С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік
университетінің ғылыми журналы
Научный журнал Павлодарского государственного
университета им. С. Торайгырова

*1997 жылы құрылған*
*Основан в 1997 г.*

# ФИЗИКО - МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

3 2011

Научный журнал Павлодарского государственного университета
им. С. Торайгырова

**СВИДЕТЕЛЬСТВО**
о постановке на учет средства массовой информации
№ 4533-Ж
выдано Министерством культуры, информации и общественного согласия
Республики Казахстан
31декабря 2003 года





# МАЗМҰНЫ

## СОДЕРЖАНИЕ

## CONTENT

ӘОЖ 378:372.853

# ЖОҒАРЫ ОҚУ ОРЫНЫНДАҒЫ ФИЗИКА ПӘНІНІҢ МАҚСАТТАРЫ МЕН МІНДЕТТЕРІ

**М.Ш. Алинова, Г.С. Байгулова**
*С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.*

Табиғаттағы әрбір нәрсе материя, олай болса, ол кеңістік пен уақыт бойынша үнемі қозғалыста болады. Материя қозғалысының механикалық, молекулалық, электромагниттік, атомдық және ядролық формалары бар. Физика – материя қозғалысының жалпы және қарапайым формаларын, қасиеттерін зерттейтін ғылым [1]. Физика – табиғаттың алуан-түрлі құбылыстары мен тәжірибелерге негізделген ғылым.

Физика ғылымының жалпы мақсаты – табиғаттану, табиғат заңдарын айқындау және оларды нақтылы процестерде қолдануға беймдеу. Жоғары оқу орындағы физика пәнінің мақсаты - болашақ мамандарды дайындау болғандықтан, бүкіл оқу процессі болашақ маманға байланысты нақтыланады.

Мысалы, болашақ физиктер физика курсын жан-жақты зерттейді [2]. Физика мамандарына бейімделген бағдарлама 4 жылға жоспарланған. Олар келесі тарауларды меңгереді: механика, молекулалық физика, электр және магнетизм т.б. Сол себептен физика бакалаврларына келесі талаптар қойылады:

- физикалық заңдылықтарды тағайындап және әлемнің біртұтас ғылыми бейнесін жасауына, физикалық құбылыстар мен процестерді зерттеуге қазіргі теориялық, эксперименттік және сандық ғылыми зерттеу әдістерін қолдану керек;
- физиканың ең жаңа даму процесіне сәйкес ғылыми зерттеу әдістерін қолданып жетілдіріп және оларды практикада пайдалануды толық игеру керек;
- білім беру процесінің мазмұнын, әдістерін және технологияларын қолдануды және жетілдіруді толық игеру керек;
- ғылыми зерттеу нәтижелерін тиімді пайдалануына, оларды өндіріс пен орта және жоғары оқу орындарының оқыту процесіне ендіру керек;
- ғылыми зерттеулерінде, басқарушы-ұйымдастырушылық және оқыту-педагогикалық іс-әрекеттерінде ақпараттық технологияларды тиімді қолдануына бағытталған болу керек.

Басқа техникалық ЖОО-да физика пәні арнайы бағдарламамен жүзеге асырылады [3]. Жалпы физика курсы өткеннен кейін, мамандықтың оқу жоспарымен анықталатын көлемде, физиканың арнайы курстарымен жалғасуы мүмкін. Осындай арнайы курстардың бағдарламасы физика кафедрасымен өнделеді. Егер оқу бағдарламасында физиканың жалпы курсынан басқа арнайы курсқа сағаттар бөлінсе, онда арнайы курстың оқу материалдары жалпы физика курсынан толығыменен оңашаланады.

Бүгінгі күнде болашақ инженер мамндарын оқытуы кредиттік жүйесіне көшті. Физика курсы бойынша келесі құзыреттеріне дайындық талап етеді :

а) түсінігі болуы керек:

- әр түрлі физикалық түсініктер, заңдар, теориялардың колданылу шекаралары туралы;

- зерттеудің эксперименттік немесе математикалық әдістері арқылы алынған нәтижелердің сенімділік дәрежесін бағалау туралы.

б) білуі керек:

- негізгі физикалық күбылыстарды, классикалық және қазіргі физика заңдарын;

- физиканың зерттеу әдістерін;

- физиканың ғылым ретінде техниканың дамуына әсер етуін;

- физиканың басқа ғылымдармен байланысын және оның мамандықтын ғылыми-техникалық мәселелерін шешудегі ролін.

в) жасай білуі керек:

- казіргі физикалық принциптерді, техниканың білім алушылар мамандандырылатын салаларында, пайдалана білу;

- физика заңдарын тұжырымдау;

- кубылыстар мен заңдарды сипаттайтын шамаларды аныктау; олардың арасындағы байланысты аныктау (бұл байланысты талдау, графикалық түрде білдіру);

- стандарттық жағдайларда физиканың негізгі заңдары мен принциптерін қолдану;

- қолдану шекарасын көрсетіп, физикалық кұбылыс моделін салу дағдылары болуы керек:

- экспериментті жоспарлау;

- өлшеу нәтижелерін жазу;

- есеп шығару және эксперимент жүргізу кезінде алынған нәтижелерді өңдеу және бағалау;

- кестелер мен графиктер кұрастыру;

- эксперименттердің теориялық деректермен сәйкестігінің дәлдігін бағалау.

г) құзыретті болуы керек:

- машыктану қызметі кезінде физикалық есептерді ұсыну және шешу мәселелерінде;

- физикалық экспериментті ұйымдастыру және соларга сәйкес өлшеу мен тіркеу аспаптарын іріктеу мәселелерінде;

- қоршаған әлемді және ғылыми-техникалық прогрессті кәзіргі заман талапы деңгейінде түсінуде.

Сондықтан белгіленген физика курстар бағдарламаларын осы койылған талаптарға бейімдеу керек. Сол себептен өзіміздің зерттеуімізді «Жалпы физика жоғары оқу орнында заманауи ғылыми білімді жүйелендіру формасы ретінде» деп қаладық.



Зерттеу мақсатын - жоғары оқу орнындағы жалпы физика курсын заманауй ғылым ретінде өндеу деп, ал зерттеу міндеттерін.

- физика ғылымының дамуы мен қалыптасуының тарихи зерттеуі;

- жоғары оқу орындағы физика курсын жүйелендіру негіздерін айқындау;

- техникалық мамандарға арналған жалпы физика курсын құрастыру, деп қадағаладық.

ӘДЕБИЕТТЕР

1. Абдуллаев Ж. Жалпы физика курсы. Оқулық.-Алматы, 1994.-С.349.

2. Қазақстан Республикасының мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Мамандығы 050604 – ФИЗИКА. – Астана, 2006.

3. Қазақстан Республикасының мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Мамандығы 050732 – Стандарттау, метралогия және сертификаттау. – Астана, 2006.

*Резюме*

*В данной статье рассматриваются цели и задачи преподавания физики в высших учебных заведениях. Авторы особо отмечают важность преподавания общего курса физики для студентов технических специальностей.*

***Resume***

*In given article the purposes and problems of teaching of physics in higher educational institutions are considered. Authors especially mark importance of teaching of the general course of physics for students of technical specialities.*

УДК 004.94

## СЕМАНТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗНАНИЙ ДЛЯ ЦЕЛЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

***Р.Т. Ахметов***

*Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар*

Целью данной статьи является представление концепции автоматического построения средств контроля знаний, на основе специальной понятийно-тезисной модели представления знаний и описание программной реализации этой концепции. Идея заключается в специфическом алгоритме сохранения и наполнения базы знаний, на основе которой будут генерироваться тесты. Предложенная идея воплощена в программном продукте и находится на стадии последующего исследования и развития.

**Вступление**

Сегодня ведущие научные работники области дистанционной учебы сосредоточены на применении всего могущества современных высоких технологий для интеллектуализации систем дистанционной учебы. Возникают новые научные направления на стыке разных наук (педагогики, компьютерных наук, искусственного интеллекта, психологии, и др.) - искусственный интеллект в образовании [1], семантическое Веб–пространство и web-контент [2] и тому подобное. Создаются научные содружества по исследованию применения технологий искусственного интеллекта в образовании [1,2,3,4].

Учебные компьютерные системы должны содержать автоматизированную функцию контроля знаний и анализа результатов учебы. В то время, как много исследований в области компьютерного контроля знаний сосредоточенные на вопросах валидности и надежности тестов, справедливо отшлифовывая технику контроля знаний [5], вопроса формирования самого банка заданий, в большинстве случаев остается исключительно прерогативой преподавателя, который работает с курсом, без предложений автоматизации данного процесса. Действительно попытка автоматизации формирования заданий для теста наталкивается на область искусственного интеллекта и вопроса формализации знаний для последующего их использования при составлении контрольных заданий для теста. Поэтому появляется задание создания модели падания знаний, на основе которой станет возможным построение современной учебной системы.

