  $k_1$  в соотношениях (10).

Действительная и мнимая части этого корня равны:

$$\text{Re } k_1 = \sqrt{\frac{c_\epsilon \omega}{2\lambda_{33}}} \left[ 1 + \frac{\lambda_{33}}{2} \left( \frac{c_{33}^3 - \omega c_\epsilon \rho \lambda_{33} T_0^2}{\rho^2 \omega^3 \lambda_{33}^2 T_0^2 + \omega c_\epsilon^2 c_{33}^2} \right) \beta_{33}^2 \right] \quad (12)$$

$$\text{Im } k_1 = i \sqrt{\frac{c_\epsilon \omega}{2\lambda_{33}}} \left[ 1 + \frac{\lambda_{33}}{2} \left( \frac{\omega c_\epsilon \rho \lambda_{33} T_0^2 + c_{33}^3}{\rho^2 \omega^3 \lambda_{33}^2 T_0^2 + \omega c_\epsilon^2 c_{33}^2} \right) \beta_{33}^2 \right] \quad (13)$$

Из мнимой части корня  $k_1$  получим формулу для скорости тепловой волны:

$$c = \frac{k_1}{\omega} = \sqrt{\frac{2\lambda_{33} T_0 \omega}{c_\epsilon}} \left[ 1 - \frac{\lambda_{33}}{2} \left( \frac{\omega c_\epsilon \rho \lambda_{33} T_0^2 + c_{33}^3}{\rho^2 \omega^2 \lambda_{33}^2 T_0^2 + c_\epsilon^2 c_{33}^2} \right) \beta_{33}^2 \right] \quad (14)$$

Действительная часть этого корня позволяет получить коэффициент затухания тепловой волны:

$$k_{\text{зам}} = \sqrt{\frac{c_\epsilon \omega}{2\lambda_{33}}} \left[ 1 + \frac{\lambda_{33}}{2} \left( \frac{c_{33}^3 - \omega c_\epsilon \rho \lambda_{33} T_0^2}{\rho^2 \omega^2 \lambda_{33}^2 T_0^2 + c_\epsilon^2 c_{33}^2} \right) \beta_{33}^2 \right] \quad (15)$$

Рассмотрим теперь положительный корень  $k_3$  в соотношениях (11).

Действительная и мнимая части которого, соответственно, позволяют получить коэффициент затухания и скорость упругой волны:

$$k_{\text{зам}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{c_{33}}} \left( \frac{\rho \omega^3 c_{33} \lambda_{33} T_0^2}{\rho^2 \omega^2 \lambda_{33}^2 T_0^2 + c_\epsilon^2 c_{33}^2} \right) \beta_{33}^2 \quad (16)$$

$$c = \sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{c_\epsilon c_{33} T_0}{\rho^2 \omega^2 \lambda_{33}^2 T_0^2 + c_\epsilon^2 c_{33}^2} \right) \beta_{33}^2 \right) \quad (17)$$

В результате из корней (10), (11) построены качественные графические зависимости скоростей и коэффициентов затухания упругих и тепловых волн от частоты, при изменении параметров среды (термомеханического параметра, температуры и коэффициента теплопроводности), представленные ниже.

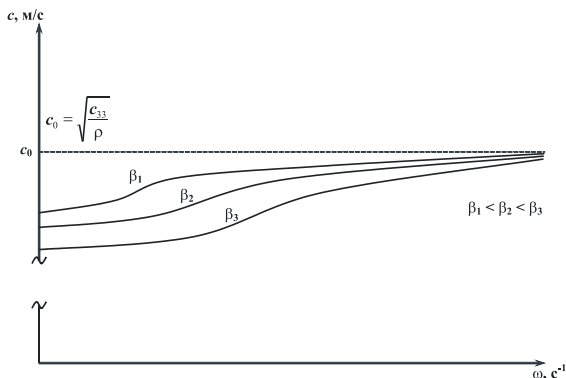


Рисунок 1 – График зависимости скорости  $c$  упругой продольной волны от частоты при различных термомеханических параметрах  $\beta_{ij}$

Из приведенного графика зависимости, видно, что при увеличении термомеханического параметра скорость упругой продольной волны уменьшается.

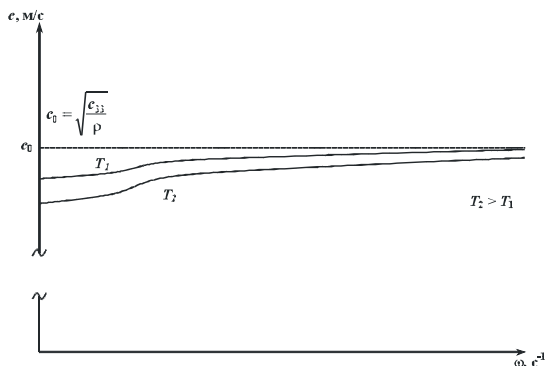


Рисунок 2 – График зависимости скорости  $c$  упругой продольной волны от частоты при различных температурах

Данный график зависимости свидетельствует о том, что с увеличением термодинамической температуры скорость упругой продольной волны уменьшается. Это связано с воздействием колебаний узлов кристаллической решетки на скорость волны.

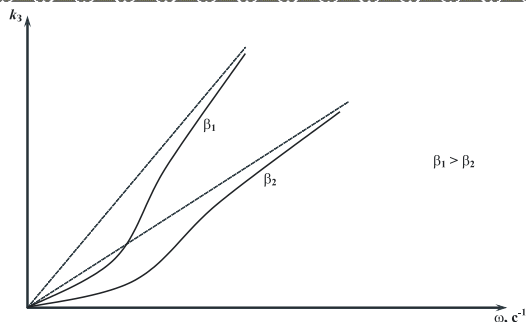


Рисунок 3 – График зависимости коэффициента затухания  $k_3$  упругой продольной волны от частоты при различных термомеханических параметрах  $\beta_{ij}$

Как было сказано выше увеличение термомеханического параметра приводит к уменьшению скорости упругой продольной волны, это соответственно приводит к увеличению коэффициента затухания волны.

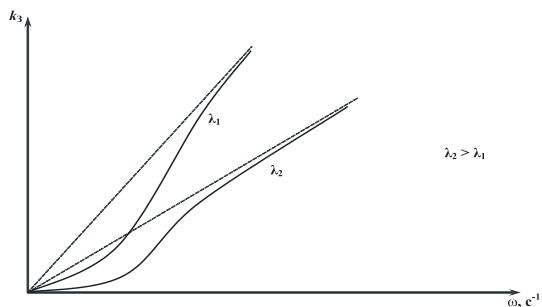


Рисунок 4 – График зависимости коэффициента затухания  $k_3$  упругой продольной волны от частоты при различных значениях коэффициента теплопроводности  $\lambda$

Из приведенного графика зависимости следует, что с уменьшением коэффициента теплопроводности и увеличении частоты коэффициент затухания упругой продольной волны уменьшается.

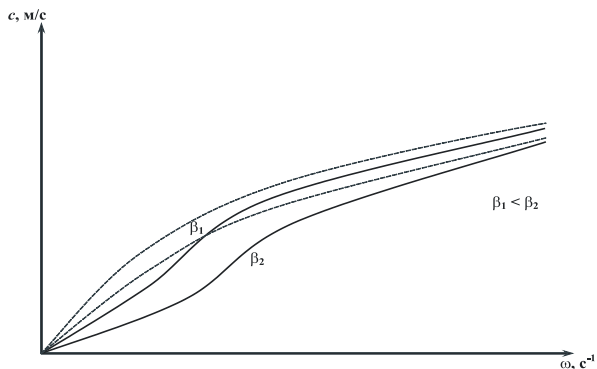


Рисунок 5 – График зависимости скорости  $c$  тепловой волны от частоты при различных термомеханических параметрах  $\beta_{ij}$

Как и в случае рисунка 1.1 с уменьшением термомеханического параметра, связывающего механическое и тепловое поле скорость тепловой волны увеличивается.

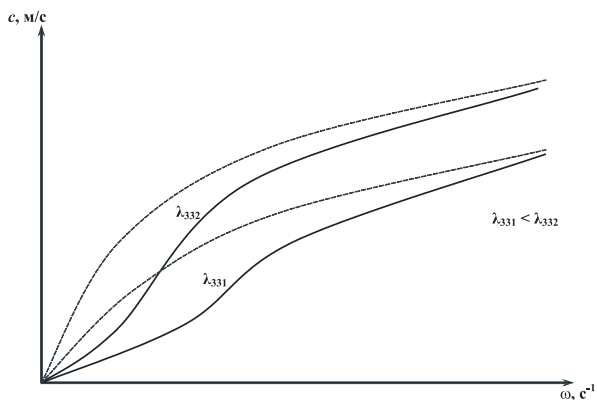


Рисунок 6 - График зависимости скорости  $c$  тепловой волны от частоты при различных коэффициентах теплопроводности  $\lambda_{ij}$

Как видно из графика зависимости, увеличение коэффициента теплопроводности приводит к увеличению скорости тепловой волны.

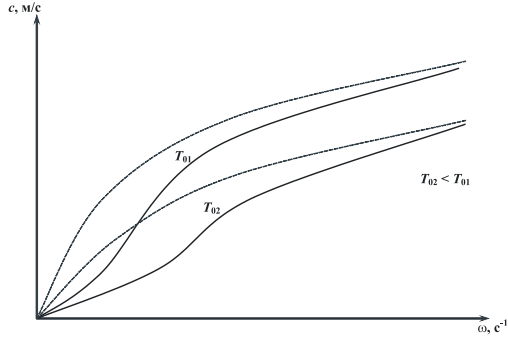


Рисунок 7 – График зависимости скорости  $c$  тепловой волны от частоты при различных температурах

Из данного графика зависимости видно, что увеличение термодинамической температуры приводит к увеличению скорости тепловой волны.

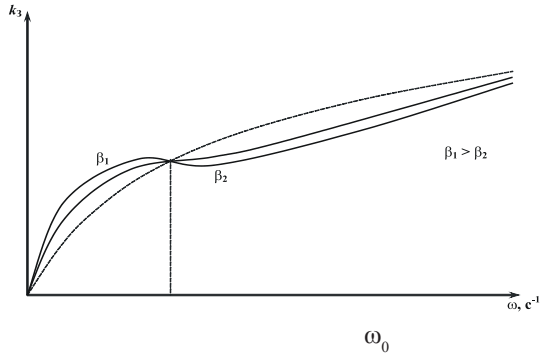


Рисунок 8 – График зависимости коэффициента затухания  $k_3$  тепловой волны от частоты при различных термомеханических параметрах  $\beta_{ij}$

Из последнего графика зависимости следует, что увеличение термомеханического параметра приводит к затуханию тепловой волны в анизотропной среде. При определенной частоте  $\omega_0$ , выводимой из формулы (15), равной

$$\omega_0 = \frac{c_{33}^3}{c_\varepsilon \rho \lambda_{33} T_0^2} \quad (18)$$

не происходит взаимовлияния тепловой и упругой волны, т.е. волны распространяются без термоупругого эффекта. Причем эта частота будет существовать при любых термомеханических параметрах  $\beta_{ij}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тлеукунов С.К., Кудерин М.К., Козионов В.А., Испулов Н.А. Баяубаев Е.К., Сейтханова А.К. Динамические и термодинамические процессы в скальных грунтах и строительных конструкциях. Монография под ред. академика АЕН, д.ф.-м.н., профессора С.К. Тлеукунова. - Павлодар, 2006.
2. Тлеукунов С.К. Метод матрицанта. – Павлодар: НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004. - 148 с.
3. Айталиев Ш.М., Тлеукунов С.К., Сейтханова А.К. / 4 класты тетраоналды сингониялы анизотропты ортада термосерпiмдi толкындарды таралуы туралы. Вестник КазНПУ им. Абая, Серия механика, физика, информатика, Алматы, 2007.
4. Тлеукунов С.К., Испулов Н.А., Сейтханова А.К. О распространении термоупругих волн в анизотропной среде ромбической сингонии классов 222 и mm2. Механика и машиноведение, Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова МОН РК, №3, стр. 102-106, Алматы, - 2008 г.

## Түйіндеме

*Термомеханикалық эффектiмен болатын серпiмдi орталарда толқындық процестердiң заңдылықтарды зерттеу актуалдығы, геофизика, сейсмология, композиттік материалдардың механикасының теориялық және қолданбалы есептердi шешуiнде қажеттiлiгiмен байланысты. Байланысқан қозғалыс теңдеулерi мен жылуоткiзiшiтiк теңдеулерi физика–механикалық параметрлердiң күрделiгi мен көп болуымен ерекшеленедi. Осыған байланысты деформацияланатын қатты дене механикасының – термосерпiмдiлiк деген тарауы қарқынды дамып келедi. Осы бағыттың аясында анизотропты орталардың кейбiр физика–механикалық қасиеттерiн қолдана отырып, байланысқан жылулық және механикалық өрiстер зерттеледi. Берiлген жұмыста, матрицант әдiсiнiң негiзiнде, жиiлiкке тәуелдi байланысқан термосерпiмдi толқындардың жылдамдықтары мен оту коэффициенттерiнiң тәуелдiлiктердiң түрлерi анықталған; серпiмдi және жылу толқындардың (термомеханикалық параметрлердiң аздығы кезiндегi) жылдамдықтардың және ошу коэффициенттерiнiң температураның, жылуоткiзiшiтiк коэффициентiнiң және жиiлiктiң өзгерiсiне тәуелдiлiгiнiң сапалы графиктерi сызылды.*

## Resume

*The urgency of research of laws of wave processes in elastic environments with thermo mechanical effect is connected with necessity of the decision of theo-*



*retical and applied problems of geophysics, seismology, mechanics of composite materials etc. Connected equations of movement and the heat conductivity equation differ complexity and an abundance of physical–mechanical parameters. In this connection the section of mechanics of a deformable firm body, - thermo elasticity intensively develops. Within the limits of this direction, leaning against use of certain physical–mechanical properties anisotropic environments, the connected thermal and mechanical fields are studied. In given article on the basis of a method matrizant, kinds of dependences of speeds and factors of the attenuation, the connected thermoelastic waves from frequency are defined; the quality graphs of the dependence of decay rates and attenuation coefficients of elastic and thermal waves (under small thermomechanical parameter) on the changes of temperature, heat conductivity tensor and frequency have been plotted.*

УДК 519.624

## **О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ**

**А.Б. Тлеулесова**

*Жезказганский университет им. О.А. Байконурова, г. Жезказган*

Краевые задачи с импульсным воздействием различными методами исследовались многими авторами [1]-[3]. В работах [4]-[6] изучены вопросы существования и единственности решения двухточечных краевых задач с импульсным воздействием для обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке  $[0, T]$ .

В предлагаемой статье на отрезке  $[0, T]$  рассматривается линейная краевая задача с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [0, T] \setminus \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\} \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \quad (2)$$

$$B_i x(\theta_i - 0) + C_i x(\theta_i + 0) = p_i, \quad p_i \in R^n, \quad i = \overline{1, m} \quad (3)$$

где матрица  $A(t)$ , вектор-функция  $f(t)$  непрерывны на  $[0, T]$  с

возможными разрывами первого рода в точках  $t=\theta$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $B_i, C_i - i = \overline{(0, m)}$

постоянные матрицы,  $\|x(t)\| = \max |x_j(t)|$ ,  $\|A(t)\| = \max \sum_{i=1}^n |a_{ij}(t)| \leq \alpha$ .

Через  $\tilde{C}(\overline{0, T})_{\theta_i, R^n, i = \overline{1, m}}$  обозначим пространство кусочно-непрерывных на  $[0, T]$ , функций  $x: [0, T] \rightarrow R^n$  с нормой

$$\|x\|_1 = \max_{i=0, m} \sup_{t \in [\theta_i, \theta_{i+1})} \|x(t)\|, \quad \text{где } \theta_0 = 0, \theta_{m+1} = T.$$

Для решения задачи (1)-(3) используем метод параметризации [4].

Пусть  $h_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, m+1}$ . Возьмем число  $l \in N$  и по нему

произведем разбиение промежутка  $[0, T) = \bigcup_{r=1}^{(m+1)l} [t_{r-1}, t_r)$

где точки импульсного воздействия входят число точек разбиения.