Концепция сжатия или формализации учебной информации опирается на ведущие теоретические положения молодой специальной отрасли информационной технологии, которая очень бурно развивается, – инженерии знаний. Она направлена на исследование проблем приобретения, представления и практического использования знаний. В эпоху информационной насыщенности проблемы компоновки знания и мобильного ее использования приобретают колоссальную значимость. С этой целью создаются всевозможные типы моделей представления знаний в сжатом, компактном, удобном для использования виде (логические модели, семантические сети, продукционные модели и др.). Рядом с этим эффективные способы сжатия учебной информации содержатся в известных психолога - педагогичных теориях содержательного обобщения, укрупнения дидактичных единиц, формирования системности знаний[6].

В разработке применена интеллектуальная технология из области представления знаний для обеспечения автоматизации процесса формирования



тестов и всего процесса контроля знаний в учебной системе. При этом среди обязательных требований к технологии стоит ее способность к реальному приложению в условиях экономических и кадровых ограничений современной системы образования, понятность и дружественность интерфейса системы и тестовых заданий, которые продуцируются. На основе разработанной семантической модели создан соответствующий программный продукт, где реализована предложенная технология. Модель знаний находится в процессе развития и углубления.

**Постановка задачи**

В рамках работы ставится задание разработки технологии автоматизации контроля знаний студентов в системе учебы. Это включает автоматизацию процесса создания базы знаний и автоматизацию продуцирования тестов. При решении данного задания работа распределяется на такие составляющие:

В рамках выполняемой работы относятся такие задачи:

§ Разработка семантической модели для представления знаний предметной области для формирования тестов;

§ Создание структуры базы знаний в соответствии с семантической моделью знаний;

§ Проектирование и реализация системы сопровождения базы знаний с удобным интерфейсом пользователя;

§ Разработка алгоритмов использования базы знаний учебного материала для автоматического продуцирования средств контроля знаний. При этом относительно контролирующих средств относятся такие требования:

§ Лексическая понятность тестовых заданий;

§ Возможность использования разных типов вопросов.

**Концепция модели**

Семантическая модель знаний и ее воплощение в базе знаний – это сердце тнформационной системы. В ходе анализа учебных материалов было решено разрабатывать предметно ориентированную (понятийно-ориентировочную) модель знаний. Это значит, что краеугольным камнем структуры модели является такая сущность как понятие, предмет обсуждения, некоторый объект из предметной области, о котором в учебном материале есть знание. Для представления знаний о понятии в модели существуют структурные элементы - сведения об объекте (тезисы о понятии). С каждым понятием в модели связывается множественное число сведений о нем. Изложенная идея и является основой концепции семантической модели знаний, которая разрабатывается и используется в этой работе [7].

Понятие указывает на некоторый объект из области знаний, о котором идет речь. Понятие указывает на предмет, который представляется для изучения студенту. Например, в курсе «Алгоритмические языки программирования» можно выделить такие понятия: «процедура», «цикл», «программа», «переменная», «жизненный цикл программы», и тому подобное. Для курса «Программирования в среде Delphi» можно было бы выделить такие понятия: «объект», «событие», «класс», «форма», «компонент Tedit» но другое.

Тезис – это некоторая ведомость о понятии. Тезис можно сравнить с признаком, характеристикой понятия или с любым утверждением, которое является истиной для данного понятия. Приведем примеры: тезис о понятии «процедура» - «позволяет разбить программу на подпрограммы», тезис о понятии «класс» - «может иметь в своей структуре не только поля-свойства, но и методы, то есть функции и процедуры».

**Понятия и их классификация**

Как уже отмечалось, в концепции модели понятия выражает предмет знаний, который обсуждается в том или другом фрагменте учебного материала. Понятие – это одна из основных сущностей базы знаний понятийно-тезисной семантической модели. Фактически понятие – это, как правило, одно-два слова, которые текстовый выражают предмет рассмотрения.

Следующим этапом развития концепции является классификация понятий с целью расширения базы знаний. Классификация понятия относит его к определенной предварительно очерченной группе понятий. Эта группа владеет определенным набором характеристик и может иметь очерченное поведение. Таким образом, относя понятие к определенному классу, мы предоставляем ему все свойства и поведение, которое уже имеет данный класс понятий. Здесь существует прямая аналогия с объектно-ориентированным подходом в программировании, а именно с принципом наследования. Порожден дочерний класс, подражает всем признакам и поведению родительского класса.

Под признаками и поведением понятия данного класса понятий понимаем как соответствующие знания предметной области, так и совокупность, методико-организационных возможностей, которые могут применяться к данному понятию (в первую очередь при формировании контролирующих средств).

Рядом с описанной классификацией, для каждого из понятий отмечается уровень важности, которая указывает на приоритетность понятия в структуре понятий курса, уровень важности его усвоения для понимания предмета, который изучается.

**Тезисы и их классификация**

Тезис – это, как отмечалось, некоторая ведомость или утверждение о понятии. Можно сказать, что тезисы являются основным наполнителем знаний, как таких, в базе учебного материала. Если понятия указывают предмет курса, то тезисы являют собой смысловое наполнение базы знаний. От полноты наборов утверждений, то есть тезисов о понятии зависит полнота базы знаний, а, следовательно, и возможность учебной



системы строить эффективные контролирующие объекты. Фактически тезис являет собой одно или несколько предложений, в которых речь идет непосредственно о соответствующем понятии, однако именно понятие здесь словарный не фигурирует. Между понятием и ее тезисами устанавливается соответствующая связь.

Вместе с классификацией понятий концепция предусматривает классификацию тезисов, что позволяет расширить возможности применения базы знаний. Структура классификации является аналогичной по отношению к описанному относительно понятий. Тезис можно отнести к определенному классу тезисов, и вместе с этим данный тезис приобретает все свойства и признаки этого класса. Это в дальнейшем позволяет использовать эти знания при построении контролирующих объектов.

Среди типов тезисов особенным чином выделим несколько.

Прежде всего, это тезис-определение. Этот тип, или класс, тезисов содержит определение понятия, то есть отвечает на вопрос «Что это?». Здесь содержится фрагмент материала, который дает определение данному понятию.

*Тезис-назначение* указывает для чего назначенное данное понятие. Фрагмент текста в тезисе описывает, для чего служит соответствующее понятие. Информация тезиса содержит ответ на вопрос «Для чего служит понятие?», «Какая цель этого понятия?», «Для чего назначенное понятие?»

Так же, как и для понятий, для тезисов указывается уровень их важности, которая указывает на приоритетность данного утверждения в структуре знаний курса, уровень важности его усвоения для понимания предмета, который изучается.

Методология построения контролирующих средств

Процесс контроля знаний занимает важное место в структуре дистанционного образования. Вид его эффективности зависит от успеваемости применения этого вида учебы. В то же время современный подход к дистанционному образованию ставит задание автоматизировать процесс контроля знаний.

Прежде всего, отметим самые распространенные типы заданий, которые могут применяться при контроле знаний путем тестирования, но имеют перспективное значение для разработанной семантической модели.

1. Самым простым типом является вопрос, который предусматривает ответ типа «Истина/Недостаток».

2. Самым распространенным видом заданий в тестах есть задание множественного выбора: «один из нескольких» но «несколько из нескольких».

3. Сложнее является задание со свободной формой ответа: ответ на вопрос студент должен ввести собственноручно.

4. Еще один вариант – задание-сопоставление. Студенту дается два набора некоторых элементов, и он должен сопоставить каждый вариант

одного набора из соответствующих по смыслу вариантов из другого набора элементов.

5. Отдельно выделим еще один достаточно специфический тип заданий – задание по определению приоритетности. Суть задание заключается в том, чтобы расставить определенные элементы в правильном порядке или порядке их приоритетности.

Сосредоточимся на путях и алгоритмах построения выше отмеченных типов заданий на основе базы знаний.

1. Вопросы **первого типа**, которые требуют ответа типа «Истина/ Недостаток», строятся следующим образом: из базы знаний добывается соответствующая пара понятие-тезис, и студенту ставится вопрос, верное данное утверждение ли:

*Отвечает ли данное утверждение понятию <понятие>?*

*<тезис>*

*Да Нет*

Алгоритм последующей проверки ответа является очевидным – если добытый тезис действительно касается данного понятия, верным ответом будет «Да» («Истина»).

2. Тесты **второго типа** «вопрос – варианты ответов» реализовывать относительно не сложно. Есть несколько путей построения таких заданий: (1) в основе вопроса лежит понятие, в основе разновидностей вариантов – тезисы; (2) в основе вопроса лежит тезис, в основе вариантов ответов – понятие; некоторые другие вариации.

Раскроем указанные пути.

1) В основе вопроса лежит понятие, в основе разновидностей вариантов– тезисы. Самым общим здесь будет задание такого вида:

*Укажите утверждение, что касается данного понятие <имя понятие>*

*<перечень утверждений>*

На рис.1 приведен пример тестового задание данного типа.

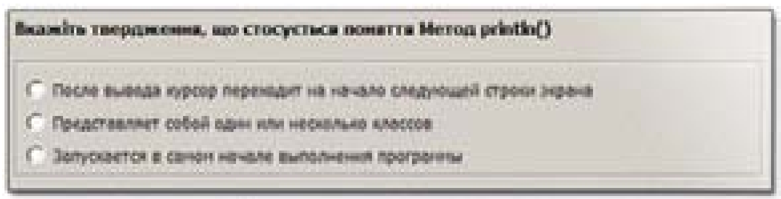



Рис. 1. Пример задание

В зависимости от вида класса, понятие и тезисы в вопросе могут звучать иначе, например:



*«Для чего назначенное понятие…»*, если тезисы, то они служат вариантами ответов, принадлежат к классу *«назначение»*;

*«Что такое понятие…»*, если тезисы относятся к классу *«определение»*;

2) В основе вопроса лежит тезис, в основе разновидностей вариантов – понятие. То есть в этом методе в основе вопросов лежит ведомость о понятие. Студент должен из набора понятий выбрать то, о чем идет речь в этом вопросе. Так же, как и в предыдущем способе задание может иметь как общий характер:

*Укажите понятие, о котором идет речь в утверждении*

*<Утверждение>*

*<Перечень понятий>*,

так и конкретный, в зависимости от вида класса понятия и тезиса: *«Укажите понятие, которое указано ниже…», если тезис типа «определение»; «Какие понятия имеют такое назначение… »,* если тезис имеет тип *«назначение»*.

3) На основе базы знаний можно построить и другие варианты заданий типа «вопрос – варианты ответов».

Одним из возможных направлений здесь есть задание по определению важнейших элементов учебного материала. Принцип такой: перед студентом стоит задание определить, например, важнейшее понятие в данной лекции из перечня понятий. Важнейшее понятие определяется системой на базе количества тезисов этого понятие на данном фрагменте материала из учета важности.

Еще одно направление – использование возможностей последовательных отношений между понятиями. Задание строятся по принципу «понятие – набор понятий». В качестве вопроса ставится лексическая форма отношение между понятиями и собственно само понятие, например: «Укажите *родственное* понятие». В качества разновидностей вариантов - набор понятий, среди каких есть понятие, которое удовлетворяет условию задания.

3. Рассмотрим тестовое задание **третьего типа**: вопрос – текстовый ответ вводится студентом. Из организационно методологической точки зрения этот тип подобный первому типу, но по уровню учебно-методической сложности он более тяжелый для студента.

Для этого вида теста подходят задания, в которых в качестве ответа выступает понятие. Самый общий вид задания будет построен таким образом: указывается некоторый тезис и студенту предлагается ввести понятие, которого касается данный тезис. Например:

Общий вариант:

*<Тезис>*

*О каком понятии идет речь?;*

На основе определение:

*<Тезис-определение>*

*Что это за понятие?*

На основе назначение:

*<Тезис-назначение>*

*Назначение какого понятия приведено выше?*

И тому подобное.

Кроме этого, возможно использовать сведения относительно наследования и отношения между понятиями. Так на базе наследование можно построить задание типа:

*Укажите родственное понятие к понятию <Название понятие>.*

Характерной особенностью с точки зрения реализации является требование дополнительной программной части по сравнению текстового ответа с эталоном (с верным ответом) и оценки ее верности. Этот алгоритм должен предусматривать возможные орфографические ошибки в тексте, которые к определеннию меры не должны влиять на верность ответов (если только это не учеба из дисциплин лингвистики). Если речь идет об ответах, которые состоят из многих слов, тогда нужны соответствующие алгоритмы обработки. Следующим витком развития системы проверки текстового ответа может стать вообще создание лингвистической подсистемы, которая сможет применять такие лингвистические знания как синонимические ряды, разного рода словоформы, спряжения, времена для глаголов и тому подобное.

4. **Четвертый вариант** – задание сопоставления. Студенту предлагается два наборы некоторых элементов, и он должен сопоставить каждый вариант одного набора из соответствующего по смыслу с другим вариантом набора элементов.

Очевидным путем реализации такого типа заданий есть такой: первый набор элементов этого понятия, другой – тезисы к этим понятиям. Между двумя наборами должен существовать взаимно однозначная связь – каждому понятию отвечает лишь один тезис из набора тезисов. Студент с помощью соответствующих интерфейсных средств осуществляет сопоставление элементов.

Важной составляющей такого задание это методология оценки вида поведения студента. Самый простой путь – это оценка типа «зачет» («незачет»), без дифференцирования. Однако для данного типу заданий очевидной есть потребность в градации оценки, ведь возможный случай, когда студент сопоставит часть пар верно, а часть – нет. В таком подходе самым простым есть путь оценки на основе количества верных ответов, тогда процентом правильности ответы будет процент количества правильных сопоставлений. Более гибкий подход – использование весов, когда для каждой пары формируется своя весовая оценка, то есть судьба в общей оценке, что при проверке учитывается в общей оценке. Весовая оценка пар строится на базе степени важности элементов (как понятия, так и тезисы), что указывались на этапе формирование базы знаний.

5. **Пятый** достаточно специфический тип заданий – задание по определению приоритетности. Суть задание заключается в том, чтобы



расставить определенные элементы в правильном порядке, порядке их приоритетности, или в том чтобы, определенным чином выделить элементы, которые имеют больший вес.

По типу структуры такое задание временами пересекается из задания, описанного выше. Отличием есть учебно-методический комплекс, заложенный в нем. Вопрос строятся на базе вторичных знаний, полученных из БЗ на основе использования сведений о степени важности элементов. Как отмечалось, каждый элемент семантической модели имеет свой уровень важности, что указывается на этапе формирование БЗ. Разные понятия курса имеют разный уровень относительно их важности в структуре знаний курса. Следовательно, понимание некоторых понятий есть абсолютно необходимо для усвоения курса, другие же играют вспомогательную роль, расширяющую кругозор. Это именно касается утверждений о понятие.

Таким образом, задание этого типа содержит аналитический характер и требует от студента обстоятельного понимание предмета. Приблизительные вопросы (задание) могут иметь такой вид:

*«Расставьте по порядку важности понятие курса»;*

*«Какое понятие более важное в этому разделе…»;*

*«Укажите ключевые понятие темы»;*

*«Укажите утверждение, что выражает главное свойство понятия…»;*

Эффективность заданий зависит от вида адекватность заложенных оценок важности учебных элементов модели.

В данной статье был рассмотрен подход к построению современной системы учебы, который основывается на создании модели представления знаний. Смысловая составляющая формализируется с помощью понятийно-тезисной семантической модели. На ее основе формируется аппарат автоматизированного контроля знаний в системе. Модель знаний имеет перспективу к развитию, углублению и совершенствованию, и нуждается в последующих теоретических и практических исследованиях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. International Journal of Artificial Intelligence in Education (IJAIED) http://aied.inf.ed.ac.uk/

2. International Workshop In Applications of Semantic Web technologies for E-learning (SW-EL) http://www.win.tue.nl/SW-EL/

3. International Forum of Educational Technology & Society http://ifets.ieee.org/

4. Международный Форум “Образовательные Технологии и Общество” – Восточно-европейская подгруппа International Forum of Educational Technology & Society http://ifets.ieee.org/russian/

5. Аванесов В.С. Композиция тестовых заданий. Учебная книга для преподавателей вузов, учителей школ, аспирантов и студентов пед. вузов. 2 изд.испр.. и доп.М.:Адепт.1998-217с.