Через  $x_r(t)$  сузение функции  $x(t)$  на  $r$ -й интервал и задачу (1)-(3) сведем к многоточечной краевой задаче с импульсным воздействием

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + f(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, (m+1)l}, \quad (4)$$

$$B_0 x_1(0) + C_0 \lim_{t \rightarrow T-0} x_{(m+1)l}(t) = d, \quad (5)$$

$$B_i \lim_{t \rightarrow \theta_i-0} x_i(t) - C_i x_{i+1} = p_i \quad (6)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_s-0} x_s(t) = x_{s+1}(t_s), \quad s \in \{\overline{1, (m+1)l-1}\} \setminus \{\overline{1, m}\} \quad (7)$$

Здесь (7) – условия склеивание во внутренних точках разбиения, кроме точек импульсного воздействия. Введем обозначение  $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$  и на каждом интервале  $[t_{r-1}, t_r)$  произведем замену  $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ . Тогда задача (4) - (7) сведется к эквивалентной краевой задаче с параметром

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)[u_r + \lambda_r] + f(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, (m+1)l}, \quad (8)$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, (m+1)l}, \quad (9)$$

$$B_0 \lambda_1 + C_0 \lim_{t \rightarrow T-0} u_{(m+1)l}(t) + C_0 \lambda_{(m+1)l} = d, \quad (10)$$

$$B_i \lim_{t \rightarrow \theta_i-0} u_{il}(t) + B_i \lambda_{il} - C_i \lambda_{il+1} = p_i \quad i = \overline{1, m}, \quad (11)$$

$$\lambda_s + \lim_{t \rightarrow t_s - 0} u_s(t) = \lambda_{s+1} \quad s \in \{1, (m+1)l - 1\} \setminus \{l, i = \overline{1, m}\}. \quad (12)$$

Если пара  $(\lambda, u[t])$ , решение задачи (8)-(12), то где система функций  $x[t] = (\lambda_1 + u_1(t), \lambda_2 + u_2(t), \dots, \lambda_{(m+1)l} + u_{(m+1)l}(t))$  будет решением задачи (4)-(7). И наоборот, если  $\tilde{x}[t] = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_{(m+1)l}(t))$  - решение задачи (4)-(7), то пара  $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ , где  $\tilde{\lambda} = (\tilde{x}_1(0), \tilde{x}_2(t_1), \dots, \tilde{x}_{(m+1)l}(t_{(m+1)l-1}))$ ,  $\tilde{u}[t] = (\tilde{x}_1(t) - \tilde{x}_1(0), \tilde{x}_2(t) - \tilde{x}_2(t_1), \dots, \tilde{x}_{(m+1)l}(t) - \tilde{x}_{(m+1)l}(t_{(m+1)l-1}))$  будет решением задачи (8)-(12). При фиксированных значениях параметров  $\lambda$  задача Коши имеет единственное решение  $u_r(t)$ , которое представимо в виде

$$u_r(t) = \int_{t_{r-1}}^t A(\tau) [u_r(\tau) + \lambda_r] d\tau + \int_{t_{r-1}}^t f(\tau) d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1, (m+1)l}. \quad (13)$$

Вместо  $u_r(t)$  подставив правую часть (13) и повторив этот процесс ( $v=1, 2, \dots$ ) раз, получим представление функции  $u_r(t)$  вида

$$u_r(t) = D_{v,r}(t) \lambda_r + F_{v,r}(t) + G_{v,r}(u, t) \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1, (m+1)l}. \quad (14)$$

$$\text{где } D_{v,r}(t) = \sum_{j=0}^{v-1} \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_j} A(\tau_{j+1}) d\tau_{j+1} \dots d\tau_1,$$

$$F_{v,r}(t) = \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) d\tau_1 + \sum_{j=1}^{v-1} \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{j-1}} A(\tau_j) \int_{t_{r-1}}^{\tau_j} f(\tau_{j+1}) d\tau_{j+1} d\tau_j \dots d\tau_1,$$

$$G_{v,r}(u, t) = \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{v-1}} A(\tau_v) u_r(\tau_{v+1}) d\tau_{v+1} \dots d\tau_1, \quad \tau_0 = t. \quad r = \overline{1, (m+1)l}.$$

Из (14) находим

$$\lim_{t \rightarrow t_r - 0} u_r(t) = D_{v,r}(t_r) \lambda_r + F_{v,r}(t_r) + G_{v,r}(u, t), \quad r = \overline{1, (m+1)l}. \quad (15)$$

Подставляя соответствующие правые части (15) в условия (10)-(12), и умножая (10), (11) на соответствующие  $\frac{h_i}{1} > 0, i = \overline{1, m}$ , получим систему уравнений относительно неизвестных параметров  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{(m+1)l}$ :

$$Q_v(l) \lambda = -F_v(l) - G_v(l, u) \quad (16),$$

$Q_v(l)$  - матрица, соответствующая левой части систем уравнений (10)-(12).

Таким образом, для нахождения пары  $(\lambda, u[t])$  имеем замкнутую систему уравнений (13), (16). Решение многоточечной краевой задачи с импульсным воздействием (8)-(12) находим по следующему алгоритму:

Шаг 0.1) Начальное приближение по параметру  $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_{(m+1)l}^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n(m+1)l}$  определяем из уравнения  $Q_v(l)\lambda = -F_v(l)$ .

На отрезках  $[t_{r-1}, t_r)$  решая задачу Коши (8),(9) при  $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ , находим функции  $u_r^{(0)}(t)$   $r = \overline{1, (m+1)l}$ .

Шаг 1.1) Найденные  $u_r^{(0)}(t)$   $r = \overline{1, (m+1)l}$  подставляя в правую часть уравнения (16) определяем первое приближение по параметру  $\lambda^{(1)}$ . Решая задачу Коши (8), (9) на интервалах  $[t_{r-1}, t_r)$ , при  $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$ , находим функции  $u_r^{(1)}(t)$   $r = \overline{1, (m+1)l}$ . и.т.д. Продолжая процесс на  $k$ -ом шаге получаем систему пар  $(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Достаточные условия осуществимости и сходимости предложенного алгоритма устанавливает.

**Теорема 1.** Пусть при некоторой матрица обратима и выполняется неравенства

$$\| [Q_v(l)]^{-1} \| \leq \gamma_v(l) \quad (17)$$

$$q_v(l) = \gamma_v(l) \max \left( 1, \max_{i=1, m} \frac{h_i}{l} \|B_i\|, \frac{h_{m+1}}{l} \|C_0\| \right) \times \left[ \exp \left( \frac{\alpha h^0}{l} \right) - \sum_{j=0}^v \frac{1}{j!} \left( \frac{\alpha h^0}{j} \right)^j \right] < 1. \quad (18)$$

Тогда краевая задача с импульсным воздействием (1)-(3) имеет единственное решение  $x^*(t)$  и для него справедлива оценка

$$\|x^*\|_1 = \max_{r=\overline{1, (m+1)l}} \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|x^*(t)\| \leq L_{1,v}(l) \max \left( \|d\|, \|f\|, \max_{i=1, m} \|p_i\| \right), \quad (19)$$

где  $L_{1,v}(l)$  - не зависит от  $f(t)$ ,  $d$ ,  $p_i$  и вычисляется через  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $i = \overline{0, m}$ ,  $\alpha$ ,  $h^0$ ,  $\gamma_v(l)$ ,  $q_v(l)$ ,  $v$ ,  $l$ ,  $h^0 = \max_{i=1, m+1} h_i$ .

Одним из основных условий осуществимости алгоритма и однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи с импульсным воздействием является обратимость матрицы  $Q_v(l)$  при некоторых  $v$ ,  $l$ .

Блочно-ленточная структура матрицы  $Q_v(l)$  позволяет установить рекуррентные формулы, поблочно опеределяющие элементы матрицы

$[Q_v(l)]^{-1}$ . Предполагая, что матрицы  $C_i, i = \overline{1, m}$ , обратимы,  $\det C_i \neq 0, i = \overline{1, m}$ , устанавливается эквивалентность обратимости матрицы  $Q_v(l)$  размерности  $(n(m+1)l \times n(m+1)l)$  обратимости матрицы  $M_v(l)$  размерности  $(n \times n)$ .

Рассмотрим уравнение

$$Q_v(l)\lambda = b, \lambda, b \in R^{n(m+1)}, \quad (20)$$

которое относительно  $\lambda_r, r = \overline{1, (m+1)l}$  поблочко записывается в виде:

$$\frac{h_{m+1}}{l} B_0 \lambda_1 + \frac{h_{m+1}}{l} C_0 [I + D_{v,(m+1)l}(T)] \lambda_{(m+1)l} = b_1, \quad (21)$$

$$\begin{cases} [I + D_{v,1}(t_1)] \lambda_1 - \lambda_2 = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ [I + D_{v,l-1}(t_{l-1})] \lambda_{l-1} - \lambda_l = b_l, \end{cases} \quad (22)$$

$$\frac{h_1}{l} B_1 [I + D_{v,l}(t_l)] \lambda_l - \frac{h_1}{l} C_1 \lambda_{l+1} = b_{l+1}, \quad (23)$$

$$\begin{cases} [I + D_{v,l+1}(t_{l+1})] \lambda_{l+1} - \lambda_{l+2} = b_{l+2}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ [I + D_{v,2l-1}(t_{2l-1})] \lambda_{2l-1} - \lambda_{2l} = b_{2l}, \end{cases} \quad (24)$$

$$\frac{h_2}{l} B_2 [I + D_{v,2l}(t_{2l})] \lambda_{2l} - \frac{h_2}{l} C_2 \lambda_{2l+1} = b_{2l+1}, \quad (25)$$

$$\begin{cases} [I + D_{v,2l+1}(t_{2l+1})] \lambda_{2l+1} - \lambda_{2l+2} = b_{2l+2}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ [I + D_{v,3l-1}(t_{3l-1})] \lambda_{3l-1} - \lambda_{3l} = b_{3l}, \end{cases} \quad (26)$$

$$\frac{h_m}{l} B_m [I + D_{v,ml}(t_{ml})] \lambda_{ml} - \frac{h_m}{l} C_m \lambda_{ml+1} = b_{ml+1}, \quad (27)$$

Из первого уравнения системы (22) определим  $\lambda_2$ :

$$\lambda_2 = [I + D_{v,1}(t_1)] \lambda_1 - b_2,$$

Тогда из остальных уравнений (22) выразим  $\lambda_j$  при  $j = \overline{3,1}$  через  $\lambda_1$ :

$$\lambda_j = \prod_{s=j-1}^1 [L + D_{v,s}(t_s)] \lambda_1 - \sum_{k=2}^{j-1} \prod_{s=j-1}^1 [L + D_{v,s}(t_1)] b_k - b_j, \quad j = \overline{3,1},$$

отсюда при  $j = 1$  получим

$$\lambda_l = \prod_{s=l-1}^1 [L + D_{v,s}(t_s)] \lambda_1 - \sum_{k=2}^{l-1} \prod_{s=l-1}^k [L + D_{v,s}(t_1)] b_k - b_l. \quad (29)$$

Из уравнения (23) определим  $\lambda_{l+1}$ :

$$\lambda_{l+1} = C_1^{-1} B_1 [L + D_{v,l}(t_l)] \lambda_l - C_1^{-1} \frac{l}{h_1} b_{l+1}. \quad (30)$$

Вместо  $\lambda_1$  подставим его выражения из (11) имеем

$$\lambda_{l+1} = C_1^{-1} B_1 \prod_{s=l}^1 [L + D_{v,s}(t_s)] \lambda_1 - C_1^{-1} B_1 \sum_{k=2}^l \prod_{s=l}^k [L + D_{v,s}(t_s)] b_k - C_1^{-1} \frac{l}{h_1} b_{l+1}. \quad (31)$$

Далее, из первого уравнения системы (24) определим  $\lambda_{l+2}$ :

$$\lambda_{l+2} = [L + D_{v,l+1}(t_{l+1})] \lambda_{l+1} - b_{l+2}.$$

Аналогично из остальных системы уравнений (24) выразим  $\lambda_j$  при  $j = \overline{1+3,2l}$  через  $\lambda_1$ :

$$\lambda_j = \prod_{s=j-1}^{l+1} [L + D_{v,s}(t_s)] \lambda_{l+1} - \sum_{k=2}^{j-1} \prod_{s=j-1}^k [L + D_{v,s}(t_s)] b_k - b_j, \quad j = \overline{1+3,2l},$$

Отсюда при  $j = 2l$  получим

$$\lambda_{2l} = \prod_{s=2l-1}^{l+1} [L + D_{v,s}(t_s)] \lambda_{l+1} - \sum_{k=l+2}^{2l-1} \prod_{s=2l-1}^k [L + D_{v,s}(t_s)] b_k - b_{2l}. \quad (32)$$

Из уравнения (25) определим  $\lambda_{2l+1}$ :

$$\lambda_{2l+1} = C_2^{-1} B_2 [L + D_{v,2l}(t_{2l})] \lambda_{2l} - C_2^{-1} \frac{l}{h_2} b_{2l+1}.$$

Подставив вместо  $\lambda_{2l}$  его выражение (32) получим

$$\lambda_{2l+1} = C_2^{-1} B_2 \prod_{s=2l}^{l+1} [L + D_{v,s}(t_s)] \lambda_{l+1} - C_2^{-1} B_2 \sum_{k=l+2}^{2l} \prod_{s=2l}^k [L + D_{v,s}(t_s)] b_k - C_2^{-1} \frac{l}{h_2} b_{2l+1}.$$

Вместо  $\lambda_{l+1}$  подставим его выражение из (31) имеем

$$\begin{aligned}
 \lambda_{2l+1} &= C_2^{-1} B_2 \prod_{s=2l}^{l+1} [I + D_{v,s}(t_s)] \times \\
 &\times \left\{ C_1^{-1} B_1 \prod_{s=l}^1 [I + D_{v,s}(t_s)] \lambda_1 - C_1^{-1} B_1 \times \sum_{k=2}^l \prod_{s=l}^k [I + D_{v,s}(t_s)] b_k - C_1^{-1} \frac{l}{h_1} b_{l+1} \right\} - \\
 &- C_2^{-1} B_2 \sum_{k=l+2}^{2l} \prod_{s=2l}^k [I + D_{v,s}(t_s)] b_k - C_2^{-1} \frac{1}{h_2} b_{2l+1} = \\
 &= \left\{ C_2^{-1} B_2 \prod_{s=2l}^{l+1} [I + D_{v,s}(t_s)] \right\} \times \left\{ C_1^{-1} B_1 \times \prod_{s=l}^1 [I + D_{v,s}(t_s)] \right\} \lambda_1 - \\
 &- \sum_{k=2}^l \left\{ C_2^{-1} B_2 \prod_{s=2l}^{l+1} [I + D_{v,s}(t_s)] \right\} \times \left\{ C_1^{-1} B_1 \prod_{s=l}^k [I + D_{v,s}(t_s)] \right\} b_k - \\
 &- \left\{ C_2^{-1} B_2 \times \prod_{s=2l}^{l+1} [I + D_{v,s}(t_s)] \right\} \times C_1^{-1} \frac{1}{h_1} b_{l+1} - \sum_{k=l+2}^{2l} C_2^{-1} B_2 \prod_{s=2l}^k [I + D_{v,s}(t_s)] b_k - C_2^{-1} \frac{1}{h_2} b_{2l+1}.
 \end{aligned}$$

Аналогично, при  $J=i+2$  из соответствующего уравнения получаем

$$\lambda_{il+2} = [I + D_{v,1}(t_1)] \lambda_{il+1} - b_{il+2}, \quad j = \overline{1, m-1},$$

тогда остальные  $\lambda_j$  можно выразит через  $\lambda_{i+1}$  в следующем виде:

$$\lambda_j = \prod_{s=j-1}^{i+1} [I + D_{v,s}(t_s)] \lambda_{i+1} - \sum_{k=i+2}^{j-1} \prod_{s=j-1}^k [I + D_{v,s}(t_s)] b_k - b_j, \quad j = \overline{i+3, (i+1)Y},$$

Отсюда при  $j = (i+1)Y$  получаем

$$\lambda_{(i+1)Y} = \prod_{s=(i+1)Y-1}^{i+1} [I + D_{v,s}(t_s)] \lambda_{i+1} - \sum_{k=i+2}^{(i+1)Y-1} \prod_{s=(i+1)Y-1}^k [I + D_{v,s}(t_s)] b_k - b_{(i+1)Y}. \quad (33)$$

Из соответствующего уравнения импульсного воздействия при  $j = (i+1)Y+1$  определим  $\lambda_{(i+1)Y+1}$ . Тогда

$$\lambda_{(i+1)Y+1} = C_{i+1}^{-1} B_{i+1} [I + D_{v,(i+1)Y}(t_{(i+1)Y})] \lambda_{(i+1)Y} - C_{i+1}^{-1} \frac{l}{h_{i+1}} b_{(i+1)Y+1}.$$

Подставив вместо  $\lambda_{(i+1)Y+1}$  его выражение (33) получим

$$\begin{aligned}
 \lambda_{(i+1)Y+1} &= \left\{ C_{i+1}^{-1} B_{i+1} \prod_{s=(i+1)Y}^{i+1} [I + D_{v,s}(t_s)] \right\} \cdot \lambda_{i+1} - C_{i+1}^{-1} B_{i+1} [I + D_{v,(i+1)Y}(t_{(i+1)Y})] \times \\
 &\times \left\{ \sum_{k=i+2}^{(i+1)Y-1} \prod_{s=(i+1)Y-1}^k [I + D_{v,s}(t_s)] b_k - b_{(i+1)Y} \right\} - C_{i+1}^{-1} \frac{1}{h_{i+1}} b_{(i+1)Y+1} = \left\{ C_{i+1}^{-1} B_{i+1} \prod_{s=(i+1)Y}^{i+1} [I + D_{v,s}(t_s)] \right\} \times \\
 &\times \left\{ C_1^{-1} B_1 \prod_{s=i}^{(i-1)Y-1} [I + D_{v,s}(t_s)] \lambda_{(i-1)Y+1} - C_1^{-1} B_1 [I + D_{v,i}(t_i)] \right\} \times \left\{ \sum_{k=(i-1)Y+2}^{i-1} \prod_{s=i}^k [I + D_{v,s}(t_s)] b_k - b_i \right\}
 \end{aligned}$$

$$-C_i^{-1} \frac{l}{h_i} b_{l+1} \Big] - C_{i+1}^{-1} B_{i+1} [l + D_{v,(i+1)Y} (\xi_{(i+1)Y})] \times \left\{ \sum_{k=l+2}^{(i+1)Y-1} \prod_{s=(i+1)Y-1}^k [l + D_{v,s} (t_s)] b_k - b_{(i+1)Y} \right\} - C_{i+1}^{-1} \frac{l}{h_{i+1}} b_{(i+1)Y+1}.$$