6. Дахин А.Н. Актуальные проблемы оптимального управления образовательным процессом. Журнал «Педагог» №7 1999г. http://www.informika.ru/text/magaz/pedagog/pedagog_7/a14.html

***Түйіндеме***

*Бұл мақалада мағыналық үлгінің құрастыруы қаралады*

***Resume***

*This article is devoted to the creation of the semantic model*

УДК 512.774.3

# ИЗ ОПЫТА ПОСТАНОВКИ, РАЗРАБОТКИ И РЕАЛИЗАЦИИ КОНЦЕПЦИИ ИЗУЧЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ТОЧНОСТЬЮ ДО ИЗОМОРФИЗМА (II)

***Б. Н. Дроботун, О. И. Мозговая***

*Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар*

1. Данная работа является непосредственным продолжением статьи [1]. В этой работе на основе выявления технологий, обеспечивающих получение композиционного представления отображений множеств (как простейших алгебр с пустыми совокупностями операций и выделенных элементов), предлагаются методологические подходы и даются методические рекомендации к формированию навыков построения фактор-структур и получению гомоморфных образов алгебр.

2. В работе [1] (смотри пункт 7) в рамках формирования навыков и умений описания фактор-множеств с точностью до биективности были приведены примеры б.1) и б.2) отношений эквивалентности на множест-ве - всех квадратных матриц -го порядка над полем действи-тельных чисел.

Эти примеры представляют собой интерес еще и в том плане, что если рассмотреть алгебру , где « · » - обычная опера-ция умножения матриц, то в первом из них отношение эквивалентности не является конгруэнцией на этой алгебре, а во втором - является.

Простейшую ситуацию, подтверждающую отрицательный ответ для алгебры из примера б.1), можно определить уже при рассмотрении мно-жества

Действительно, легко проверяется что для матриц:



$$A_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\quad A_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

и

$$A_1'=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix};\quad A_2'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

выполняются условия $A_1PA_1'$ и $A_2PA_2'$, так как $r(A_1)=r(A_1')=1$ и $r(A_2)=r(A_2')=2$, но, тем не менее, условие $(A_1\cdot A_2)P(A_1'\cdot A_2')$ не имеет места.

Это связано с тем, что

$r(A_1\cdot A_2)=1$; $r(A_1'\cdot A_2')=0$.

В общем случае эта ситуация находит свое выражение в утверждении: «ранг произведения двух матриц не превышает ранга каждой из этих матриц». Т. е. в теории матриц не имеет место ни одно из утвержде-ний типа:

- ранг произведения двух матриц равен сумме рангов этих матриц;
- ранг произведения двух матриц равен произведению рангов этих матриц;
- ранг произведения двух матриц равен значению некоторой бинарной алгебраической операции $f(x_1;x_2)$, определенной на множестве $N=\{0;1;2;\ldots;t;\ldots\}$, от рангов и этих матриц.

Это и обуславливает отрицательность полученного ответа.

Для примера б.2) положительный ответ обеспечивает верность сле-дующего утверждения:

- определитель произведения двух матриц равен произведению оп-ределителей этих матриц.

Действительно, пусть $A_1;A_2;A_1';A_2'\in M_n(R)$ и $A_1PA_1'$; $A_2PA_2'$. Нужно убедиться в том, что $(A_1\cdot A_2)P(A_1'\cdot A_2')$. Из предположений $A_1PA_1'$ и $A_2PA_2'$ следует, что:

$$\det(A_1)=\det(A_1');\quad \det(A_2)=\det(A_2'). \tag{1}$$

Тогда, с учетом равенств (1), получаем

$$\det(A_1\cdot A_2)=\det A_1\cdot\det A_2=\det A_1'\cdot\det A_2'=\det(A_1'\cdot A_2'),$$

т. е.

$$(A_1\cdot A_2)P(A_1'\cdot A_2').$$

Проверив, что отношение эквивалентности $P$ в примере б.2) являет-ся конгруэнцией на алгебре $M_n(R)=\langle M_n(R);\cdot\rangle$, можно, следуя общей схеме, построить фактор-алгебру

$$M_A(R)/P = \left\langle M_A(R)/P; \circ \right\rangle,$$

где операция «$\circ$» определяется на фактор-множестве $M_A(R)/P$ по следующему правилу:

$$\left(\forall [A]_P; [B]_P \in M_A(R)/P\right)\left([A]_P \circ [B]_P = [A \cdot B]_P\right).$$

Аналогичным образом, если взять множество комплексных чисел $C$ относительно операции «$\bullet$» - умножения и выделенного элемента 1, то можно получить алгебру $C = \langle C; \bullet; 1\rangle$ сигнатуры $\sigma = \langle F_1^2; c_1\rangle$. Так как для этой алгебры справедливо утверждение:

- модуль произведение двух комплексных чисел равен произведе-нию модулей этих чисел, то бинарное отношение $P$, определенное на множестве $C$ этой алгебры по правилу:

$$(\forall z_1; z_2 \in C)(z_1 P z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|)$$

будет являться конгруэнцией, что позволяет определить, следуя общей схеме, фактор-группу

$$C/P = \left\langle C/P; {}^{\nabla}\sigma \right\rangle = \left\langle C/P; \bullet; \mathbf{1} \right\rangle$$

сигнатуры $\sigma$, в которой операция $\bullet = {}^{\nabla}F_1^2$ и выделенный элемент $\mathbf{1} = {}^{\nabla}c_1$ определяются, соответственно, по правилам:

$$\left(\forall [z_1]_P; [z_2]_P \in C/P\right)\left([z_1]_P \bullet [z_2]_P = [z_1 \cdot z_2]_P\right); \quad \mathbf{1} = [1]_P.$$

3. Проделав работу, связанную с пропедевтическим изучением по-нятий изоморфизма и гомоморфизма, конгруэнции и фактор-алгебры, можно переходить к следующему этапу формирования представлений о концепции изучения алгебр с точностью до изоморфизма - теореме о го-моморфизмах алгебр.

Как и в работе [1], с целью конкретизации направлений пропедевти-ческой работы, способствующей усвоению системы понятий и техноло-гий, используемых в теореме о гомоморфизмах для описания гомоморф-ных образов алгебр, дадим формальную версию этой теоремы, принятую в современной алгебре.

Пусть $M_1 = \langle M_1; {}^{\nabla}\sigma\rangle$ и $M_2 = \langle M_2; {}^{\nabla}\sigma\rangle$ - две алгебры сигнатуры $\sigma$.

В своей наиболее общей форме теорема о гомоморфизмах алгебр формулируется следующим образом [2].

Пусть $\varphi$ - гомоморфное отображение алгебры $M_1$ в алгебру $M_2$. Тогда:

а) бинарное отношение $P_\varphi = \varphi \cdot \varphi^{-1}$ является конгруэнцией на ос¬нов¬ном множестве $M_1$ алгебры $M_1$;



б) гомоморфизм представим в виде композиции:

$$\varphi = \varepsilon_{P_\varphi} \cdot \tau \cdot I_{\text{пр}\varphi},$$

где:

$\varepsilon_{P_\varphi}$ - естественное гомоморфное отображение алгебры $M_1$ на фак-тор-алгебру $M_1/P_\varphi$;

$\tau$ - изоморфное отображение фактор-алгебры $M_1/P_\varphi$ на подалгебру $\varphi(M_1)$ алгебры $M_2$;

$I_{\text{пр}\varphi}$ - изоморфное вложение подалгебры $\varphi(M_1)$ в алгебру $M_2$.

Прообразом этой теоремы (ее адаптированным аналогом) является теорема о композиционном представлении отображений: пусть $\varphi: M_1 \to M_2$ - произвольное отображение множества $M_1$ в множество $M_2$. Тогда:

а') бинарное отношение $P_\varphi = \varphi \cdot \varphi^{-1}$ является отношением эквивалентности на множестве $M_1$;

б') для отображения $\varphi$ существует представление в виде:

$$\varphi = \varepsilon_{P_\varphi} \cdot \tau \cdot I_{\text{пр}\varphi} \qquad (2)$$

где:

$\varepsilon_{P_\varphi}$ - сюръективное отображение множества $M_1$ на фактор-множество $M_1/P_\varphi$;

$\tau$ - биективное отображение фактор-множества $M_1/P_\varphi$ на подмно-жество $\varphi(M_1)$ множества ;

$I_{\text{пр}\varphi}$ - инъективное отображение (вложение) подмножества $\varphi(M_1)$ в множество $M_2$.

Теорема о композиционном представление отображений может по-служить отправной точкой пропедевтического изучения теоремы о го-моморфизмах алгебр.

Генеалогия понятия алгебры неизбежно приводит к множествам, как простейшим алгебрам с пустыми совокупностями основных операций и выделенных элементов. Применительно к таким простейшим алгебрам понятия конгруэнции, фактор-алгебры и гомоморфизма трансформиру-ются, соответственно, в понятия отношения эквивалентности, фактор-множества и отображения, а сама теорема о гомоморфизмах превращает-ся, как это отмечалось выше, в теорему о композиционном представле-нии отображений. Эти адаптированные аналоги, в силу их относитель-ной простоты, легче поддаются изучению. В то же время, в основе изу-чения и абстрактных алгебр и их адаптированных аналогов лежат по су-ществу одни и те же технологические схемы и конструкции.

4. Важное место в формировании умений и навыков композицион-ного представления конкретных отображений принадлежит отработке технологий описания фактор-множеств с точностью до биективности [2]. Предполагая наличие опыта применения этих технологий, продолжим рассмотрение приведенного ранее примера а) из пункта 6 работы [1].

$a'$ ) Напомним, что через *M* в примере а) этого пункта было обозна-чено множество всех рабочих некоторой строительной фирмы.

Пусть *П* - множество наименований всех профессий, которые ос-воены к этому времени человеком.

В качестве отображения $\varphi$ , для которого будет строиться компози-ционное представление, рассмотрим отображение из множества *M* в множество *П*, определенное по правилу:

$(\forall x \in M)(\varphi(x) =$ «наименование профессии рабочего *x*») (3)

Ранее в примере а) было определено отношение эквивалентности Р и получено описание фактор-множества $M/P$ с точностью до биективно-сти. Нетрудно видеть, что $P_\varphi = P$ . Используя это описание, построим сомножители композиционного представления (2) для отображения (3).

Роль первого сомножителя, искомого представления будет играть сюръекция

$$\varepsilon_{P_\varphi} : M \to M_1/P_\varphi \ ,$$

посредством которой каждый рабочий *x* рассматриваемой строительной фирмы в качестве образа будет иметь класс $[x]_{P_\varphi}$ , все рабочие которого освоили одну и ту же профессию. К примеру, если *x* - каменщик, то -образом рабочего *x* будет класс всех каменщиков. Образно говоря, рабочий *x* отображается в класс $[x]_{P_\varphi}$ , который он порождает, как элемент множества *M*.

Роль второго сомножителя

$$\tau : M/P_\varphi \to \varphi(M_1)$$

этого представления будет играть биекция $\tau$ , посредством которой каждый из классов эквивалентности $[x]_{P_\varphi}$ будет отображаться в наименова-ние профессии, которой обладают все рабочие этого класса, т.е. $\tau$ -образом класса $[x]_{P_\varphi}$ , в соответствии с определением (3), является $\varphi(x)$ . К примеру, если все рабочие класса $[x]_{P_\varphi}$ являются каменщиками, то

$\tau([x]_{P_\varphi})$ = «каменщик».



И, наконец, в качестве $I_{\mathrm{Im}\varphi}$ будет выступать биективное вложение

$I_{\mathrm{Im}\varphi} : \varphi(M) \to П$

подмножества $\varphi(M)$ в множество *П*.

Равенство (2) при любом данном $x \in M$ примет вид:

$$\varphi(x) = (\varepsilon_{P_\varphi} \cdot \tau \cdot I_{\mathrm{Im}\varphi})(x) \, . \qquad (2')$$

Это равенство (для любого $x \in M$ ) проверяется непосредственно:

$$(\varepsilon_{P_\varphi} \cdot \tau \cdot I_{\mathrm{Im}\varphi})(x) = I_{\mathrm{Im}}(\tau(\varepsilon_{P_\varphi}(x))) = I_{\mathrm{Im}\varphi}(\tau([x]_P)) = I_{\mathrm{Im}\varphi}(\varphi(x)) = \varphi(x).$$

В качестве примера с элементами математической терминологии и простейшими математическими объектами, рассмотрим отображение $\varphi : M \to R$ множества *M* - точек плоскости с введенной на ней декарто-вой системой координат *XOY* в множество действительных чисел, которое каждой точке $A \in M$ ставит в соответствие ее расстояние от начала координат.

Пусть *A, B* - произвольные точки множества *M*. Следуя схеме описания фактор-множества $M/P_\varphi$ с точностью до биективности, получим:

1) $(AP_\varphi B) \Leftrightarrow (\varphi(A) = \varphi(B)) \Leftrightarrow$ (точки *A* и *B* лежат на одном и том же расстоянии от начала координат) $\Leftrightarrow$ (точки *A* и *B* принадлежат од-ной и той же окружности с центром в начале координат);

2)Класс эквивалентности $[A]_{P_\varphi}$ , порожденный точкой *A*, представляет собой окружность с центром в начале координат, радиус кото-рой равен расстоянию точки *A* от начала координат;

3) Фактор-множество $M/P_\varphi$ - это множество всех концентриче-ских окружностей, общим центром которых является начало координат (смотри рисунок 1).


Рисунок 1

Получив это описание, нетрудно выявить отображения, которые являются сомножителями композиционного представления рассматривае-мого отображения $\varphi$:

- сюръекция $\varepsilon_{P_\varphi}$ каждой точке $A \in M$ сопоставляет, в качестве образа окружность с центром в начале координат, на которой эта точка «лежит»;

- биекция $\tau$ каждой окружности с центром в начале координат ста-вит в соответствие длину ее радиуса, т. е. некоторое неотрицательное действительное число;

- инъекция $I_{\mathrm{Im}\varphi}$ осуществляет тождественное вложение множества $R^+$ - неотрицательных действительных чисел в множество *R* всех дейст-вительных чисел (смотри рисунок 2).

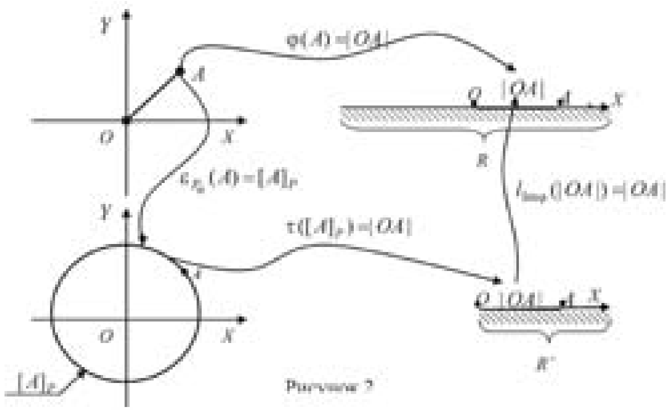



Рисунок 2

Следующий пример и его обобщения даются в более конспективной форме, без детализации этапов применения схемы описания фактор-множества с точностью до биективности и подробного описания сомножителей композиционного представления.

Пусть *R* - множество действительных чисел (множество точек координатной прямой). Определим отображение $\varphi : R \to R$ по правилу

$(\forall x \in R)(\varphi(x) = x - [x])$,

где $[x]$ - целая часть числа *x*.

Тогда $\mathrm{Im}\varphi = [0;1)$ - множество точек полуинтервала $[0;1)$, при этом:

$$x_1 P x_2 \Leftrightarrow (x_1 - [x_1] = x_2 - [x_2])$$

для любых $x_1; x_2 \in R$, т.е. числа  и  имеют одинаковые дробные части;



$$R/P_\varphi = \left\{ \{n+\alpha / n \in Z\} / \alpha \in [0;1) \right\}.$$

Класс эквивалентности $[x]_{P_\varphi} = \{ n+\alpha / \alpha = x - [x], n \in Z \}$ для некоторого $\alpha \in [0;1)$ наглядно можно представить так (смотри рисунок 3):

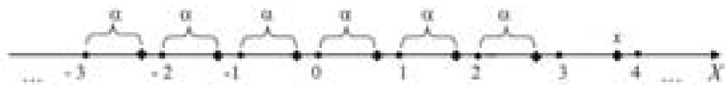



Рисунок 3

Ромбиками на этом рисунке отмечены числа класса $[x]_P$, $\alpha = x - [x]$. Роль отображений $\varepsilon_{P_\varphi}$; $\tau$; $I_{\mathrm{Im}\varphi}$ играют, соответственно, отображения, определенные по правилам:

$$\varepsilon_{P_\varphi}(x) = \{ n + (x - [x]) / n \in Z \}$$

$$\tau\left( \{ n + (x - [x]) / n \in Z \} \right) = x - [x];$$

$$I_{\mathrm{Im}\varphi}(x - [x]) = x - [x].$$

Заметим, что совокупность представителей всех классов эквивалентности - это множество всех точек полуинтервала $[0;1)$ (смотри рисунок 4 а)). Окружность, полученная из этого полуинтервала (смотри рисунок 4 б)), дает образное представление о фактор-множестве $A/P_\varphi$.


а) Рисунок 4 б)

Обобщая этот пример, можно получить его двумерный случай [3].