Отсюда при  $i+1 = m$  имеем

$$\begin{aligned} \lambda_{ml+1} = & \prod_{j=m}^1 \left\{ C_j^{-1} B_j \prod_{s=jl}^{(j-1)Y+1} [l + D_{v,s} (t_s)] \right\} \cdot \lambda_1 - \prod_{j=m}^2 \left\{ C_j^{-1} B_j \prod_{s=jl}^{(j-1)Y+1} [l + D_{v,s} (t_s)] \right\} \times \\ & \times \left[ \sum_{k=2}^l C_1^{-1} B_1 \prod_{s=1}^k [l + D_{v,s} (t_s)] b_k + C_1^{-1} \frac{l}{h_1} b_{l+1} \right] - \prod_{j=m}^3 \left\{ C_j^{-1} B_j \prod_{s=jl}^{(j-1)Y+1} [l + D_{v,s} (t_s)] \right\} \times \\ & \times \left[ \sum_{k=l+2}^{2l} C_2^{-1} B_2 \prod_{s=2l}^k [l + D_{v,s} (t_s)] b_k + C_2^{-1} \frac{l}{h_2} b_{2l+1} \right] - \dots - \left\{ C_m^{-1} B_m \prod_{s=ml}^{(m-1)Y+1} [l + D_{v,s} (t_s)] \right\} \times \\ & \times \left[ \sum_{k=(m-2)Y+2}^{(m-1)Y} C_{m-1}^{-1} B_{m-1} \prod_{s=(m-1)Y}^k [l + D_{v,s} (t_s)] b_k + C_{m-1}^{-1} \frac{l}{h_{m-1}} b_{(m-1)Y+1} \right] - \\ & - \left[ \sum_{k=(m-1)Y+2}^{ml} C_m^{-1} B_m \prod_{s=ml}^k [l + D_{v,s} (t_s)] b_k + C_m^{-1} \frac{l}{h_m} b_{ml+1} \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Из формулы (33) при  $i = m$  получаем

$$\lambda_{(m+1)Y} = \prod_{s=(m+1)Y-1}^{m+1} [l + D_{v,s} (t_s)] b_{m+1} - \sum_{k=ml+2}^{(m+1)Y-1} \prod_{s=(m+1)Y-1}^k [l + D_{v,s} (t_s)] b_k - b_{(m+1)Y}. \quad (35)$$

Вместо  $\lambda_{ml+1}$  записав его выражение из (34) подставим полученное соотношение для  $\lambda_{(m+1)l}$  в уравнение (21). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{h_{m+1}}{1} \times & \left\{ B_0 + C_0 \prod_{s=(m+1)Y}^{m+1} [l + D_{v,s} (t_s)] \prod_{j=m}^1 \left\{ C_j^{-1} B_j \prod_{s=jl}^{(j-1)Y+1} [l + D_{v,s} (t_s)] \right\} \right\} \cdot \lambda_1 = b_1 + \frac{h_{m+1}}{1} C_0 \prod_{s=(m+1)Y}^{m+1} [l + D_{v,s} (t_s)] \\ & \times \left[ \prod_{j=m}^2 \left\{ C_j^{-1} B_j \prod_{s=jl}^{(j-1)Y+1} [l + D_{v,s} (t_s)] \right\} \times \left[ \sum_{k=2}^1 C_1^{-1} B_1 \prod_{s=1}^k [l + D_{v,s} (t_s)] b_k + C_1^{-1} \frac{1}{h_1} b_{l+1} \right] + \right. \\ & + \prod_{j=m}^3 \left\{ C_j^{-1} B_j \prod_{s=jl}^{(j-1)Y+1} [l + D_{v,s} (t_s)] \right\} \times \left[ \sum_{k=l+2}^{2l} C_2^{-1} B_2 \prod_{s=2l}^k [l + D_{v,s} (t_s)] b_k + C_2^{-1} \frac{1}{h_2} b_{2l+1} \right] + \\ & + \dots + \left\{ C_m^{-1} B_m \prod_{s=ml}^{(m-1)Y+1} [l + D_{v,s} (t_s)] \right\} \times \left[ \sum_{k=(m-2)Y+2}^{(m-1)Y} C_{m-1}^{-1} B_{m-1} \prod_{s=(m-1)Y}^k [l + D_{v,s} (t_s)] b_k + C_{m-1}^{-1} \frac{1}{h_{m-1}} b_{(m-1)Y+1} \right] \\ & \left. - \left[ \sum_{k=(m-1)Y+2}^{ml} C_m^{-1} B_m \prod_{s=ml}^k [l + D_{v,s} (t_s)] b_k + C_m^{-1} \frac{1}{h_m} b_{ml+1} \right] \right] + \frac{h_{m+1}}{1} C_0 \sum_{k=ml+2}^{(m+1)Y} \prod_{s=(m+1)Y}^k [l + D_{v,s} (t_s)] b_k \end{aligned} \quad (36)$$

Введем обозначение

$$M_v(l) = \left\{ B_0 + C_0 \prod_{s=(m+1)Y}^{m+1} [l + D_{v,s} (t_s)] \prod_{j=m}^1 \left\{ C_j^{-1} B_j \prod_{s=jl}^{(j-1)Y+1} [l + D_{v,s} (t_s)] \right\} \right\}.$$

Следующая лемма устанавливает взаимосвязь между обратимостью блочно-ленточной матрицы  $Q_v(l)$  размером  $(n(m+1)) \times (n(m+1))$  с обратимостью матрицы  $M_v(l)$  размерности  $(n \times n)$ .



**Лемма 1.** Матрица  $Q_v(l): \mathbb{R}^{n(m+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{n(m+1)}$  обратима тогда и только тогда, когда обратима матрица  $M_v(l): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Лемма 2.** Пусть матрицы  $C_i$  ( $i = \overline{1, m}$ )  $M_v(l): (n \times n)$  обратимы, тогда блочные элементы матрицы  $[Q_v(l)]^{-1} = \{d_{i,j}\}$ ,  $i, j = \overline{1, (m+1)}$  можно определить рекуррентными формулами:

$$d_{i,1} = \frac{1}{h_{m+1}} [M_v(l)]^{-1}, \quad (37)$$

$$d_{1,j} = [M_v(l)]^{-1} C_0 \prod_{s=(m+1)}^{m+1} [I + D_{v,s}(t_s)] \prod_{j=m}^{i+1} \left\{ C_j^{-1} B_j \prod_{s=j}^{(j-1)+1} [I + D_{v,s}(t_s)] \right\} \times C_j^{-1} B_j \prod_{s=1}^j [I + D_{v,s}(t_s)],$$

$$j = \overline{(i-1)l + 2, il}, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad (38)$$

$$d_{1,i+1} = [M_v(l)]^{-1} C_0 \prod_{s=(m+1)}^{m+1} [I + D_{v,s}(t_s)] \prod_{j=m}^{i+1} \left\{ C_j^{-1} B_j \prod_{s=j}^{(j-1)+1} [I + D_{v,s}(t_s)] \right\} C_i^{-1} \frac{1}{h_i}, \quad (39)$$

при  $i = m-1$  отсюда получим

$$d_{1,(m-1)l+1} = [M_v(l)]^{-1} C_0 \prod_{s=(m+1)}^{m+1} [I + D_{v,s}(t_s)] C_m^{-1} B_m \prod_{s=ml}^{(m-1)l+1} [I + D_{v,s}(t_s)] C_{m-1}^{-1} \frac{1}{h_i}, \quad (40)$$

$$d_{1,j} = [M_v(l)]^{-1} C_0 \prod_{s=(m+1)}^{m+1} [I + D_{v,s}(t_s)] C_m^{-1} B_m \prod_{s=ml}^j [I + D_{v,s}(t_s)], \quad j = \overline{(m-1)l + 2, ml} \quad (41)$$

$$d_{1,m+1} = [M_v(l)]^{-1} C_0 \prod_{s=(m+1)}^{m+1} [I + D_{v,s}(t_s)] C_m^{-1} \frac{1}{h_m}, \quad (42)$$

$$d_{i,j} = [M_v(l)]^{-1} C_0 \prod_{s=(m+1)}^i [I + D_{v,s}(t_s)] \quad j = \overline{ml + 2, (m+1)l}, \quad (43)$$

$$d_{2,j} = [I + D_{v,1}(t_1)] h_{1,j}, \quad j \neq 2, \quad (44)$$

$$d_{2,2} = [I + D_{v,1}(t_1)] h_{1,2} - I, \quad (45)$$

$$d_{k,j} = [I + D_{v,k-1}(t_{k-1})] h_{k-1,j}, \quad j \neq k, \quad k = \overline{2, 1}, \quad (46)$$

$$d_{k,k} = [I + D_{v,k-1}(t_{k-1})] h_{k-1,k} - I, \quad (47)$$

$$d_{l+1,j} = C_1^{-1} B_1 [I + D_{v,1}(t_1)] h_{1,j}, \quad j \neq l+1, \quad (48)$$

$$d_{i+1,i+1} = C_i^{-1} B_i \left[ I + D_{v,i}(t_i) \right] h_{i,i+1} - C_i^{-1} \frac{1}{h_i}, \quad (49)$$

$$d_{i+1,i+1} = C_i^{-1} B_i \left[ I + D_{v,i}(t_i) \right] h_{i,i+1} - C_i^{-1} \frac{1}{h_i}, \quad i = \overline{1, m} \quad (50)$$

$$d_{k,j} = \left[ I + D_{v,k-1}(t_{k-1}) \right] h_{k-1,j}, \quad k \neq 1 + 1, \quad i = \overline{1, m}, \quad (51)$$

$$d_{k,j} = \left[ I + D_{v,k-1}(t_{k-1}) \right] h_{k-1,j}, \quad k = \overline{m+2, (m+1)}, \quad j = \overline{1, (m+1)} \setminus \{k\}, \quad (52)$$

$$d_{k,k} = \left[ I + D_{v,k-1}(t_{k-1}) \right] h_{k-1,k} - I, \quad k = \overline{m+2, (m+1)}. \quad (53)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл.матем. и матем. Физ.-1989.-Т.29, №1. – С.50-66.

2. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук.думка, 1992.-280 с.

3. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987.-285 с.

4. Тлеулесова А.Б. Об однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи с импульсным воздействием // Матем.журнал. -Алматы, - 2004. Т.-4, №4. – С. 93-102.

5. Тлеулесова А.Б. О двухточечной краевой задаче для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Труды междунар. Конф. «Современные проблемы матем.физики и информационных технологий», «Университет». - Ташкент, 2005. –Т-2,18-24 апреля, 2005, С. 45-49.

6. Тлеулесова А.Б. О корректной разрешимости двухточечной краевой задачи с импульсным воздействием // Матем.журнал - Алматы, 2005.-Т-4, №3.-С. 87-95.

## Түйіндеме

*Бұл мақалада қарастырылып отырған есептің бірімәнді шешілімділігінің негізгі шарттарының бірі болып табылатын  $[Q_i(t)]^{-1}$  матрицасының элементтерін табуға арналған рекуррентті формулалар алынды.*

## Resume

*In this article we output the estimation recurrent formulas of the  $[Q_i(t)]^{-1}$  matrix constituents which is one of the main conditions of the single-valued solvability of the concerned mathematical problem.*

## **ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ: ОБЗОР УСТРОЙСТВ И ИХ ОСОБЕННОСТИ**

**А.В. Дегтярёв**

*Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова*

В последнее время в связи с всеобщей «компьютеризацией» значительно возрос интерес к измерительной аппаратуре на базе ЦАП-АЦП и использующей в качестве устройства управления и отображения персональный компьютер (ПК). Такие приборы предоставляют возможность создания гибкой, мобильной и недорогой измерительной системы, пригодной для решения широкого круга задач.

ПК обладает большой вычислительной мощностью, ресурсами хранения и представления информации. Основная проблема применения его в качестве анализатора спектра – это необходимость преобразования аналогового сигнала в цифровой. Для решения этой проблемы используют аналого-цифровые преобразователи (АЦП). Они преобразуют входной аналоговый сигнал в последовательность цифровых кодов. АЦП имеют аналоговые входы для подключения источников сигналов и цифровые выходы для передачи преобразованных данных в компьютер. Компьютер, оснащенный программным обеспечением, осуществляет управление устройствами АЦП и принимает данные для последующей обработки и анализа. Однако такие АЦП дороги. Поэтому иногда в качестве АЦП используют встроенные или внешние звуковые карты. С учетом того, что каждая материнская плата ПК имеет встроенную звуковую карту, дополнительные затраты к ПК не требуются.

В последние годы активно развивается еще одно направление – платы сбора данных, в которых есть все необходимые устройства для преобразования входного сигнала с датчиков в понятную для компьютера последовательность из числовых данных, выборок  $x(n)$ . Для анализа получаемых данных требуется специальное программное обеспечение, которое позволяет сформировать на экране дисплея переднюю панель стационарного измерительного устройства.

Любая измерительная система, построенная на базе персонального компьютера, состоит из источника входного сигнала, аналого-цифрового преобразователя и программного обеспечения (рисунок 1).

Примером цифровой измерительной системы может служить двухканальный цифровой запоминающий осциллограф АСК-3105 с персональным компьютером, где сигнал с датчика передается на

двухканальный цифровой запоминающий осциллограф, преобразуется в цифровую форму и поступает в порт компьютера.

Осциллограф АСК-3105 смонтирован в корпусе, который вставляется в свободный отсек для 5,25” дисководов (или CD-ROM) на передней панели системного блока ПК или использоваться в качестве внешнего подключения через параллельный порт.

Этот прибор позволяет наблюдать форму сигнала с использованием двух независимых каналов в полосе частот от 0 до 100МГц. Чувствительность по вертикали составляет от 5мВ/дел до 5 В/дел. Для связи с компьютером используется расширенный параллельный порт EPP и соответствующее программное обеспечение (ПО).

Для нормальной работы прибора, конфигурация компьютера, к которому он подключен, должна отвечать следующим требованиям:

- наличие параллельного порта, работающего в режиме EPP;
- установленная операционная система Windows 95 и выше;
- видеосистема VGA с разрешением 640×480, 16 цветов;
- для использования звуковых сообщений программы необходима звуковая плата.

Для наиболее эффективной реализации всех возможностей программы рекомендуется использование процессора класса Pentium II и размер оперативного запоминающего устройства (ОЗУ) не менее 32 Мбайт.



Рисунок 1 - Структурная схема устройств информационно-измерительных систем на базе персонального компьютера

АСК 3105 состоит из двух идентичных аналоговых трактов с независимыми АЦП, блока оперативной памяти, блока управления оперативной памятью, интерфейсных буферов, блока дешифратора команд и адресных счетчиков оперативной памяти. Все узлы взаимодействуют между собой по шине данных с помощью соответствующих сигналов управления, поступающих с компьютера по параллельному интерфейсу EPP.

Программное обеспечение не только позволяет управлять прибором, но и предоставляет широкий спектр сервисных возможностей: экспорт/импорт данных, математическая обработка сигналов, спектральный анализ, аварийная сигнализация в режиме самописца. Однако, следует отметить, что АСК 3105 является в первую очередь осциллографом, а не средством измерения частотного спектра, хотя у него имеется такая возможность. Поэтому достоверность результата полученного спектра будет во многом зависеть от вида исследуемого сигнала, а также от аппаратной и программной частей цифрового запоминающего осциллографа (ЦЗО). Так как ЦЗО не имеют нормируемых метрологических характеристик в режиме анализа спектра частот, они не могут служить полной заменой специализированным приборам.

Для подключения к компьютеру используется USB-интерфейс. Использование этого интерфейса решает проблему подключения виртуального прибора к любому компьютеру, в том числе к ноутбуку. Вместе с тем, для совместимости с более старыми ПК сохранена возможность подключения через LPT-порт. Другая особенность USB – масштабируемость – позволяет подключить одновременно несколько виртуальных приборов.

Несмотря на обилие достоинств такого устройства, недостатком все же является его цена – 2399 у.е.

Если в качестве устройства АЦП использовать просто АЦП или плату сбора данных (на основе АЦП), то цена измерительной системы составит от 139 до 2000 у.е., в зависимости от параметров АЦП.