Здесь роль отображения $\varphi$ будет играть отображение декартова квадрата $R^2$ в себя (где *R* - множество действительных чисел), определенное по правилу:

$$(\forall \langle x; y\rangle \in R^2)(\varphi(\langle x; y\rangle) = \langle x-[x]; y-[y]\rangle).$$

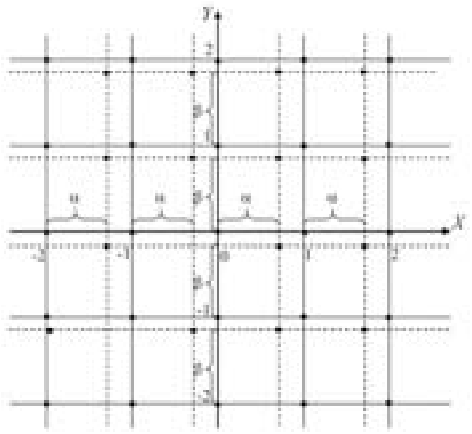


Рисунок 5

Проанализировав рисунки 5 и 6, нетрудно убедится в том, что на-глядное представление о двумерном аналоге рисунка 3 дает рисунок 5, а рисунка 4 - рисунок 6.

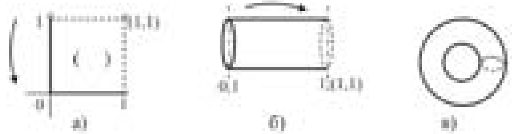



Рисунок 6

Исходя из рисунков 5 и 6, легко дать описания фактор-множества $R^2/P_\varphi$ с точностью до биективности и получить композиционные со-множители $\varepsilon_{P_\varphi}$ ; $\tau$ ; $I_{\operatorname{Im}\varphi}$ представления $\varphi = \varepsilon_{P_\varphi} \cdot \tau \cdot I_{\operatorname{Im}\varphi}$ .

Заканчивая рассмотрение этого примера, отметим, что образное представление о фактор-множестве $R^2/P_\varphi$ с точностью до биективности дает рисунок 6 в). Т. е. $R^2/P_\varphi$ с точностью до биективности - это множе-ство точек поверхности тора, полученного из множества $\varphi(R^2)$ посредством двух его



преобразований, механизмы исполнения которых наглядно воспроизведены на рисунке 6 б), в).

Студентам можно предложить задачу на получение трехмерного обобщения предшествующих примеров.

10. В этом пункте, даются описания технологических подходов к

использованию информативных возможностей интерактивных досок в процессе проведения пропедевтической работы, связанной с освоением понятий изоморфизма и гомоморфизма и концепции изучения алгебраических систем с точностью до изоморфизма. При написании этого пунк-та использовались результаты работы [4].

Повсеместное внедрение в учебно-воспитательный процесс компьютерной математики, информационных и коммуникационных техноло-гий и современных технических средств обучения, созданных на их ос-нове, открывает эффективные возможности повышения роли объясни-тельных, описательных, оперативных и предсказательных функций средств наглядности.

Уникальными возможностями обладают, в этом отношении, интерактивные доски. Размеры дисплея доски позволяют компактно пред-ставлять объемную информацию посредством схем, графиков, графов, диаграмм, таблиц, характерных рисунков в их взаимодополняющем и ак-тивизирующем интуицию и восприятие единстве.

Эта информация может отражать: структурное строение сложного объекта; этапы образования научных абстракций высокого уровня; технологический процесс применения метода, наиболее органичного той или иной дисциплине или ее разделу.

Важно подчеркнуть, что визуальное восприятие поэтапной реализации методов или типичных конструкций, воплощенных в схемах нагляд-но-информативного характера, способствует формированию внутренних когнитивных структур, отражающих формально-логические особенности строения и функционирования этих схем, посредством создания и закрепления их мыслительных образов в долговременной памяти.

Наглядный материал, демонстрационного сопровождения пропедевтической работы, связанной с формированием представлений о концеп-ции изучения алгебр с точностью до изоморфизма, представлен на четы-рех таблицах (смотри таблицы 1-4).

Восприятие этих таблиц в их системном единстве представляет со-бой содержательно-образный вариант пропедевтики этой концепции.

В качестве первой иллюстрации (таблица 1) рассматривается на-глядно-образное воплощение технологических процедур, связанных с представлением фактор-множеств с точностью до биективности [2], определяющая роль которого в процессе получения композиционного представления произвольных отображений была продемонстрирована в пункте 6 работы [1].

Следующая иллюстрация «Теорема о представлении отображений» демонстрирует процесс поэтапного выявления базовых составляющих композиционного представления отображений, мыслительное воплощение которого, посредством диаграммы абстрактного характера, пред-ставляет собой характерный пример когнитивной (знаниевой) структуры (таблица 2).

Прослеживание этого процесса в обратном порядке (от формальной диаграммы и вербальных характеристик до практического ее примене-ния) сообщает полученной диаграмме определенную динамику и рас-крывает механизмы наполнения этой диаграммы конкретным содержа-нием, свойственным конкретному рассматриваемому примеру. Эта ил-люстрация важна в связи с тем, что теорема о представлении отображе-ний, как отмечалось ранее в пункте 3 этой работы, представляет собой первую теорему о гомоморфизмах алгебр в «чистом виде», т.е. алгебр с пустыми множествами алгебраических операций и выделенных элементов.

При проведении пропедевтической работы, связанной с переходом к общему случаю произвольных алгебр, значительное внимание уделялось понятию конгруэнтности, как отношению эквивалентности «устойчиво-му» относительно операций и выделенных элементов, определенных на основных множествах этих алгебр.

С пропедевтической точки зрения, важно отметить, что далеко не каждое отношение эквивалентности, определенное на основном множестве *M* алгебры ***M*** будет конгруэнтностью.

В частности, в таблице 3 даются демонстрационные материалы пропедевтического изучения отношений эквивалентности и конгруэнтности.

Часть а) этой таблицы демонстрирует технологическую процедуру получения фактор-множества $M/_P$, как множества новой природы, элементами которого являются классы эквивалентности $[a]_P\ (a \in M)$.

Следующая часть (часть б)) таблицы дает наглядное представление о возможных исходах реализации предписаний а) - в) пункта 5 работы [1] применительно к бинарной алгебраической операции «$*$» алгебры $\boldsymbol{M} = \langle M;*\rangle$ и произвольному отношению эквивалентности *P*, определен-ному на основном множестве *M* этой алгебры.

Части в) - г) данной таблицы дают примеры таких разбиений основ-ного множества *C* алгебры $\boldsymbol{C} = \langle C;\bullet\rangle$ - комплексных чисел относительно операции «$\bullet$» - умножения, первое из которых порождает отношение эк-вивалентности, являющееся конгруэнтностью, а второе - отношение эквивалентности, не являющееся конгруэнтностью.

Четвертая таблица: «Пропедевтическое изучение понятия изомор-физма» завершает пропедевтическое ознакомление студентов с концеп-цией изучения алгебраических систем с точностью до изомофизма.

В этой таблице рассматриваются три конкретных алгебры ***Ф; S; M*** сигнатуры $\sigma = \langle F_1^1\rangle$. Основным множеством первой из них является



множество, состоящее из шести функций. Это множество замкнуто относительно операции суперпозиции, которая выступает в качестве основной операции этой алгебры. Вторая алгебра представляет собой группу самосовмещений (вращений в плоскости и поворотов в пространстве) равностороннего треугольника. Основным множеством третьей алгебры является множество из шести матриц второго прядка, замкнутое относительно обычной операции умножения матриц, которая играет в этой ал-гебре роль основной операции.

Основные операции указанных алгебр представлены посредством таблиц Кэли, строение которых является наглядной иллюстрацией базовых положений концепции изучения алгебр с точностью до изоморфиз-ма: несмотря на различие природы элементов основных множеств этих алгебр и специфики задания основных операций, эти алгебры являются изоморфными копиями друг друга (таблица 4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дроботун Б. Н., Мозговая О. И. Из опыта постановки, разра-ботки и реализации концепции изучения алгебраических систем с точностью до изоморфизма // Вестник ПГУ. Серия физико-математических наук. – 201

2. Гончаров С. С., Дроботун Б.Н., Никитин А.А. Методические аспекты изучения алгебраических систем в высшем учебном заведе-нии: Монография.- Новосибирск: издательство НГУ. Научное изда-ние, 2007. 251с.

3. Кострикин А. И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977. 496 с.

4. Дроботун Б.Н. О реализации принципа наглядности в процессе обучения логико-алгебраическим дисциплинам в высших учебных заведениях // «Наука и техника Казахстана», 2009, № 2. стр. 39-51.