Конструктивно различают: внешние модули АЦП (отдельные устройства, подключаемые к коммуникационным портам компьютера COM, LPT или к шинам обмена с внешними устройствами USB и т.п) и внутренние платы АЦП (стандартные дочерние компьютерные платы, вставляемые в свободные слоты материнской платы компьютера ISA или PCI, и имеющие внешние разъемы для подключения источников сигналов). Главными характеристиками внешних модулей АЦП является мобильность и автономность. Внутренние платы АЦП используются, как правило, в стационарных измерительных установках, где требуется высокая скорость оцифровки и прием данных от большого количества источников сигналов. Также внутренние платы АЦП используются для управления и приема данных с различных измерительных приборов.

Аппаратная реализация АЦП может быть различной. Существуют АЦП мгновенных значений и интегрирующие АЦП. В устройствах, решающих

одновременно несколько различных задач, какими и являются устройства спектрального анализа, чаще всего применяются АЦП мгновенных значений. При преобразовании широкополосного сигнала на входе АЦП обязательно должен присутствовать антиалиазинговый фильтр нижних частот в аналоговом исполнении. Частота среза этого фильтра в соответствии с теоремой отсчетов должна выбираться, по крайней мере, в 2 раза меньшей, чем частота осуществления выборок  $f_s$ , где  $f_{\text{СрФНЧ}} = f_s/2$  – частота Найквиста. Этим обеспечивается ограничение частотного спектра преобразуемого сигнала, иными словами формирование гладкой функции в пределах интервалов между выборками. Аналого-цифровой преобразователь как аппаратный узел цифрового устройства спектрального анализа характеризуется рядом параметров, наиболее существенными из них для решения поставленной задачи являются: частота дискретизации (выборки)  $f_s$ , разрядность АЦП  $r$  и погрешность преобразования.

В цифровых устройствах, имеющих дело с процессами в электроэнергетических установках, работающих на промышленной частоте 50 Гц, частота выборки выбирается в пределах 600 – 2000 Гц [1]. Это позволяет работать с сигналами, включающими кроме основной и высшие гармоники до 64 20-ой включительно.

Принципиально возможны режимы работы АЦП с фиксированной частотой выборки и с фиксированным числом выборок на периоде основной гармоники.

Фиксированная частота выборки не требует от цифровой системы слежения за фактическим периодом преобразуемого сигнала. Это упрощает реализацию АЦП, но усложняет последующую обработку его выходных данных, так как число выборок, приходящееся на период сигнала, будет переменной величиной.

При фиксированном числе выборок на периоде сигнала упрощается обработка данных, что и является основной причиной применения такого преобразования в большинстве устройств диагностики энергосистем. Однако корректное отслеживание текущей частоты сигнала возможно только в установившихся режимах. В переходных режимах, условие постоянства числа выборок на периоде основной гармоники не будет выполняться. Аналогично, погрешность в преобразовании будет наблюдаться при скачкообразном изменении фазы колебания, например, вследствие короткого замыкания в электроустановке.

Необходимая разрядность АЦП определяется динамическим диапазоном контролируемой величины и заданной точностью работы цифрового устройства.

Аппаратную часть профессиональных виртуальных приборов подключают к компьютеру, как правило, через шины PCI или USB. Первый

вариант работает быстрее, зато второй не требует вскрытия компьютера. Но при подключении АЦП к шине PCI имеется ряд значительных недостатков: требуется согласование специальных узлов с шиной; сложные протоколы передачи информации [2]. Самыми простыми интерфейсами внешнего АЦП для виртуального измерительного прибора могут служить компьютерные порты COM и LPT. В операционной системе MS DOS эти порты доступны программам, однако под Windows сравнительно легко программировать работу только последовательного порта, для параллельного - требуется специальный драйвер.

Исходя из необходимости передавать результаты работы АЦП в приложения Windows, выбор сделан в пользу АЦП, подключаемого к персональному компьютеру через последовательный COM порт и передающего информацию согласно стандарту RS232. Недостатком этого является ограничение скорости передачи значением 115,2 кБод. Что компенсирует простота реализации аппаратной и программной составляющих виртуального прибора [1].

Оптимальным, является подключение АЦП или платы сбора данных через универсальную шину USB. Этот интерфейс решает проблему подключения к ПК нескольких приборов (ПК имеет, как правило, несколько USB-разъемов, кроме того, можно применить хаб). USB-интерфейс имеется практически во всех современных ПК. Но, вместе с тем, использование этого интерфейса лишает совместимости с более старыми компьютерами, а также значительно возрастает стоимость такого устройства.

Рассмотрим несколько известных плат сбора данных.

PCL-711B фирмы Advantech [2] имеет 8-разрядную шину ISA, 12-разрядный АЦП без УВХ со временем преобразования 25 мкс, 8-канальный коммутатор, программируемый усилитель (x1, x2, x4, x8, x16), один 12-разрядный ЦАП, 16 линий ввода и 16 линий вывода цифровых сигналов без буферов. Указываемая погрешность АЦП - 0,01% от считанного значения +/-1 разряд. Работа через программируемый ввод-вывод и прерывания. Стоимость в Москве - 265 у.е.

Lab-PC-1200 фирмы National Instruments [2], объявляемая ею как недорогая (Low-cost). Плата имеет 8-разрядную шину ISA, 12-разрядный АЦП с УВХ и частотой дискретизации до 100 кГц, 8-канальный коммутатор, программируемый усилитель (x1, x2, x5, x10, x20, x50, x100), схему калибровки АЦП, буферную память данных АЦП типа FIFO на 512 отсчетов, два 12-разрядных ЦАП, 24 линии ввода-вывода цифровых сигналов без буфера, три счетчика/таймера. Указываемая максимальная погрешность АЦП - +/- 1,5 единицы младшего разряда. Работа через один канал прямого доступа к памяти (DMA), программируемый ввод-вывод и прерывания. Стоимость в Москве - 1084 у.е.

Платы такой структуры не имеют нормализующего фильтра, и потребитель должен сам следить за возможностью возникновения эффекта наложения частот при работе с широкополосными входными сигналами.

Существует тип плат сбора данных, часто называемых динамическими анализаторами, в которых решены проблемы с эффектом наложения частот. Такие платы по структуре похожи на звуковые и наиболее распространены на диапазон частот от 0 до 20 кГц. Характеристики плат этого класса выше звуковых и, что особенно важно, подробно объявляются и гарантируются. Пример такой платы - A2150C фирмы National Instruments [3]. Она имеет четыре одновременно работающих канала 16-разрядных сигма-дельта-АЦП с общей для всех каналов частотой дискретизации от 4 до 51,2 кГц. ЦАП отсутствует. Динамический диапазон DR (Dynamic Range) или отношение сигнал/шум SNR (Signal-to-Noise Ratio) - 93 дБ. Гармонические искажения THD (Total Harmonic Distortion) составляют 95 дБ (0,0018%). Неравномерность амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) - не более +/- 0,025 дБ. Стоимость в Москве 2332 у.е.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Общие технические требования к микропроцессорным устройствам защиты и автоматики энергосистем: РД 34.35.310 – 97.М.: СПО ОРГРЭС, 1997.
2. W. T. Thomson : «A Review of On-Line Condition Monitoring Techniques for Three-Phase Squirrel-Cage Induction Motors -Past Present and Future» Key-note address at IEEE Symposium on Diagnostics for Electrical Machines, Power Electronics and Drives, Gijon, Spain, Sept. 1999 pp 3-18.
3. Харкевич, А.А. Спектры и анализ / А.А. Харкевич – 4-е изд. М.: Гос. изд-во физико-мат. лит-ры, 1962. – 251с.

### *Түйіндеме*

*Мақалада сигналдың сандық өңдеуінде қолданатын өлшемдік жүйелерінің талдауы жүргізіледі.*

### *Resume*

*The analysis of calculating systems used for signals digital processing is considered in the article.*



## **ДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА ТОЛСТОСТЕННУЮ ОБОЛОЧКУ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ**

**В.Н. Украинец**

*Павлодарский государственный университет*

*им. С. Торайгырова*

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим бесконечно длинную круговую цилиндрическую оболочку, расположенную в линейно-упругом, однородном и изотропном полупространстве  $x \leq h$  параллельно его горизонтальной границе  $x = h$  (земной поверхности). Обозначим радиус внешней поверхности оболочки  $R_1$  ( $R_1 < h$ ), радиус внутренней поверхности –  $R_2$ . Контакт между оболочкой и окружающей её массой будем полагать либо жестким, либо скользящим. Пусть на внутреннюю поверхность оболочки действует нагрузка интенсивностью  $P$ , движущаяся с постоянной скоростью  $c$  в направлении её оси, совпадающей с осью  $z$  декартовой системы координат  $x, y, z$ . При этом будем считать, что скорость движения нагрузки меньше скоростей распространения волн сдвига в оболочке и окружающей её среде (дозвуковой случай). Физико-механические свойства массива и оболочки характеризуются соответственно следующими постоянными:  $\nu_1, \mu_1, \rho_1; \nu_2, \mu_2, \rho_2$ , где  $\nu_k$  – коэффициент Пуассона,  $\mu_k$  – модуль сдвига,  $\rho_k$  – плотность ( $k = 1, 2$ ). В дальнейшем индекс  $k = 1$  относится к массиву, а  $k = 2$  – к оболочке.

Определим реакцию упругого полупространства и оболочки на данную подвижную нагрузку, используя для описания движения оболочки и массива динамические уравнения теории упругости

$$(\lambda_k + \mu_k) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_k + \mu_k \nabla^2 \mathbf{u}_k = \rho_k \frac{\partial^2 \mathbf{u}_k}{\partial t^2}, \quad k = 1, 2, \quad (1.1)$$

где  $\lambda_k = 2\mu_k \nu_k (1 - 2\nu_k)$ ,  $\mathbf{u}_k$  – векторы смещений точек массива и оболочки,  $\nabla^2$  – оператор Лапласа.

Так как рассматривается установившийся процесс, то картина деформаций стационарна по отношению к движущейся нагрузке. Поэтому удобно перейти к подвижной системе координат  $\eta = z - ct$ . Тогда уравнения (1.1) примут вид

$$\left( \frac{1}{M_{pk}^2} - \frac{1}{M_{sk}^2} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_k + \frac{1}{M_{sk}^2} \nabla^2 \mathbf{u}_k = \frac{\partial^2 \mathbf{u}_k}{\partial \eta^2}, \quad k = 1, 2, \quad (1.2)$$

где  $M_{pk} = c/c_{pk}$ ,  $M_{sk} = c/c_{sk}$  – числа Маха;  $c_{pk} = \sqrt{(\lambda_k + 2\mu_k)/\rho_k}$ ,  $c_{sk} = \sqrt{\mu_k/\rho_k}$  – скорости распространения волн расширения – сжатия и сдвига в массиве ( $k = 1$ ) и оболочке ( $k = 2$ ).

Выражая  $\mathbf{u}_k$  через потенциалы Ламе

$$\mathbf{u}_k = \text{grad} \varphi_{1k} + \text{rot}(\varphi_{2k} \mathbf{e}_\eta) + \text{rot} \text{rot}(\varphi_{3k} \mathbf{e}_\eta) \quad k = 1, 2, \quad (1.3)$$

преобразуем уравнения (1.2) к виду

$$\nabla^2 \varphi_{jk} = M_{jk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{jk}}{\partial \eta^2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2 \quad (1.4)$$

Здесь  $M_{1k} = M_{pk}$ ,  $M_{2k} = M_{3k} = M_{sk}$ .

Используя (1.3) и закон Гука получаем выражения для компонент напряжённно-деформированного состояния массива ( $k = 1$ ) и оболочки ( $k = 2$ ) в цилиндрической системе координат  $r, \theta, \eta$

$$\begin{aligned} u_{rk} &= \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta \partial r}, \\ u_{\theta k} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta \partial \theta}, \\ u_{\eta k} &= \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \eta} + m_{sk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta^2}; \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta k} &= (2\mu_k + \lambda_k M_{pk}^2) \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta^2} + 2\mu_k m_{sk}^2 \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \eta^3}, \\ \sigma_{\theta\theta k} &= \lambda_k M_{pk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta^2} + \frac{2\mu_k}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \theta^2 \partial \eta} + \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial r \partial \eta} \right) \\ \sigma_{rr k} &= \lambda_k M_{pk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta^2} + 2\mu_k \left( \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial r^2 \partial \eta} \right), \\ \sigma_{r\eta k} &= \mu_k \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial \theta \partial \eta} + (1 + m_{sk}^2) \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \eta^2 \partial r} \right) \\ \sigma_{\eta\theta k} &= \mu_k \left( \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \theta \partial \eta} - \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial r \partial \eta} + \frac{(1 + m_{sk}^2) \partial^3 \varphi_{3k}}{r \partial \theta \partial \eta^2} \right), \\ \sigma_{r\theta k} &= 2\mu_k \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial r^2} - \frac{m_{sk}^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial r \partial \eta \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta \partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $m_{sk}^2 = 1 - M_{sk}^2$ .

В декартовых координатах выражения для компонент НДС полупространства имеют вид

$$\begin{aligned} u_{x1} &= \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_{31}}{\partial x \partial \eta}, \\ u_{y1} &= \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_{31}}{\partial y \partial \eta}, \\ u_{\eta 1} &= \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \eta} + m_{s1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{31}}{\partial \eta^2}; \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta \eta 1} &= (2\mu_1 + \lambda_1 M_{p1}^2) \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta^2} + 2\mu_1 m_{s1}^2 \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial \eta^3}, \\ \sigma_{yy1} &= \lambda_1 M_{p1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta^2} + 2\mu_1 \left( \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial y^2 \partial \eta} \right), \\ \sigma_{xx1} &= \lambda_1 M_{p1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta^2} + 2\mu_1 \left( \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial x^2 \partial \eta} \right), \\ \sigma_{x\eta 1} &= \mu_1 \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial y \partial \eta} + (1 + m_{s1}^2) \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial \eta^2 \partial x} \right), \\ \sigma_{\eta y 1} &= \mu_1 \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial y \partial \eta} - \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x \partial \eta} + (1 + m_{s1}^2) \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial y \partial \eta^2} \right), \\ \sigma_{xy1} &= 2\mu_1 \left( \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x^2} - \frac{m_{s1}^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial x \partial y \partial \eta} \right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Таким образом, для определения компонент НДС оболочки и окружающей её среды необходимо решить уравнения (1.4) используя следующие граничные условия:

- для свободной от нагрузок поверхности полупространства ( $x = h$ )

$$\sigma_{xx1} = \sigma_{xy1} = \sigma_{x\eta 1} = 0, \quad (1.9)$$

- для поверхности полости и оболочки при скользящем контакте

при  $r = R_1$   $u_{r1} = u_{r2}$ ,  $\sigma_{rr1} = \sigma_{rr2}$ ,  $\sigma_{r\eta 1} = 0$ ,  $\sigma_{r\theta 1} = 0$ ,  $\sigma_{r\eta 2} = 0$ ,  $\sigma_{r\theta 2} = 0$ ,

при  $r = R_2$   $\sigma_{rj2} = P_j(\theta, \eta)$ ,  $j = r, \theta, \eta$ ; (1.10,a)

- для поверхности полости и оболочки при жёстком контакте

при  $r = R_1$   $u_{j1} = u_{j2}$ ,  $\sigma_{rj1} = \sigma_{rj2}$ , при  $r = R_2$   $\sigma_{rj2} = P_j(\theta, \eta)$ ,  $j = r, \theta, \eta$ .  
(1.10,b)

Здесь  $P_j(\theta, \eta)$  – составляющие интенсивности подвижной нагрузки  $P(\theta, \eta)$ .

2. Аналитическое решение задачи. Рассмотрим вначале периодическую задачу, когда подвижная нагрузка  $P(\theta, \eta)$  периодична по  $\eta$  и представима в виде синусоидальной нагрузки с произвольной зависимостью от угловой координаты

$$P(\theta, \eta) = p(\theta) e^{i\xi\eta}, \quad p(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{in\theta}, \quad (2.1)$$

$$P_j(\theta, \eta) = p_j(\theta) e^{i\xi\eta}, \quad p_j(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{jn} e^{in\theta}, \quad j = r, \theta, \eta.$$

Потенциалы  $\Phi_{jk}$  также будем искать в виде периодических функций по  $\eta$

$$\Phi_{jk}(r, \theta, \eta) = \Phi_{jk}(r, \theta) e^{i\xi\eta}. \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (1.4), получим

$$\nabla_{jk}^2 \Phi_{jk} - m_{jk}^2 \xi^2 \Phi_{jk} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \quad (2.3)$$

где  $\nabla_{jk}^2$  – двумерный оператор Лапласа,  $m_{jk}^2 = 1 - M_{jk}^2$ ,  $m_{1k} \equiv m_{pk}$ ,  $m_{2k} = m_{3k} \equiv m_{sk}$ .

Используя (2.2) из (1.5) – (1.8) можно получить выражения для перемещений  $u_k^*$  и напряжений  $\sigma_{lmk}^*$  от синусоидальной нагрузки в цилиндрической ( $l, m = r, \theta, \eta$ ;  $k = 1, 2$ ) и декартовой ( $l, m = x, y, \eta$ ;  $k = 1$ ) системах координат как функции от  $\Phi_{jk}$ . Определим эти функции.

В дозвуковом случае  $M_{sk} < 1$  ( $m_{sk} > 0$ ,  $k = 1, 2$ ), и мы приходим к известным решениям [1] уравнений (2.3)

$$\Phi_{jk} = \Phi_{jk}^{(1)} + \Phi_{jk}^{(2)}, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \quad (2.4)$$

где:

- для полупространства

$$\Phi_{j1}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_{j1}r) e^{in\theta}, \quad \Phi_{j1}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2}\right) d\zeta; \quad (2.5)$$

- для оболочки

$$\Phi_{j2}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+3} K_n(k_{j2}r) e^{in\theta}, \quad \Phi_{j2}^{(2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+6} I_n(k_{j2}r) e^{in\theta}. \quad (2.6)$$

Здесь  $I_n(kr)$ ,  $K_n(kr)$  – функции Бесселя первого и второго рода от мнимого аргумента,  $k_{j1} = |m_{j1}\xi|$ ,  $k_{j2} = |m_{j2}\xi|$ ,  $j = 1, 2, 3$ ;  $g_j(\xi, \zeta)$ ,  $a_{n1}, \dots, a_{n9}$  – неизвестные функции и коэффициенты, подлежащие определению.

Как показано в [1], представление потенциалов для полупространства в форме (2.4) приводит к их следующим выражениям в декартовой системе координат:

$$\Phi_{j1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + g_j(\xi, \zeta) e^{(x-h)f_j} \right] e^{iy\zeta} d\zeta, \quad (2.7)$$

где  $f_j = \sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2}$ ,  $\Phi_{jn} = \left( \frac{\zeta + f_j}{k_{j1}} \right)^n$ ,  $j=1,2,3$ .

Воспользуемся переписанными для  $\sigma_{xy1}^*$  граничными условиями (1.9), с учётом (2.7). Выделяя коэффициенты при  $e^{iy\zeta}$  и приравнявая, в силу произвольности  $y$ , их нулю, получим систему трёх уравнений, из которой выражаем  $g_j(\xi, \zeta)$  через коэффициенты  $a_{nj}$ :

$$g_j(\xi, \zeta) = \frac{1}{\Delta^*} \sum_{l=1}^3 \Delta_{jl}^* e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl}. \quad (2.8)$$

Вид определителя  $\Delta^*$  и алгебраических дополнений  $\Delta_{jl}^*$  совпадает с аналогичными определителями для неподкрепленной полости в упругом полупространстве и определён в [1]. В частности, здесь  $\Delta^*$  – это определитель Рэлея, который в данном случае имеет вид

$$\Delta^*(\xi, \zeta) = (2\rho_*^2 - M_{s1}^2 \xi^2)^2 - 4\rho_*^2 \sqrt{\rho_*^2 - M_{p1}^2 \xi^2} \sqrt{\rho_*^2 - M_{s1}^2 \xi^2}, \quad \rho_*^2 = \zeta^2 + \zeta^2,$$

и не обращается в ноль при любых  $\zeta$ , если скорость бегущей нагрузки меньше скорости рэлеевской волны  $c_R$  в полупространстве. В противном случае в точках  $\zeta = \pm \zeta^* = \pm |\xi| \sqrt{M_R^2 - 1}$ ,  $M_R = c/c_R$  он обращается в ноль, и интегралы в формуле (2.7) становятся расходящимися.

Пусть  $\tilde{n} < \tilde{n}_R$ . В этом случае все подынтегральные функции в (2.4) непрерывны и экспоненциально стремятся к нулю на бесконечности. С учетом (2.8), формулы (2.7) имеют вид

$$\Phi_{j1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + e^{(x-h)f_j} \sum_{l=1}^3 \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta^*} e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl} \right] e^{iy\zeta} d\zeta. \quad (2.9)$$

Воспользовавшись известным разложением  $\exp(ikr \cos \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{in\theta}$  [1], представим потенциалы для полупространства (2.4) в цилиндрической системе координат, используя (2.8)

$$\Phi_{j1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{nj} K_n(k_{j1}r) + b_{nj} I_n(k_{j1}r)) e^{in\theta}, \quad (2.10)$$

где  $b_{nj} = \sum_{m=1}^3 \sum_{l=1}^{\infty} a_{ml} A_{nj}^{ml}$ ,  $A_{nj}^{ml} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta^*} \Phi_{ml} \Phi_{nj} e^{-h(f_l + f_j)} d\xi$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Таким образом, решение периодической задачи сводится к отысканию коэффициентов  $a_{n1}, \dots, a_{n9}$ , для определения которых, в зависимости от условия сопряжения оболочки со средой, следует воспользоваться граничными условиями (1.10,а) или (1.10,б), переписанными для  $u_k^*$  и  $\sigma_{rlk}^*$  ( $l = r; \theta, \eta; k = 1, 2$ ) с учётом (2.1). Приравнявая коэффициенты рядов Фурье-Бесселя при  $e^{in\theta}$ , получим бесконечную систему ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) линейных алгебраических уравнений, для решения которой можно использовать метод редукции или более удобный для решения поставленной задачи метод последовательных отражений [1], позволяющий при каждом последовательном отражении решать систему линейных уравнений блочно-диагонального вида.

Зная решение задачи для синусоидальной нагрузки, реакцию полупространства на движущуюся аperiodическую нагрузку характерного для транспортируемых объектов типа  $P(\theta, \eta) = p(\theta)p(\eta)$  формально получаем при помощи суперпозиции, используя представление нагрузки и компонент НДС среды в виде интегралов Фурье:

$$P(\theta, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P^*(\theta, \xi) e^{i\xi\eta} d\xi = p(\theta)p(\eta) = p(\theta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(\xi) e^{i\xi\eta} d\xi,$$

$$p^*(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\eta) e^{-i\xi\eta} d\eta.$$

$$u_l(r, \theta, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_l^*(r, \theta, \xi) p^*(\xi) d\xi, \quad \sigma_{lm}(r, \theta, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{lm}^*(r, \theta, \xi) p^*(\xi) d\xi \quad (2.11)$$

Однако, в зависимости от соотношения скорости бегущей нагрузки и  $\xi$ , подынтегральные функции в (2.11) могут иметь особенности, в том числе неинтегрируемые, что связано с наличием свободных волн в оболочках, встроенных в упругую среду [1,2]. При превышении скорости движения нагрузки критических скоростей, которые могут оказаться меньше, чем скорость волны Рэлея в окружающем упругом массиве, а также при дозвуковых скоростях, но превышающих рэлеевскую скорость, интегральные представления решения (2.11) будут иметь иной вид.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ержанов Ж.С., Айтиалиев Ш.М., Алексеева Л.А. Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. – Алма-Ата: Наука, 1989. – 240 с.
2. Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Динамика упругого полупространства с подкрепленной цилиндрической полостью при подвижных нагрузках // Прикладная механика. – 2009. – № 9. – С.75-85.

**Түйіндеме**

*Сернімді жартылай кеңістігінде қалын қабырғалы қабықшаға жүргізілетін жүктемелудің әрекеті туралы нақты аналитикалық шешімі алынған. Берілген мәселе тоннельдердің және жер астына терең көмілмеген құбырлардың кернеулі-деформацияланған күйін зерттеу барысында модельді болып табылады.*

**Resume**

*In elastic statement the exact analytical decision of a problem on action of mobile loading on a thick shell in elastic halfspace is received. The given problem is modelling at research tensely-deformed conditions of shallow located tunnels and underground pipelines.*

УДК 519.6:517.9

## **МЕТОД РАСЧЕТА МАССОПЕРЕДАЧИ МЕЖДУ ФАЗАМИ ПРОЯВИТЕЛЬНОГО ХРОМАТОГРАФИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА**

**Д.Т. Куренкеева, А.Т. Кенжебаева**

*Жамбылский Гуманитарно-технический университет*

После восстановления профиля хроматографической кривой необходимо рассчитать производные для концентраций в подвижной и неподвижной фазах колонны в выбранных точках пространства [1]. Расчет процесса в неподвижной фазе на основе уравнения диффузии может осуществляться любым методом решения дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с одной распределенной координатой.

Для расчета по слоям  $l_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) значений для

$$\psi'_j(l_k) = \frac{\partial y(t, x_j, l_k)}{\partial t}, \quad (1)$$

т.е. производных по времени во всех слоях жидкости предлагается проводить по методу коллокации или методу конечных разностей – традиционными методами решения дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с одной распределенной координатой.

При использовании метода коллокации для выбранного участка колонки (т.е. для значений  $x_j$ ) приближенное решение можно представить в виде:

$$\tilde{\theta}(t, x_j) = \sum_{k=1}^N \alpha_k(t) \varphi_k(x_j)$$

где  $N$  - число заранее задаваемых базисных функций  $\varphi_k(x)$ ;  $\alpha_k(t)$  - подлежащее определению, зависящие от времени коэффициенты при базисных функциях. В методе коллокации относительно этих коэффициентов записывается система ОДУ, независимой переменной в которых является время. Условие коллокации, т.е. условие выполнения уравнения (1) в выбранных точках, при этом можно записать как

$$\frac{\partial \tilde{\theta}(t, x_j)}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 \tilde{\theta}(t, x_j)}{\partial x^2}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

В матричной форме записи уравнение (2) с учетом уравнения (1) имеет вид:

$$[A] \times \left[ \frac{d\alpha_k(t)}{dt} \right] = [B],$$

где

$$[A] = [a_{jk}] = [\varphi_k(x_j)]$$

$$[B] = \left[ D_0 \sum_{k=0}^N \alpha_k(t) \frac{\partial^2 \varphi_k(x_j)}{\partial x^2} \right]$$

Каждая из базисных функций должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\varphi_k(R) = 0; \quad \left. \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

Например, можно использовать один из двух способов задания базисных функций:

$$\varphi_k(x) = \cos[(k - 0,5)\pi x]$$

$$\varphi_k(x) = (1 - x^2) \mathcal{P}_k(x^2),$$



где  $Q_k(x^2)$  - полином Якоби.

Таким образом, по методу коллокации можно получить

$$\Phi'_j(l_k) = \varphi_k(x_j) \frac{d\alpha_k(t)}{dt} = D_0 \sum_{k=1}^N \alpha_k(t) \frac{\partial^2 \varphi_k(x_j)}{\partial x_j^2}$$

Альтернативным подходом при расчете процесса молекулярной диффузии является использование метода конечных разностей. Для этого предлагается следующее разбиение по координате  $x$  (рис.1):

$$x_j - x_{j-1} = h, \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{h}{2}, \quad n - \text{ количество разбиений, } h - \text{ шаг по координате } x$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} K_p \frac{\partial C}{\partial t} & \frac{\partial y(x_1)}{\partial t} & \frac{\partial y(x_2)}{\partial t} & \dots & \frac{\partial y(x_i)}{\partial t} & \dots & \frac{\partial y(x_{n-1})}{\partial t} & \frac{\partial y(x_n)}{\partial t} & \frac{\partial y(x_n)}{\partial t} \\ \hline x_0 = 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_{n-1} & x_n & x_{n+1} = 0 \end{array}$$

Рисунок 1 - Разбиение по координате  $X$  в методе конечных разностей

Производные в уравнении (1) с учетом уравнения молекулярной диффузии распределенного компонента в пленке жидкости, нанесенной на инертный носитель, описывающего процесс в неподвижной жидкой фазе [2], которые заменяются соответствующими конечными разностями:

$$\frac{dy(x_j)}{dt} = D_0 \frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2}, \quad j = 1, \dots, n-1$$

А для  $n$ -й точки соответствующие конечные разности имеют вид:

$$\frac{dy(x_n)}{dt} = D_0 \frac{y_{n-1} - y_n}{h^2}.$$

На границе раздела фаз невозможно непосредственное использование

метода конечных разностей для расчета  $q(l) = A \frac{\partial y(t, x, l)}{\partial x} \Big|_{x=R}$ . Поэтому с учетом равновесности на границе раздела фаз, т.е.

$$K_p \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{dy}{dt} \Big|_{x=R=1},$$

целесообразно рассчитать  $\frac{dy_0}{dt}$  исходя из условия постоянства общего количества вещества, поступающего из неподвижной фазы в подвижную.

Таким образом, предложен алгоритм расчета массопередачи между фазами, гарантирующий сохранение баланса по его массе при движении распределяемого пика по длине колонны.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Куренкеева Д.Т. Математическое моделирование газо-жидкостных хроматографических процессов с учетом нестационарных граничных условий методом инвариантного погружения: I часть. – ММПТ, 2006, №2, с. 421-425.

2. Grushka E. Chromatographic peak shapes. There is origin and dependence on the Experimental parameters. – J. of Phys. Chem., 1992, v. 76, № 18, p. 2586-2593.

### *Түйүндөмө*

*Хроматографиялык колоннаның ұзына бойымен таралатын шыңның қозғалысы кезінде масса бойынша баланстың сақталуын қамтамасыз ететін хроматографиялық процестің фазалары арасындағы массаберілуді есептеу алгоритмі ұсынылған.*

### *Resume*

*An algorithm for calculating the mass transfer between phases developing chromatographic process that guarantees maintaining the balance of its weight when moving the spreading of the peak along the length of the chromatographic column.*

УДК 519.6:517.9

## **МОДИФИКАЦИЯ АСИММЕТРИЧЕСКОЙ ГАУССОВСКОЙ КРИВОЙ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФОРМЫ ХРОМАТОГРАФИЧЕСКОГО ПИКА ПО ЕГО МОМЕНТАМ**

**Д.Т. Куренкеева, А.Т. Кенжебаева**

*Жамбылский Гуманитарно-технический университет*

Восстановление формы хроматографических пиков по их моментам производится как при численном моделировании процесса, так и при автоматизации количественного хроматографического анализа на основе предсказания формы хроматографических пиков индивидуальных компонентов. В первом случае эта задача возникает как этап сведения

исходной системы уравнений в частных производных к задаче Коши [1], и поэтому должна решаться при расчете системы дифференциальных уравнений, описывающей проявительный хроматографический процесс [2], многократно на каждом шаге интегрирования системы ОДУ. Во втором случае восстановление хроматографической кривой является этапом получения оригинала при решении исходной системы линейных уравнений в частных производных методом Лапласа [3]. При этом сама исходная система решается многократно.

Наиболее точным методом восстановления кривой по моментам до третьего порядка является [4] аппроксимация хроматографических пиков асимметрической Гауссовской кривой:

$$f_A(t) = \frac{A^* \sigma_G \sqrt{2}}{\tau} e^{\left(\frac{\sigma_G}{\tau}\right)^2 \frac{1}{2} + \frac{t_G}{\tau} \frac{t^2}{\tau}} \times \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( - \left( \frac{\sigma_G}{\tau} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{t_G}{\tau} \right) \cdot \frac{\tau}{\sigma_G \sqrt{2}} - \frac{t^2}{\sigma \sqrt{2}} \right], \quad (1)$$

где  $f_A(t)$  и  $A^*$  - соответственно профиль и амплитуда пика;  $\sigma_G$ ,  $\tau$ ,  $t_G$  - параметры модели.

Недостатком данного метода аппроксимации пика является накладываемое ограничение на коэффициенты асимметрии ( $R_3$ ). По условию, коэффициент асимметрии должен быть меньше двух  $|R_3| < 2$  для асимметрической гауссовской кривой. В то же время областью допустимых значений асимметрической Гауссовской кривой является не вся числовая ось, поэтому при  $|R_3| \approx 0$  формула (1) плохо восстанавливает исходную кривую, а при  $R_3 = 0$  она не работоспособна.

Предлагается использовать следующую формулу для аппроксимации формы хроматографической кривой:

$$f(t) = \begin{cases} G(t) & , \quad n \text{ при } |R_3| < 0.02 \\ (1 - 1/|R_3|) G(t) + (1/|R_3|) f_A(t) & , \quad n \text{ при } 0.02 \leq |R_3| \leq 0.2, \\ f_A(t) & , \quad n \text{ при } |R_3| > 0.2 \end{cases} \quad (2)$$

где  $G(t) = \frac{m_i}{\sigma_i \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-M_i)^2}{2\sigma_i^2}}$  - кривая Гаусса;  $m_i$ ,  $M_i$ ,  $\sigma_i$  - параметры модели (нулевой, первый моменты и дисперсия кривой);  $f_A(t)$  - асимметрическая гауссовская кривая.

Данная формула учитывает то, что  $f_A(t)$  не восстанавливает форму пика при  $|R_3| < 0.02$ , а при  $|R_3| < 0.2$  дает практически симметричные пики. Можно легко вычислить производные и моменты комбинированной формулы  $G(t) + f_A(t)$ , что является преимуществом предлагаемой формулы.