**Түйіндеме**

*Жұмыста технология негізінде жиын бейнелеуін композициялық ұсынысын қамтамасыз ететін (амалдардың бос жиынтығымен және ерекшеленген элементтердің қарапайым алгебрасы сияқты), әдіснамалық тәсілдер ұсынылады және фактор - құрылымын құрудағы дағдылардың әдістемелік ұсыныстары берілiп, алгебралардың гомоморфтық бейнелеуі алынады.*

**Resume**

*In the given work on the basis of detection technologies for obtaining a composite repre-sentation of the sets of maps (as a simple algebra with an empty set of operations and selected items) methodological approaches are offered , and guidelines for building the skills of con-structing the factor structures and to obtain homomorphic imagesof algebras are provided.*

УДК 512.774.3

# ИЗ ОПЫТА ПОСТАНОВКИ, РАЗРАБОТКИ И РЕАЛИЗАЦИИ КОНЦЕПЦИИ ИЗУЧЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ТОЧНОСТЬЮ ДО ИЗОМОРФИЗМА (I)

**Б.Н. Дроботун, О.И. Мозговая**
*Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар*

1. Алгебраическая система [1], являясь органическим единством трех своих составляющих - множества, совокупности алгебраических операций и совокупности предикатов, определенных на этом множестве, дает наиболее универсальную форму представления математиче-ских объектов и структур. Эта универсальность обусловлена спецификой математического познания: изучение в математике идеальных образов реальных предметов и их совокупностей привело к необходимости рассмотрения отношений и алгебраических операций, как абстрактных аналогов свойств и зависимостей, присущих этим объек-там и структурам.

С теоретико-философской точки зрения под структурой понима-ется «совокупность устойчивых связей объекта, обеспечивающих его целостность и тождественность самому себе, т. е. сохранение основных свойств, при различных внешних и внутренних изменениях» [2]. Применительно к математике, представления об устойчивых связях объекта, относительно внешних и внутренних изменений, нашло свое абстрактное воплощение в концепции изучения математических структур с точностью до изоморфизма. Формируя представление об этой концепции, академик А. Н. Колмогоров отметил: «Специальные разделы математики занимаются структурами, принадлежащими к тем или иным родам структур. Каждый род структур определяется соот-ветствующей системой аксиом, выраженной на языке теории множеств. Математика интересуется только теми родами структур, кото-рые вытекают из принятой системы аксиом, т. е. изучает структуры только с точностью до изоморфизма» [3].

В данной работе анализируется опыт формирования содержа-тельных представлений о концепции изучения алгебраических систем с точностью до изоморфизма и на основе обобщения этого опыта предлагаются методологические подходы к освоению формальных аналогов понятий, канонических конструкций и технологических процедур, сопутствующих постановке и реализации этой концепции в рамках логико-алгебраических дисциплин, изучаемых в высших учебных заведениях.



Содержательное представление о концепции изучения алгебраических систем с точностью до изоморфизма может быть составлено следующим образом.

Аксиомы, предназначение которых состоит в потенциальной возможности определения свойств совокупностей операций, отноше-ний и конкретных элементов, записываются на формальном символи-ческом языке, алфавит которого содержит специальные символы для операций, отношений и выделенных элементов из этих совокупно-стей. Множество всех этих специальных символов называется сигна-турой. Таким образом, аксиомы представляют собой некоторые син-таксические конфигурации данной сигнатуры, построенные по опре-деленным правилам.

Для получения алгебраической системы, обладающей структур-ными свойствами, аккумулированными в заданной системе аксиом, нужно на произвольном непустом множестве (т. е. на множестве, при-рода элементов которого не имеет никакого значения) так определить совокупности операций, отношений и выделенных элементов, соот-ветствующих символам рассматриваемой сигнатуры, чтобы все эти аксиомы оказались истинными.

«Запрограммированные» посредством рассматриваемых аксиом структурные свойства, т. е. свойства теоретико-множественного, то-пологического, порядкового, алгебраического и другого характера бу-дут, тем самым, общими для класса всех полученных подобным обра-зом алгебраических систем, рассматриваемой сигнатуры.

Но кроме общих свойств, всякая отдельно выделенная алгебраи-ческая система из этого класса вполне может обладать такими инди-видуально присущее ей структурными свойствами, которые не нашли абстрактного отражения в формальном строении аксиом. Вполне воз-можно, что у некоторых алгебраических систем из этого класса инди-видуальные структурные свойства и характеристики могут оказаться одинаковыми. В таком случае, эти системы будут отличаться одна от другой только природой элементов своих основных множеств и со-держательными особенностями описаний специфики действия на этих множествах операций и отношений. В связи с тем, что изучению под-лежат, заданные аксиомами структурные свойства, в их «чистом ви-де», то вышеуказанные отличия не существенны, т. е. подобные ал-гебраические системы естественно считать идентичными копиями друг друга и не различать в дальнейшем.

Абстрактно-формальным аналогом содержательно определенного отношения «алгебраические системы A и B являются идентичными копиями друг друга» является отношение изоморфизма. Это отноше-ние как бинарное отношение, определенное на рассматриваемой сово-купности алгебраических систем, является отношением эквивалентно-сти. В соответствии с основным свойством отношения эквивалентно-сти совокупность всех алгебраических систем данной сигнатуры раз-бивается на непересекающиеся классы эквивалентности, которые (в данном конкретном случае) называются типами изоморфизма. Каж-дый из типов изоморфизма представляет собой «в чистом виде» об-щие и индивидуальные свойства операций и отношений, в одинаковой мере присущие всем его системам. Таким образом, именно эти систе-мы и будут считаться идентичными копиями друг друга, т. е. изо-морфными. Содержательная сущность концепции изучения алгебраи-ческих систем с точностью до изоморфизма как раз и заключается в том, чтобы не различать изоморфные системы.

2. В дисциплинах логико-алгебраической направленности, изу-чаемых в высших учебных заведениях, доминирующее начало при-надлежит алгебрам. В первую очередь - это классические алгебры: группы, кольца, поля, векторные и евклидовы пространства.

В соответствии с этим, далее будет предпринят опыт формирова-ния пропедевтических представлений о концепции изучения алгеб-раических систем с точностью до изоморфизма применительно к ал-гебрам.

Дадим предварительно формальные аналоги некоторых понятий, элементы содержательного описания которых были даны в пункте 1.

Далее в работе будет использоваться общепринятая теоретико-множественная и логико-алгебраическая терминология и символика [4-5].

Пусть *M* - произвольное непустое множество, $n \in N$ и $M^n$ - $n$ -ая декартова степень множества *M*. Под $n$ -местной алгебраической операцией $F(x_1;x_2;...;x_n)$, определенной на множестве *M*, понимается отображение *F* из множества $M^n$ в множество *M*. Если $(a_1;a_2;...;a_n) \in M^n$, то запись $b = F((a_1;a_2;...;a_n))$, будет сокращаться до записи $b = F(a_1;a_2;...;a_n)$ и элемент *b*, являющийся образом $n$ -ки $(a_1;a_2;...;a_n)$, будет называться значением операции $F(x_1;x_2;...;x_n)$ при значениях переменных $x_1;x_2;...;x_n$, равных $a_1;a_2;...;a_n$, соответственно.

Через $F^n(M)$ будет обозначаться, далее, множество всех $n$ -местных алгебраических операций, определенных на множестве *M*, а через *F(M)* множество

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} F^n(M).$$

Под сигнатурой $\sigma$ будем понимать упорядоченный набор

$$\sigma = \langle F_1^{n_1};F_2^{n_2};...;F_k^{n_k};c_1;c_2;...;c_l \rangle,$$

где $F_i^{n_i}$ - символ для $n_i$ -местной алгебраической операции, $c_j$ - сим-вол для выделенного элемента (т.е. символ для 0-местной алгебраиче-ской операции), $i = 1;2;3;...;k$, $j = 1;2;...;l$.