Таким образом, разработан способ восстановления по инвариантам процесса зависимостей от продольной координаты концентраций разделяемого компонента (сорбента) в подвижной (газовой) фазе и неподвижной (жидкой) фазе. Восстановление производится с точностью до третьего момента и позволяет описывать как симметричные, так и имеющие хвосты хроматографические пики.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Петрищев С.Д. Сведение к задаче Коши математической модели неравновесной газо-жидкостной хроматографии. – Тр. МХТИ, 1986, вып. 140, с. 145-147.
2. Куренкеева Д.Т. Математическое моделирование газо-жидкостных хроматографических процессов с учетом нестационарных граничных условий методом инвариантного погружения: I часть. – ММПТ, 2006, №2, с. 421-425.
3. Петрищев С.Д., Сакодынский К.И. Математическое моделирование формирования пиков с учетом кинетики массообмена для случая линейной газожидкостной хроматографии. – ЖФХ, 1988, т. LXII, №8, с. 2147-2151.
4. Grushka E. Meyers M.N., Schettler P.D., Giddings J.C. Computer characterization of chromatographic peaks by plate height and higher central moments. – Anal. Chem., 1989, v. 41, № 7, p. 889-892.

## Түйіндемe

*Қозғалмалы (газды) және қозғалмайтын (сұйық) фазалардағы болілетін компоненттің (сорбент) концентрациясының ұзына координаттардан байланыстарын хроматографиялық процестің инварианттары бойынша қалпына келтіру әдісі жасалған. Қалпына келтіру үшінші моментке дейінгі дәлдікпен жүргізілген және симметриялы, симметриялы емес хроматографиялық шыңдарды өрнектеуге мүмкіндік береді.*

## Resume

*Developed a way to restore the invariants of the chromatographic process dependencies on the longitudinal coordinates of the concentrations of the shared component (sorbent) in the mobile (gas) phase and the stationary (liquid) phase. Restoration is accurate to the third moment and allows us to describe both symmetric and have tails of chromatographic peaks.*

## **ОПЫТ УЧЕТА ФИЗИЧЕСКИХ ТРЕБОВАНИЙ К КОНСТРУКЦИЯМ ЗЕМЛЯНОГО ПОЛОТНА**

**М.Ш. Алинова, Н.В. Прокопенко**  
*Павлодарский государственный университет  
им.С.Торайгырова*

Большая протяженность территории Республики Казахстан с севера на юг и с запада на восток при резко-континентальном климате приводит к большим различиям в промерзании грунтов и в длительности зимнего периода с устойчивым снежным покровом. Это позволяет выделить на территории республики зоны, существенно отличающиеся глубиной промерзания грунтов, количеством осадков за год и продолжительностью отрицательных температур воздуха. Известно районирование территории Республики Казахстан по глубине промерзания грунтов, предложенное д.т.н. профессором А.Д. Омаровым .

Профессором А.Д. Омаровым выделены территории с глубиной промерзания до 1м (южная зона), территории с глубиной промерзания до 2м (средняя зона) и с глубиной промерзания более 2м (северная зона). В северной зоне Казахстана глубина промерзания грунтов достигает 2,2-2,45м, а длительность морозного периода достигает 5 месяцев, в то время как на юге Казахстана есть территории, на которых промерзание грунтов зимой менее 0,5м.

Преобладающим типом грунтов в рассматриваемых зонах являются сероземы, и почвы горных районов (за исключением территории песчаных пустынь), макропористы, отличаются высоким содержанием пылеватых частиц, преобладанием легких пылеватых суглинков и тяжелых пылеватых супесей. Они относятся к пучинистым и сильно пучинистым грунтам, легко размокают при увлажнении. При замерзании в них интенсивно проявляются мерзлотные процессы с переносом поровой влаги к границе промерзания. При оттаивании они резко снижают свою прочность (до 7 и более раз по сравнению с непромерзшим грунтом). В процессе оттаивания этих грунтов идет их консолидация и упрочнение и к лету грунт вновь набирает утраченную весной прочность. В разных зонах Казахстана эти процессы захватывают разные по толщине слои грунта (в соответствии с глубиной сезонного промерзания).

В течение зимы-весны промерзание-оттаивание избыточно увлажненного грунта верха земляного полотна сопровождается морозным пучением грунта и образованием балластных лож и местных сплывов откосов в весеннее время.

Повышенное увлажнение балластных лож, в просадочных грунтах приводит к формированию в верхней части земляного полотна грязевых мешков, серьезно осложняющих эксплуатацию железнодорожного пути.

Как правило, сплывы грунта откосов возникают при глубине оттаивания 0,3-0,8м по плоскостям раздела оттаявшего и мерзлого грунта. При высоте насыпей до 4м, отсыпанных на прочное основание, весной обычно местных сплывов грунтов откосов не происходит. Чаще всего они наблюдаются на насыпях высотой более 4-6м.

При проектировании земляного полотна новых железных дорог Казахстана и усилении существующего земляного полотна необходимо учитывать как характеристики прочности местных грунтов, так и глубину их промерзания и высоту насыпей. При высоте насыпей из глинистых грунтов более 6м целесообразны проверочные расчеты их прочности и устойчивости. Для новых железных дорог Казахстана актуальна разработка зональных поперечных профилей земляного полотна из глинистых грунтов в вышеприведенных трех зонах. В прошлом необходимость более детального учета грунтовых и климатических условий предлагалась рядом специалистов, но до последнего времени для территории Республики Казахстан проблема обеспечения стабильности земляного полотна железных дорог остается нерешенной.

На железных дорогах Европы, где глубина сезонного промерзания грунтов преимущественно менее 1м, техническими требованиями определены меры, предотвращающие образование весной слабых прослоек грунта насыпей. Для этого ниже балластной призмы (которая по высоте близка к 0,6м), устраиваются из специальной) дренирующей грунтовой смеси подбалластные слои толщиной 0,3-0,5м, ниже которых может находиться глинистый грунт насыпи. Этот грунт под шпалой не промерзает зимой и не создает проблем с резкими просадками рельсовой колеи весной. Защитные слои под балластом выравнивают и снижают удельное давление от поездной нагрузки, защищают от дождевых осадков, защищают от проникновения мелких пылеватых и глинистых частиц в балласт, снижают амплитуды вибраций грунта при движении подвижного состава.

В странах Европы нормируется прочность подбалластных слоев, а в России до сих пор введены только нормы уплотнения грунтов в предположении, что эти грунты достаточно прочные. Однако повышение осевых нагрузок и скоростей движения требует более определенного подхода для обеспечения стабильности насыпей - расчета их напряженно-деформируемого состояния и регламентации прочности применяемых грунтов. Если же местные грунты не имеют достаточной прочности, как, например, суглинки с модулем упругости 25-30 МПа, то необходимо их упрочнение или усиление самой конструкции железнодорожного земляного полотна.

На железных дорогах Германии для скоростей движения поездов выше 100 км/ч учитывается показатель качества – динамическая стабильность подшпального основания.

Согласно нормам СТН Ц-01-95 под балластной призмой требуется устраивать защитный слой толщиной не менее 0,5-1,0м при залегающих ниже глинистых грунтах с влажностью выше предела раскатывания. Для супесей наименьшая толщина защитного слоя 0,5-0,7м.

По строительным нормам толщина защитных слоев из крепких грунтовых пород (песка, гравия, щебня) для дорог колеи 1520 мм принимается порядка 1,2-1,4м, что совпадает с полученными данными для длительно эксплуатируемого земляного полотна. На зарубежных железных дорогах пришли к необходимости усиления земляного полотна в зоне основной площадки. В Италии, Франции, Испании назначают защитные слои толщиной 0,2-0,5м. На железных дорогах высших классов в Германии скорость движения поездов была установлена 160 км/ч, что требовало усиления земляного полотна. Широкий размах получило устройство дренажей и противопучинных подушек. Земляное полотно усиливали для реализации скоростей движения до 160 км/ч. Опыт реализации этой программы и проведение исследований показали, что повсеместно под балластной призмой требуется укладка противодеформационных конструкций. Конструкция и размеры балластной призмы практически сохранены, но введен новый конструктивный элемент пути - защитный слой. К нему сформулированы новые требования, в том числе: по гранулометрическому составу, коэффициенту фильтрации и модулю деформации для защитных слоев из природных материалов. Эти требования обусловили необходимость специального подбора фракций материала и способов его укладки в путь. Параметры подшпального основания регламентируются нормативными документами: правилами, инструкциями и т.п. Так, например, в Германии «Правилами выполнения земляных работ DS 836» установлены численные значения: модуля деформации (сжимаемости),  $E_v2$  (МН/мм<sup>2</sup>); степень уплотнения,  $D_r$ ; коэффициент фильтрации,  $K_f$ , (м/с).

Анализ опыта зарубежных дорог показывает, что для стабильной работы железнодорожного пути значения модуля деформации подшпальных слоев целесообразно устанавливать убывающим от подошвы шпалы к основанию земляного полотна (таблица 1).

Таблица 1 - Модули деформации слоев подшпального основания

Толщина слоя, м	Модуль деформации, $E_{v2}$ , МПа	Наименование слоя
	$E_{v2} = 160-180$	балластная призма
	$E_{v2} = 120(100)$	защитный слой из природных материалов
0,5	$E_{v2} = 80 (80)$	морозозащитный слой
1,3	$E_{v2} = 60$	верхний слой земляного полотна
0,5	$E_{v2} \geq 40$	нижний слой земляного полотна
0,5		грунты основания

Реализация этих параметров для действующих линий за рубежом осуществляется при их капитальном ремонте или реконструкции пути. В качестве материала защитных слоев используются искусственно подобранные песчано-гравийные смеси. В последние годы начали широко применять синтетические материалы, разделяющие балластную призму и земляное полотно: ковры нетканого материала, плиты из пенополистирола. Они препятствуют свободному увлажнению верха земляного полотна, загрязнению балласта снизу и служат теплоизоляторами (плиты пенополистирола и др.).

В России согласно строительно-техническим нормами СТН Ц-01-95 и СНиП 32-01-95 широко применяется усиление балластной конструкции укладкой защитного слоя из дренирующего грунта, в том числе совместно с геотекстилем (нетканым материалом) и плитами пенополистирола. Толщина этого слоя назначается расчетом, но не менее 0,8- 1,0 м для суглинков и глин и 0,5-0,7 м для супесей.

Геотекстиль - это нетканое или тканое синтетическое полотно, которое в конструкции земляного полотна может выполнять роль:

- разделительного слоя между конструктивными слоями дорожной одежды;
- фильтрующего слоя, способствующего отводу воды из грунтов с малым коэффициентом фильтрации и повышению их плотности и прочности;
- армирующего элемента, распределяющего напряжения в грунтовом массиве и частично воспринимающего растягивающие усилия.

Применение этих материалов позволяет снизить объемы земляных работ (за исключением случаев необходимости удаления слабых грунтов), сократить расход привозных грунтов, обеспечить устойчивость основания и откосов насыпей. Устройство прослоек также исключает (уменьшает) взаимопроникновение материалов насыпи и грунта основания (разделительная прослойка), улучшает условия отсыпки и уплотнения насыпи, что облегчает технологию производства работ, сокращает потери материала насыпи (технологическая прослойка).



В последние годы геосинтетические материалы стали применяться и в Республике Казахстан. Одним из предприятий, выпускающих геосинтетические материалы, является ТОО «КазГеоСинтетика».

Настоящие проектные решения разработаны исходя из необходимости создания бездеформативного и равножесткого подрельсового основания, обеспечивающего стабильность пути на расчетный период времени. Проектные решения разработаны в соответствии с требованиями СНиП РК 3.03-01-2001, СНиП РК 3.03-09-2003, Рекомендации по применению геосинтетических материалов КазДорНИИ и других ведомственных нормативных документов, а так же опыта применения геокантос KGS в РК (при ремонте ж.д. на перегоне Никельтау-Хромтау 7км) и в РФ РФ (при усиленном капитальном ремонте линии С. Петербург-Выборг-Гос.граница).

Мероприятия по усилению земляного полотна предусмотрены «Техническими условиями на работы по ремонту и планово-предупредительной выправке пути» № ЦПТ51 РФ. Ими предусматриваются работы по планировке основной площадки и устройству подбалластных защитных слоев. В качестве таких слоев уже достаточно широко используются покрытия из пенополистирола и геотекстиля. Однако в местах повышенного динамического воздействия и при неблагоприятных инженерно-геологических условиях их технические характеристики не позволяют в полной мере ликвидировать причины деформаций основной площадки. В этих случаях уместно использовать геокантос KGS, представляющие собой объемные конструкции из полимерных материалов совместно с геотекстилем.

При устройстве насыпей железных дорог защитные (технологические и разделительные) прослойки из ГТ KGS разновидностей 300ч600 устраивают непосредственно на слабом грунте – по всей ширине подошвы насыпи с запасом не менее 0,5 м в каждую сторону (рисунок 3а). В этом случае возможна как поперечная, так и продольная укладка полотен ГТ с перекрытием не менее 0,5 м. При продольной укладке величина перекрытия «b» должна быть уточнена с учетом ожидаемой осадки «S» ( $b = 0,15 + 0,2 S$ , м), рассчитанной в соответствии с действующими нормативами.

Подобное решение рекомендуется применять также при устройстве земляного полотна на основаниях, сложенных глинистыми грунтами с коэффициентом консистенции  $> 0,5$ , мокрыми солончаками и т.д.

Обеспечение устойчивости основания и откосов постоянных дорог при снижении неравномерности осадки достигается путем увеличения жесткости нижней части насыпи. В этом случае должна быть обеспечена равнопрочность устраиваемой прослойки из ГТ как в продольном, так и в поперечном

направлениях. Армирующие (одновременно защитные) прослойки из ГТ KGS 450ч600 укладывают в один или два слоя, объединяя их в обойму (рисунок 3б) для защиты откосных частей насыпи и достижения армирующего эффекта (повышения жесткости нижней части насыпи и равномерности осадки). В этом случае применяют поперечную укладку полотен ГТ; при этом требования к механической прочности ГТ должны быть повышены.

При строительстве железных дорог в сложных грунтово-гидрологических условиях ГТ укладывают непосредственно на основание (рисунок 3в) или в нижней части насыпи (см. рисунок 3г). Основные конструктивные решения представлены на рисунке 3.

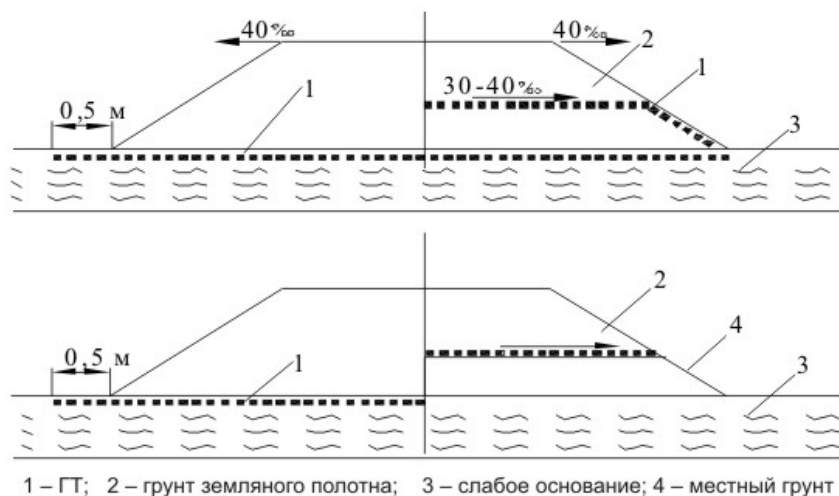


Рисунок 3 - Прослойки из ГТ ТОО «КазГеоСинтетика» в нижней части и основании насыпи ж/д полотна  
(а - при использовании привозных грунтов; б- грунт в обойме; в,г- при использовании местных грунтов повышенной влажности)

В прсекте Строительство железнодорожной линии «Узень – государственная граница с Туркменистаном» земляное полотно запрескитировано в соответствии с требованиями СНиП 3.03-01-2001 «Железные дороги колеи 1520мм», другими нормативными документами. На всем протяжений земляное полотно предусмотрено из обыкновенных грунтов с шириной поверху 7,3м. Прескитируемсе земляное полотно предпологется отсыпать, учитывая местные условия, из сосредоточенных карьеров и разрабатываемых выемок. В соответствии с Заданием Заказчика и на оснований рекомендации ГП

«РосДорНИИ» разработаны конструкции стабилизаций земляного полотна, а суглинистых и супесчаных грунтах с применением геосинтетических материалов (геокаркас, геотекстиль). Принятый метод стабилизаций земляного полотна состоит в укладке армирующего материала геотекстиль -250гр/м<sup>2</sup> и геокаркас 200мм в рабочем слое земляного полотна.

Технология производства работ при строительстве земляного полотна железных дорог с использованием геотекстильного материала (ГТ) и объемной георешетки (геокаркас) включает в себя все этапы строительства традиционным методом.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Омаров А.Д. Земляное полотно железных дорог Казахстана - Алматы: изд. «Б». - 2000.
2. Шахунянц Г.М. Железнодорожный путь - М.:Транспорт, 1987. - 3-е изд.
3. Справочник по земляному полотну эксплуатируемых железных дорог // Под ред. Подпалого А.Ф. М.:Транспорт, 1981.
4. Технические указания на применение пенополистирола и геотекстиля при усилении основной площадки земляного полотна без снятия рельсошпальной решетки - М.: ПТКБ ЦП МПС, 1999.
5. Методические рекомендации по применению геосинтетических материалов в дорожном строительстве // РРК 218-42. - Астана, 2005.

### *Түйіндеме*

*Тону тереңділігіне байланысты темір жолдарды аудандастырудың мәселелері қарастырылған. Қазақстан мен шетел елдердің геотекстильден жасалынған әсер қабатының шиеленісті – деформацияланған қалпы тәжірибесі көрсетілген.*

### *Resume*

*Questions of division into districts of the railways depending on depth of freezing are considered. Experiences of foreign countries and Kazakhstan the intense-deformed condition of an earthen cloth with the device of a protective layer from geotextiles are resulted.*

## **ЗАДАЧА О ДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ НА МНОГОСЛОЙНУЮ ТОНКОСТЕННУЮ ОБОЛОЧКУ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

**В.Н. Украинаец, М.К. Бейсембаев,  
С.Р. Гирнис, А.К. Тлеулесов**

*Павлодарский государственный университет  
им. С. Торайгырова*

В статье [1] решена задача о действии на внутреннюю поверхность тонкой круговой цилиндрической однородной (однослойной) оболочки, расположенной в упругом пространстве, неосесимметричной подвижной нагрузки. Используя данное решение, в настоящей работе рассматривается подобная задача в случае неоднородности (многослойности) оболочки.

Рассмотрим бесконечно длинную круговую цилиндрическую многослойную тонкостенную оболочку, состоящую из  $N$  концентрических слоёв с разными физико-механическими и геометрическими характеристиками, расположенную в линейно-упругом, однородном и изотропном пространстве, отнесённому к подвижной цилиндрической системе координат  $r, \theta, \eta = z - ct$  (рисунок 1). В силу малости толщины слоёв оболочки можно принять, что они контактируют вдоль срединных поверхностей. Контакт между слоями оболочки и оболочки с окружающей её упругой средой (массивом) полагаем жёстким.

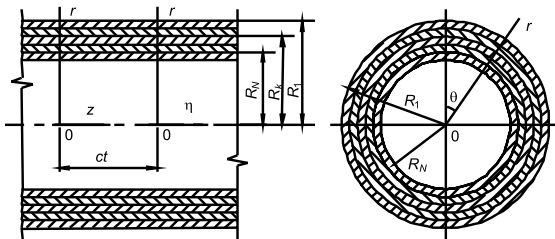


Рисунок 1 – Многослойная оболочка в упругом пространстве

Пусть на внутреннюю поверхность оболочки действует движущаяся с постоянной скоростью  $c$  в направлении оси  $z$  нагрузка интенсивностью

$P(\theta, \eta)$ , периодичная по  $\eta$  и представима в виде синусоидальной нагрузки с произвольной зависимостью от угловой координаты

$$P(\theta, \eta) = p(\theta) e^{i\eta}, \quad p(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{n\theta}, \quad (1)$$

$$P_j(\theta, \eta) = p_j(\theta) e^{i\eta}, \quad p_j(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{jn} e^{n\theta}, \quad j = r, \theta, \eta,$$

где  $P_j(\theta, \eta)$  – составляющие интенсивности подвижной нагрузки  $P(\theta, \eta)$ .

При этом будем считать, что скорость движения нагрузки меньше скорости распространения волн сдвига в окружающей оболочку среде (дозвуковой случай).

Последовательно пронумеруем слои оболочки, присвоив контактирующему с массивом слою порядковый номер 1. Для описания движения  $k$ -го слоя воспользуемся классическими уравнениями теории тонких оболочек в подвижной системе координат [1], переписанными в виде

$$\begin{aligned} & \left[ 1 - \frac{(1 - \nu_{0k}) \rho_{0k} c^2}{2\mu_{0k}} \right] \frac{\partial^2 u_{0jk}}{\partial \eta^2} + \frac{1 - \nu_{0k}}{2R_k^2} \frac{\partial^2 u_{0jk}}{\partial \theta^2} + \frac{1 + \nu_{0k}}{2R_k} \frac{\partial^2 u_{00k}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{\nu_{0k}}{R_k} \frac{\partial u_{0k}}{\partial \eta} = \\ & = \frac{1 - \nu_{0k}}{2\mu_{0k} h_{0k}} (q_{jk} - q_{j,k-1}) \\ & \frac{1 + \nu_{0k}}{2R_k} \frac{\partial^2 u_{0jk}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{(1 - \nu_{0k})}{2} \left( 1 - \frac{\rho_{0k} c^2}{\mu_{0k}} \right) \frac{\partial^2 u_{00k}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{R_k^2} \frac{\partial^2 u_{00k}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R_k} \frac{\partial u_{0k}}{\partial \theta} = \\ & = \frac{1 - \nu_{0k}}{2\mu_{0k} h_{0k}} (q_{0k} - q_{0,k-1}) \quad (2) \\ & \frac{\nu_{0k}}{R_k} \frac{\partial u_{0jk}}{\partial \eta} + \frac{1}{R_k^2} \frac{\partial u_{00k}}{\partial \theta} + \frac{h_{0k}^2}{12} \nabla^2 \nabla^2 u_{0jk} + \frac{(1 - \nu_{0k}) \rho_{0k} c^2}{2\mu_{0k}} \frac{\partial^2 u_{0jk}}{\partial \eta^2} + \frac{u_{0jk}}{R_k^2} = \\ & = - \frac{1 - \nu_{0k}}{2\mu_{0k} h_{0k}} (q_{jk} - q_{j,k-1}) \end{aligned}$$

где  $k = 1, 2, \dots, N$ ;  $\nu_{0k}$ ,  $\mu_{0k}$ ,  $\rho_{0k}$  и  $h_{0k}$  – коэффициент Пуассона, модуль сдвига, плотность и толщина  $k$ -го слоя;  $u_{0jk}$  и  $q_{jk}$ ,  $q_{j,k-1}$  – соответственно перемещения точек срединной поверхности  $k$ -го слоя и составляющие реакции смежных слоёв ( $j = \eta, \theta, r$ ), при  $k = 1$   $q_{j0} = \sigma_{rj} \Big|_{r=R_1}$  – составляющие реакции окружающей оболочку среды ( $\sigma_{rj}$  – компоненты тензора напряжений в среде), при  $k = N$   $q_{jN} = P_j(\theta, \eta)$ ;  $\nabla^2$  – оператор Лапласа.

Для описания движения массива используем динамические уравнения теории упругости

$$(M_p^{-2} - M_s^{-2}) \text{grad div } \mathbf{u} + M_s^{-2} \nabla^2 \mathbf{u} = \partial^2 \mathbf{u} / \partial \eta^2. \quad (3)$$

Здесь  $M_p = c/c_p$ ,  $M_s = c/c_s$  – числа Маха,  $c_p = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$ ,  $c_s = (\mu/\rho)^{1/2}$  – скорости распространения волн расширения – сжатия и сдвига в массиве,  $\lambda = 2\mu\nu/(1-2\nu)$ ;  $\nu$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  – коэффициент Пуассона, модуль сдвига, плотность среды;  $\mathbf{u}$  – вектор смещения среды.

Вектор  $\mathbf{u}$  можно выразить через потенциалы Ламе [2]

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi_1 + \text{rot}(\varphi_2 \mathbf{e}_\eta) + \text{rot rot}(\varphi_3 \mathbf{e}_\eta), \quad (4)$$

которые, как следует из (3) и (4), удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2 \varphi_j = M_j^2 \partial^2 \varphi_j / \partial \eta^2, \quad j = 1, 2, 3, \quad (5)$$

где  $M_1 = M_p$ ,  $M_2 = M_3 = M_s$ .

В установившемся состоянии зависимость всех величин от  $\eta$  имеет вид (1), поэтому  $\varphi_j(r, \theta, \eta) = \Phi_j(r, \theta) e^{i\xi\eta}$ ,

$$\nabla_2^2 \Phi_j - m_j^2 \xi^2 \Phi_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (6)$$

где  $\nabla_2^2$  – двумерный оператор Лапласа,  $m_j = (1 - M_j^2)^{1/2}$ ,

$$u_{0,k}(\theta, \eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{0,nk} e^{n\theta} e^{i\xi\eta}, \quad (7)$$

$$q_k(\theta, \eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_{nk} e^{n\theta} e^{i\xi\eta}, \quad j = r, \theta, \eta.$$

Выразив компоненты напряжённо-деформированного состояния (НДС) среды через потенциалы Ламе можно получить выражения для перемещений  $u_l$  ( $l = r, \theta, \eta$ ) и напряжений  $\sigma_{lm}$  ( $l, m = r, \theta, \eta$ ) от синусоидальной нагрузки как функции от  $\Phi_j$ .

В дозвуковом случае  $M_s < 1$ , и решения уравнений (6) имеют вид:

$$\Phi_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n K_n(k_j r) e^{n\theta}. \quad (8)$$

Здесь  $K_n(k_j r)$  – функции Макдональда,  $k_j = |m_j \xi|$ ,  $a_{nj}$  – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению,  $j = 1, 2, 3$ .

Подставляя найденные для потенциалов соотношения в выражения для  $u_l$  и  $\sigma_{lm}$  ( $l, m = r, \theta, \eta$ ), получим для них новые выражения, где неизвестными будут только коэффициенты  $a_{nj}$ .

Определим эти коэффициенты по аналогии с [1] из граничных условий на поверхности полости, допуская, что, в силу малости толщины оболочки,  $R_k = R$ , где  $R$  – радиус поверхности полости,  $k = 1, 2, \dots, N$ . По этой же причине

и исходя из условия жёсткого сцепления слоёв оболочки и последней с массивом, принимаем

$$u_{0,k} = u_{0,j}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad j = \eta, \theta, r. \quad (9)$$

Тогда граничные условия на поверхности полости будут иметь такой же, как в [1] вид

$$u_j \Big|_{r=R} = u_{0,j}, \quad j = \eta, \theta, r. \quad (10)$$

Подставляя (7) с учётом (9) в (2), для  $n$ -го члена разложения получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1k}^2 u_{0m\eta} + v_{\alpha k} n \xi_0 u_{0n\theta} - 2iv_{0k} \xi_0 u_{0n} &= G_{0k} (q_{m\eta k} - q_{m\eta k-1}) \\ v_{\alpha k} n \xi_0 u_{0m\eta} + \varepsilon_{2k}^2 u_{0n\theta} - 2inu_{0n} &= G_{0k} (q_{n\theta k} - q_{n\theta k-1}), \\ 2iv_{0k} \xi_0 u_{0m\eta} + 2inu_{0n\theta} + \varepsilon_{3k}^2 u_{0n} &= G_{0k} (q_{nrk} - q_{nrk-1}), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $k = 1, 2, \dots, N$ ;

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1k}^2 &= \alpha_{0k}^2 - \varepsilon_{0k}^2, \quad \varepsilon_{2k}^2 = \beta_{0k}^2 - \varepsilon_{0k}^2, \quad \varepsilon_{3k}^2 = \gamma_{0k}^2 - \varepsilon_{0k}^2, \quad \xi_0 = \xi R, \\ \alpha_{0k}^2 &= 2\xi_0^2 + v_{01k} n^2, \quad \beta_{0k}^2 = v_{01k} \xi_0^2 + 2n^2, \quad \gamma_{0k}^2 = \chi_k^2 (\xi_0^2 + n^2) + 2, \quad \varepsilon_{0k}^2 = v_{01k} \xi_0^2 M_{s0k}^2, \\ v_{01k} &= 1 - v_{0k}, \quad v_{02k} = 1 + v_{0k}, \quad M_{s0k} = c / c_{s0k}, \quad c_{s0k} = \sqrt{\frac{\mu_{0k}}{\rho_{0k}}}, \quad \chi_k^2 = \frac{h_{0k}^2}{6R^2}, \quad G_{0k} = -\frac{v_{01k} R^2}{\mu_{0k} h_{0k}}. \end{aligned}$$

Если разделить обе части уравнений (11) на  $G_{0k}$  и произвести суммирование систем этих уравнений по  $k$  от 1 до  $N$ , то можно получить вместо  $k$  систем уравнений – одну, подобного [1] вида

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^2 u_{0m\eta} + v_{\alpha} n \xi_0 u_{0n\theta} - 2iv_0 \xi_0 u_{0n} &= P_{m\eta} - q_{m\eta 0}, \\ v_{\alpha} n \xi_0 u_{0m\eta} + \varepsilon_2^2 u_{0n\theta} - 2inG_0^{-1} u_{0n} &= P_{n\theta} - q_{n\theta 0}, \\ 2iv_0 \xi_0 u_{0m\eta} + 2inG_0^{-1} u_{0n\theta} + \varepsilon_3^2 u_{0n} &= P_n - q_n 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{где } \varepsilon_1^2 = \sum_{k=1}^N \varepsilon_{1k}^2 / G_{0k}, \quad \varepsilon_2^2 = \sum_{k=1}^N \varepsilon_{2k}^2 / G_{0k}, \quad \varepsilon_3^2 = \sum_{k=1}^N \varepsilon_{3k}^2 / G_{0k}, \quad v_0 = \sum_{k=1}^N v_{0k} / G_{0k},$$

$$v_{\alpha} = \sum_{k=1}^N v_{\alpha k} / G_{0k}, \quad G_0^{-1} = \sum_{k=1}^N 1 / G_{0k}.$$

Разрешая (12) относительно  $u_{0m\eta}$ ,  $u_{0n\theta}$ ,  $u_{0nr}$ , находим

$$u_{0m\eta} = \frac{1}{\delta_n} \sum_{j=1}^3 \delta_{\eta j} (P_{nj} - q_{nj0})$$

$$u_{0n\theta} = \frac{1}{\delta_n} \sum_{j=1}^3 \delta_{\theta j} (P_{j\theta} - q_{j\theta 0})$$

$$u_{0\pi} = \frac{1}{\delta_n} \sum_{j=1}^3 \delta_j (P_j - q_{j0}).$$

Здесь  $\delta_n = \delta_{|n|} = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^2 - (\varepsilon_1 \xi_1)^2 - (\varepsilon_2 \xi_2)^2 - (\varepsilon_3 \xi_3)^2 + 2\xi_1 \xi_2 \xi_3$ ,

$$\delta_{\eta 1} = (\varepsilon_2 \varepsilon_3)^2 - \xi_1^2, \quad \delta_{\eta 2} = \xi_1 \xi_2 - \varepsilon_3 \varepsilon_3^2, \quad \delta_{\eta 3} = i(\varepsilon_2^2 \xi_2 - \xi_1 \xi_3)$$

$$\delta_{\theta 1} = \delta_{\eta 2}, \quad \delta_{\theta 2} = (\varepsilon_1 \varepsilon_3)^2 - \xi_2^2, \quad \delta_{\theta 3} = i(\varepsilon_1^2 \xi_1 - \xi_2 \xi_3)$$

$$\delta_{r1} = -\delta_{\eta 3}, \quad \delta_{r2} = -\delta_{\theta 3}, \quad \delta_{r3} = (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 - \xi_3^2,$$

$$\xi_1 = 2\kappa_0^{-1}, \quad \xi_2 = 2\nu_0 \xi_0, \quad \xi_3 = \nu_a \xi_0 n,$$

для  $P_{nj}$  и  $q_{nj}$  индекс  $j = 1$  соответствует индексу  $\eta$ ,  $j = 2 - \theta$ ,  $j = 3 - r$ .

Подставляя в (10) соответствующие выражения и приравнявая коэффициенты рядов при  $e^{in\theta}$ , получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений с определителем нормального типа для определения коэффициентов  $a_{nj}$ .

В случае произвольной периодической по  $\eta$  нагрузки, разлагая ее в ряд Фурье, для каждой составляющей ряда получим выше рассмотренную задачу.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Украинец В.Н., Гирнис С.Р. Задача о действии несимметричной подвижной нагрузки на подкреплённую полость в упругом пространстве. // Вестник ПГУ. Сер. физ.- мат. – Павлодар, 2005. – № 4. – С. 33-41.

2. Гузь Л.И., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – Киев: Наукова думка, 1978. – 308 с.

## Түйіндеме

*Бұл жұмыста серпінді кеңістікте орналасқан жіңішке көпқабатты айнымалы цилиндрлық қабықшалы қуысына бекітілген осесимметриялық емес қозғалмалы периодты жүктемесінің әсері туралы есебі шешілген.*



Қабықша қабатының қозғалысы жіңішке қабықша теориясының классикалық теңдеулермен, ал кеңістік қозғалысы — координаттардың қозғалмалы жүйесіндегі серпінді теориясының динамикалық теңдеулермен сипатталады. Периодты жүктеме қуысының осі бойынша дыбыстық жылдамдығынан кем массивтің кезінде кернеу-деформациялық күйінің компоненттерін анықтауға арналған есептердің аналитикалық шешімі берілген.

### **Resume**

*In persisting work is solved problem about action on supported by fine multi-layer circular cylindrical shell cavity, located in elastic space, asymmetrical rolling periodic load.*

*Moving the layers of the shell is described by classical equations to theories fine shell, but space – a dynamic equations to theories to bounce in rolling coordinate system. Analytical decision of the problem of the determination component tense-deformed conditions of the array is received under subsonic velocity periodic on axis of the cavities of the load.*

УДК 681.51

## **КОНКУРС ЗАЯВОК НА СРЕДСТВА И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ**

**Н.Н. Пудич, О.Г. Потапенко**

*Павлодарский государственный университет  
им. С.Торайгырова*

В настоящее время все большее число как государственных, так и частных предприятий начинают понимать, что в существующих рыночных условиях наиболее рационально технически и выгодно экономически приобретать продукцию, работы, услуги путем проведения конкурсов (тендерных торгов). Одним из основных этапов конкурса на любую продукцию, работы, услуги является экспертиза полученных конкурсных заявок (предложений), заключающаяся в их оценке и сопоставлении для определения победителя конкурса. От методики организации и проведения экспертизы заявок напрямую зависят результаты конкурса. Этот факт определяет актуальность и практическую важность рассматриваемых в статье вопросов.

Поскольку каждая заявка оценивается по многим, заданным заказчиком критериям (показателям), то и общая ее оценка получается на основе следующей двухэтапной процедуры:

- на первом этапе экспертизы на основе своих знаний оценивают каждую заявку по каждому отдельному критерию;
- на втором этапе методом решения задачи многокритериального выбора специальная программа вычисляет общую оценку каждой заявки, как определенную функцию от всех полученных на первом этапе оценок заявки каждым экспертом по каждому критерию.

Метод формирования экспертной комиссии по рассмотрению и анализу заявок.

Экспертная комиссия должна формироваться из высококвалифицированных, авторитетных специалистов, обладающим широким кругозором в области современных средств и систем автоматизации производства или в области управления конкретным объектом, на автоматизацию которого объявлен конкурс. Экономические аспекты конкурса, ввиду их достаточной прозрачности и простоты при данной тематике конкурса, могут оцениваться всеми техническими экспертами. Возможно привлечение специальных экспертов по отдельным техническим критериям (например, по надежности средств) и/или по отдельным частям заявок (например, по оценке датчиков или SCADA-программ).

Общие критерии отбора экспертов:

- высокая квалификация в области предмета конкурса;
- знание свойств объекта автоматизации;

Отбор экспертов по указанным критериям должен производиться конкурсной комиссией вне зависимости от места работы экспертов (из сотрудников предприятия-заказчика, из сотрудников других предприятий данной или любых других отраслей, из сотрудников отраслевых НИИ, проектных и конструкторских организаций).

Анализ работы экспертов.

Рациональной формой экспертной комиссии является ее проведение на территории заказчика, где эксперты знакомятся с особенностями автоматизируемого объекта, рассматривают, анализируют, обсуждают представленные конкурсные заявки, через представителя конкурсной комиссии выясняют неясные моменты отдельных положений в конкурсных заявках, а затем оценивают по балльной системе каждую конкурсную заявку по каждому заданному критерию.

Объективность оценок достигается и за счет усреднения разных мнений.

Методика оценки заявок экспертами по отдельным заданным критериям.

Экспертам передаются все материалы, необходимые для экспертизы: конкурсная документация, которая была задана участникам конкурса; полученные заявки, удовлетворяющие обязательным требованиям конкурсной документации; перечень критериев оценки конкурсных заявок; соответствие качественных оценок отдельных заявок по этим критериям количественным оценкам в баллах; весовые коэффициенты отдельных критериев (степени значимости отдельных критериев для заказчика).

Экспертам дают разъяснения по всем возникающим у них вопросам, касающимся содержания отдельных заявок, конкретизации заданных критериев и соответствия отдельных характеристик продукции их максимальным и минимальным оценкам, формы голосования, используемого способа определения общей (итоговой) ранжировки заявок.

Проводится голосование: сбор бюллетеней с результатами голосования экспертов по отдельным критериям и выдача им результата решения задачи многокритериального выбора.

Форма бюллетеня представлена ниже (таб. 1):

Таблица 1

Форма бюллетеня

№ критерия	1	2	3	4	....	i-1	i
№ заявки							
1							
2							
...							
j-1							
j							

Пример заполненного экспертом бюллетеня представлен ниже:

№ критерия	1	2	3	4	....	i-1	i
№ заявки							
1	8	9	4	3	...	3	5
2	4	6	8	7	...	6	3
...	...	...	...	...	...	...	...
j-1	7	1	6	8	...	8	2
j	9	2	4	5	...	7	4

Вычисление общих оценок заявок и формирование информационных документов.

Особенности алгоритма общей оценки каждой заявки. При вычислении общих оценок конкурсных заявок учитываются:

- оценки заявок экспертов по отдельным критериям;
- весовые коэффициенты отдельных критериев;
- весовые коэффициенты отдельных экспертов.

Алгоритм вычисления общих оценок учитывает, что конкурсные заявки по разным критериям может оценить разное число экспертов, кроме того, отдельные эксперты могут пропускать оценки некоторых конкурсных заявок по некоторым критериям. Следовательно, число оценок каждой конкурсной заявки по каждому критерию может быть разным.

С информационной точки зрения целесообразно вычислить:

- результирующую общую оценку каждой заявки;
- оценки, усредненные по всем экспертам, принявшим участие в голосовании;
- оценки каждой заявки по отдельным критериям.

Пример формирования программой таблицы с указанными оценками приведен ниже (таб. 2).

Таблица 2

Сформированная программой таблица с указанными оценками

№ заявки	Средние оценки заявок по отдельным критериям				Общая оценка заявки
	1	2	...	i	
1	6.3	5.6	...	8.1	6.5
2	7.9	6.2	...	9.4	7.8
...	...	...	...	...	...
j-1	5.1	9.4	...	8.8	8.9
j	4.8	7.1	...	8.2	6.9

По этой таблице экспертная комиссия может судить о результатах своей работы:

- полученной сравнительной оценке заявок по отдельным критериям (насколько отдельные, важные для заказчика свойства заявок отличаются друг от друга);
- общей оценке заявок по совокупности заданных критериев (итоговой ранжировке заявок);
- сравнительной разнице отдельных заявок по их эффективности для заказчика (близости общих оценок разных заявок).

Кроме указанных оценок заявок, полезно выполнить графический интерфейс, например, диаграммы разброса мнений экспертов, которые можно использовать для приближенной оценки согласованности мнений экспертов, квалификации и объективности отдельных экспертов, принимавших участие в работе экспертной комиссии. Ниже представлен пример диаграммы и дан содержательный анализ.

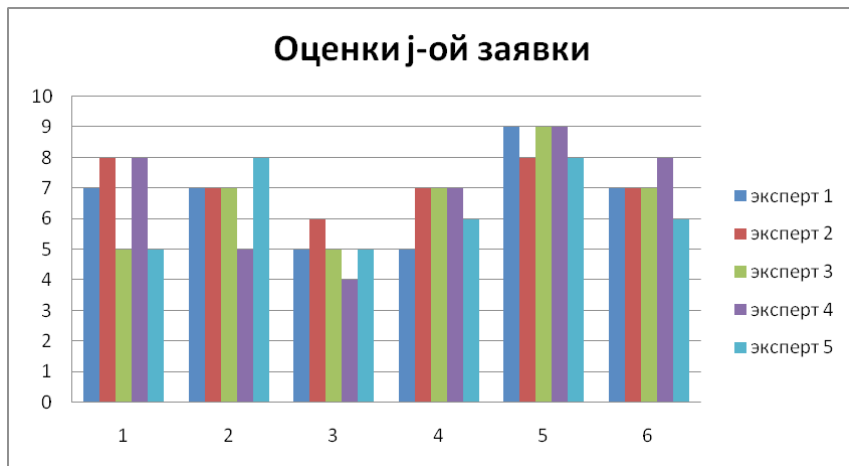


Рисунок 1 – Диаграмма оценки j-ой заявки по шести критериям пятью экспертами

На рис. 1 показана диаграмма оценки j-ой заявки по шести критериям пятью экспертами, составляющими экспертную комиссию. Разброс оценок заявки по разным критериям у разных экспертов лежит в диапазоне 1-3 балла, что свидетельствует о хорошей согласованности мнений экспертов и примерно одинаковой их квалификации.

Получив результаты вычислительной обработки экспертных оценок, эксперты после их обсуждения принимают одно из следующих решений:

- при согласии с полученной общей ранжировкой заявок утверждают полученные результаты;

- при больших отклонениях оценок некоторых отдельных экспертов от оценок большинства экспертов возможно дальнейшее обсуждение или исключение бюллетеней, оценки в которых представляются экспертной комиссии сомнительными.

В конечном счете, после указанной одно- или двухэтапной вычислительной обработки экспертная комиссия утверждает, полученные результаты общей ранжировки конкурсных заявок и составляет заключение. Заключение экспертной комиссии содержит результаты экспертизы, ее качественное обоснование и рекомендации заказчику.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Объективные закономерности сложной автоматизации в промышленности. Журнал «Промышленные АСУ и контроллеры», № 2 2004. - с. 6.

2. Потапенко О.Г., Полякова Л.А., Пудич Н.Н. Автоматизация диспетчеризации производственных процессов промышленных предприятий. MES – системы. Журнал «Вестник ПГУ», № 2- 2008. с. 6.

***Түйіндеме***

*Конкурстың ең басты кезеңі (тендердің ) – мәлімдемелер конкурсына түскен экспертиза (ұсыныстардың) және оның ұйымы мен өткізу тәсілдері қарастырылады.*

***Resume***

*The main stages of the competition (tender) - examination of applications received for the competition - and provides a method of its organization and conduct.*

**НАШИ АВТОРЫ**

**Акпаибетов Дархан Берикович** – к.т.н., Казахский национальный технический университет им. К.И. Сатпаева, г. Алматы.

**Алинова Мансия Шарпатовна** – к.п.н., профессор кафедры «Физики и приборостроения», Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, г. Павлодар.

**Аринов Еркин** - д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедры физики и математики им. А. Ермакова, Жезказганский университет им. О.А. Байконурова, г. Жезказган.

**Бейсембаев Мурат Кулханович** – к.т.н., доцент кафедрой БЖДиЗОС, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, г. Павлодар.

**Гирнис Светлана Римонтасовна** – ст. преподаватель кафедры БЖДиЗОС, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, г. Павлодар.

**Далингер Виктор Алексеевич** - д.п.н., профессор, заведующий кафедрой теории и методики обучения математике, Академик РАЕ, Академик МАН ВШ, ГОУ ВПО «Омский государственный педагогический университет», Россия, г. Омск.

**Дегтярёв Алексей Викторович** – магистрант, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, г. Павлодар.

**Жукинов Марат Каратаевич** - доцент кафедры физики и приборостроения, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, г. Павлодар.

**Испулов Нурлыбек Айдаргалиевич** – к.ф.-м.н., доцент кафедры физики и приборостроения, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, г. Павлодар.

**Кенжебаева Алима Толжуовна** – к.п.н., доцент, кафедра «Высшая математика и информационные технологии», Жамбылский гуманитарно-технический университет, г. Тараз.

**Кисабекова Асемгуль Агибаевна** - Инновационный Евразийский университет, г. Павлодар.

**Куренкеева Дарияш Турдалиевна** - к.ф.-м.н., доцент, зав. кафедрой «Информатика және есептеу техникасы», международный казахско-турецкий университет им. А. Ясауи, г. Тараз.

**Мажит Зара Саттаркызы** – ст. преподаватель кафедры физики, Павлодарский государственный педагогический институт, г. Павлодар.

**Потапенко Олег Григорьевич** - заведующий кафедрой «Вычислительная техника и программирование», к.т.н., профессор, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, г. Павлодар.

**Прокопенко Наталья Валерьевна** – магистрант, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, г. Павлодар.

**Пудич Наталья Николаевна** - ст. преподаватель ПГУ, кафедра «Вычислительная техника и программирование», Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, г. Павлодар.

**Сарсембаев Динмухамед Жакупович** - к.т.н., доцент, АО «Жезказганский университет имени О.А. Байконурова», Карагандинская обл, г. Жезказган.

**Сарсембаев Ж.Е.** - Жезказганский университет им. О.А. Байконурова, г. Жезказган.

**Сейтханова Айнур Кусбековна** – ст. преподаватель кафедры физики и приборостроения, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, г. Павлодар.

**Тлеуменов Садритен Кабдыгалиевич** - д.ф.-м.н., профессор, Евразийский Национальный университет им. Л. Гумилева, г. Астана.

**Тлеулесов Аскар Каримжанович** – ст. преподаватель кафедры БЖДиЗОС, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, г. Павлодар.

**Тлеулесова Агила Балтабаевна** – к.ф.-м.н., доцент каф. физики и математики им. А.А. Ермекова, Жезказганский университет им. О.А. Байконурова, г. Жезказган.

**Украинец Виталий Николаевич** - д.т.н., профессор, кафедра БЖДиЗОС Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, г. Павлодар.



**ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ**

(“Вестник ПГУ”, “Наука и техника Казахстана”,  
“Өлкетану-Краеведение”)

1. В журналы принимаются рукописи статей по всем научным направлениям в 1 экземпляре, набранных на компьютере, напечатанных на одной стороне листа с полуторным межстрочным интервалом, с полями 3 см со всех сторон листа и дискета со всеми материалами в текстовом редакторе “Word 7,0 (‘97, 2000) для Windows”.

2. Общий объем рукописи, включая аннотацию, литературу, таблицы и рисунки, не должен превышать **8-10 страниц**.

3. Статья должна сопровождаться рецензией доктора или кандидата наук для авторов, не имеющих ученой степени.

4. Статьи должны быть оформлены в строгом соответствии со следующими правилами: - УДК по таблицам универсальной десятичной классификации;

- название статьи: кегль -14 пунктов, гарнитура - **Times New Roman Cyr** (для русского, английского и немецкого языков), **KZ Times New Roman** (для казахского языка), заглавные, жирные, абзац центrovанный;

- инициалы и фамилия(-и) автора(-ов), полное название учреждения: кегль - 12 пунктов, гарнитура - Arial (для русского, английского и немецкого языков), KZ Arial (для казахского языка), абзац центrovанный;

- аннотация на казахском, русском и английском языках: кегль - 10 пунктов, гарнитура - Times New Roman (для русского, английского и немецкого языков), KZ Times New Roman (для казахского языка), курсив, отступ слева-справа - 1 см, одинарный межстрочный интервал;

- текст статьи: кегль - 12 пунктов, гарнитура - Times New Roman (для русского, английского и немецкого языков), KZ Times New Roman (для казахского языка), полуторный межстрочный интервал;

- список использованной литературы (ссылки и примечания в рукописи обозначаются сквозной нумерацией и заключаются в квадратные скобки). Список литературы должен быть оформлен в соответствии с ГОСТ 7.1-84.-  
**например:**

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Автор. Название статьи // Название журнала. Год издания. Том (например, Т.26.) номер (например, № 3.) страница (например С. 34. или С. 15-24.)

2. Андреева С.А. Название книги. Место издания (например, М.:) Издательство (например, Наука,) год издания. Общее число страниц в книге (например, 239 с.) или конкретная страница (например, С. 67.)

**На отдельной странице** (в бумажном и электронном варианте) приводятся сведения об авторе: - Ф.И.О. полностью, ученая степень и ученое звание, место работы (для публикации в разделе “Наши авторы”);

- полные почтовые адреса, номера служебного и домашнего телефонов, E-mail (для связи редакции с авторами, не публикуются);

- название статьи и фамилия (-и) автора(-ов) на казахском, русском и английском языках (для “Содержания”).

4. Иллюстрации. Перечень рисунков и подписанные надписи к ним представляют по тексту статьи. В электронной версии рисунки и иллюстрации представляются в формате TIF или JPG с разрешением не менее 300 dpi.

5. Математические формулы должны быть набраны как Microsoft Equation (каждая формула - один объект).

6. Автор просматривает и визирует гранки статьи и несет ответственность за содержание статьи.

7. Редакция не занимается литературной и стилистической обработкой статьи. Рукописи и дискеты не возвращаются. Статьи, оформленные с нарушением требований, к публикации не принимаются и возвращаются авторам.

8. Рукопись и дискету с материалами следует направлять по адресу:

140008, Республика Казахстан, г. Павлодар, ул. Ломова, 64,

Павлодарский государственный университет  
им. С. Торайгырова,

Издательство «КЕРЕКУ»

Тел (8 7182) 67-36-69

E-mail: [publish@psu.kz](mailto:publish@psu.kz)



Теруге 08.12.2010 ж. жіберілді. Басуға 13.12.2010 ж. қол қойылды.  
Форматы 70x100 1/16. Кітап-журнал қағазы.  
Көлемі шартты 6,97 б.т. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.

Компьютерде беттеген М.А. Ескожинова  
Корректорлар: А.Р. Омарова, Б.Б. Әубәкірова  
Тапсырыс №1511

Сдано в набор 08.12.2010 г. Подписано в печать 13.12.2010 г.  
Формат 70x100 1/16. Бумага книжно-журнальная.  
Объем 6,97 ч.-изд. л. Тираж 300 экз. Цена договорная.

Компьютерная верстка М.А. Ескожинова  
Корректоры: А.Р. Омарова, Б.Б. Аубакирова  
Заказ №1511

«КЕРЕКУ» баспасы  
С. Торайғыров атындағы  
Павлодар мемлекеттік университеті  
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 қаб.  
67-36-69  
E-mail: [publish@psu.kz](mailto:publish@psu.kz)