Отображение $\varphi : \sigma \to F(M)$, такое, что:

1) $\varphi(F_i^{n_i}) = {}^{\varphi}F_i^{n_i} \in F^{n_i}(M)$, $(i = 1;2;3;...;k)$;

2) $\varphi(c_k) = {}^{\varphi}c_k \in M$, $(k = 1;2;3;...;l)$,



будем называть интерпретацией. Таким образом, посредством интер-претации $\varphi$ каждому сигнатурному символу $F_i^{n_i}$ $(i = 1;2;3;...;k)$ ставится в соответствие $n_i$ -местная алгебраическая операция ${}^{\varphi}F_i^{n_i}$, определенная на множестве *M*, а каждому из символов для выделенных элементов ставится в соответствие фиксированный элемент ${}^{\varphi}c_k$ множества *M*. Через ${}^{\varphi}\sigma$ будет обозначаться далее образ сигнатуры $\sigma$ при отображении $\varphi$, т.е.

$${}^{\varphi}\sigma = \langle {}^{\varphi}F_1^{n_1}; {}^{\varphi}F_2^{n_2};...; {}^{\varphi}F_k^{n_k}; {}^{\varphi}c_1; {}^{\varphi}c_2;...; {}^{\varphi}c_l \rangle.$$

Под алгеброй сигнатуры $\sigma$ будем понимать упорядоченную пару $\boldsymbol{M} = \langle M; {}^{\varphi}\sigma \rangle$, т. е. непустое множество *M* вместе с некоторой интерпретацией сигнатуры $\sigma$ на этом множестве.

Пусть $\boldsymbol{M}_1 = \langle M_1; {}^{\varphi}\sigma \rangle$, и $\boldsymbol{M}_2 = \langle M_2; {}^{\psi}\sigma \rangle$ - две алгебры сигнатуры $\sigma$ и $\Phi : M_1 \to M_2$ - биективное отображение основного множества $M_1$ алгебры $\boldsymbol{M}_1$ на основное множество $M_2$ алгебры $\boldsymbol{M}_2$.

Отображение *Ф* называется изоморфным отображением алгебры $\boldsymbol{M}_1$ на алгебру $\boldsymbol{M}_2$, если выполняются следующие условия:

1) $\Phi({}^{\varphi}F_i^{n_i}(a_1;a_2;...;a_n)) = {}^{\psi}F_i^{n_i}(\Phi(a_1);\Phi(a_2);...;\Phi(a_n))$,

для любых i=1;2;…;k;

2) $\Phi({}^{\varphi}c_j) = {}^{\psi}c_j$,

для любых j=1;2;…;l.

Если существует изоморфное отображение алгебры $\boldsymbol{M}_1$ на алгебру $\boldsymbol{M}_2$, то эти алгебры называются изоморфными (символически $\boldsymbol{M}_1 \cong \boldsymbol{M}_2$).

Если в определении отношения изоморфизма не требовать инъ-ективности и сюрьективности отображения *Ф*, т. е. считать *Ф* произвольным отображением, то получается определение гомоморфного отображения алгебры $\boldsymbol{M}_1$ в алгебру $\boldsymbol{M}_2$.

3. Формальные определения пункта 2 даны в строгих современ-ных формах для того, чтобы задать итоговые ориентиры, определяю-щие содержание и основные направления пропедевтической работы, связанной с формированием представлений о концепции изучения ал-гебраических систем с точностью до изоморфизма.

Как показывает практика, наиболее продуктивным путем форми-рования содержательных представлений о совокупности формальных определений, сопутствующих формулировке понятий изоморфизма и гомоморфизма, является последовательный переход от примеров не математического характера к простейшим демонстрационным приме-рам, основывающимся на материале школьной математики и, далее, к примерам, базирующимся на предметном содержании математиче-ских дисциплин, изучаемых в высших учебных заведениях.

Касаясь примеров первого типа, уместно рассмотреть следующий пример.

Опубликованное художественное произведение (повесть, роман и т. д.) можно рассматривать как «алгебру», основным множеством ко-торой является множество действующих лиц этого произведения. В качестве совокупностей основных операций и выделенных элементов этой «алгебры» естественно взять совокупность всевозможных зави-симостей между действующими лицами и совокупность главных ге-роев.

Перевод данного художественного произведения на любой из иностранных языков (с последующей его публикацией) можно рас-сматривать, как вторую алгебру. Так как при переводе множество действующих лиц оригинала находит свое биективное (взаимно одно-значное) отражение в множестве действующих лиц перевода, то мож-но считать, что основное множество 1-ой алгебры биективно отобра-жается на основное множество 2-ой алгебры. При этом все функцио-нальные зависимости между действующими лицами и главными ге-роями в переводе остаются теми же, что и для их прообразов в ориги-нале.

Для полноты отражения (посредством этого примера) содержа-тельной сущности концепции изучения алгебр с точностью до изо-морфизма, необходимо отметить, что различие между оригиналом и переводом носит чисто внешний характер: различны алфавиты, из букв которых составлены слова оригинала и перевода; различно оформление и формат страниц; различно качество исполнения и т. д. Но, тем не менее (и это главное), оригинал и его перевод являются идентичными («изоморфными») копиями художественного воображе-ния автора этого произведения.

Переходя к примерам, базирующимся на материале школьных математических дисциплин, целесообразно рассмотреть следующие примеры:

а) Пусть $\boldsymbol{R}^+ = \langle R^+; \bullet; 1\rangle$ и $\boldsymbol{R} = \langle R; +; 0\rangle$ - алгебры сигнатуры $\sigma = \langle F_1^{(2)}; c_1\rangle$, где: «•» и «+» - обычные бинарные алгебраические опе-рации умножения и сложения на числовых множествах; $R$ и $R^+$ - множество действительных и множество неотрицательных действи-тельных чисел, соответственно; 1 и 0 - нейтральные элементы относи-тельно этих операций (выделенные элементы).

Общее понятие интерпретации применительно к этим алгебрам конкретизируется следующим образом:

$$^{\varphi}\sigma = \langle ^{\varphi}F_1^{(2)};\ ^{\varphi}c_1\rangle = \langle \bullet; 1\rangle \tag{1}$$

$$^{\psi}\sigma = \langle ^{\psi}F_1^{(2)};\ ^{\psi}c_1\rangle = \langle +; 0\rangle \tag{2}$$

Отображение $\Phi$: $R^+ \to R$ определим по правилу (смотри рисунок 1):

$$(\forall x \in R^+)(\Phi(x) = \lg x) \tag{3}$$

Из школьного курса «Алгебра и начала анализа» известно, что $\Phi$ - биективное отображение из множества $R$ на множество $R^+$ . Условия 1), 2)



определения изоморфизма из пункта 2 в данном конкретном случае будут иметь вид:

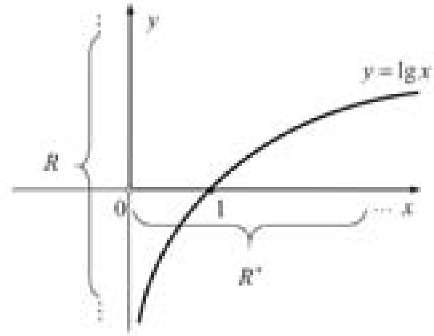



Рисунок 1

1) $\Phi(^{\varphi}F_1^{(2)}(a_1; a_2)) = {}^{\psi}F_1^{(2)}(\Phi(a_1); \Phi(a_2))$;

2) $\Phi(^{\varphi}c_1) = {}^{\psi}c_2$ .

Или (с учетом определений (1), (2) и (3)):

1') $\lg(a_1 \cdot a_2) = \lg a_1 + \lg a_2$ ;

2') $\lg 1 = 0$ ,

т. е. эти условия превращается в известные из школьной математики утверждения:

1'') Логарифм произведения (по основанию 10) двух неотрица-тельных чисел равен сумме логарифмов этих чисел;

2'') Логарифм числа 1 (по основанию 10) равен 0.

Установив факт изоморфизма алгебр $\langle R^+; \bullet\rangle$ и $\langle R; +\rangle$, полезно, по-яснив идею осуществления вычислений с помощью логарифмической линейки, напомнить образное высказывание из работы [6]: «пользуясь логарифмической линейкой, мы пожинаем плоды этого изоморфиз-ма».

б) В качестве второго (более содержательного) примера можно рассмотреть алгебры:

$\boldsymbol{R} = \langle R; f_1(x_1); f_2(x_1; x_2); 0\rangle$

и

$\boldsymbol{R}^+ = \langle R^+; g_1(x_1); g_2(x_1; x_2); 1\rangle$

сигнатуры $\sigma = \langle F_1^1; F_2^2; c_1\rangle$. В этом примере множества $R$ и $R^+$ опреде-ляются так же, как и в примере а).

Алгебраические операции $f_1(x_1)$ и $f_2(x_1; x_2)$ задаются на $R$ по следующим правилам:

$(\forall a_1 \in R)(f_1(a_1) = 10a_1)$,

т. е. $f_1$ - унарная операция «увеличения в 10 раз»;

$(\forall a_1; a_2 \in R)$, $\left(f_2(a_1; a_2) = \dfrac{a_1 + a_2}{2}\right)$

т. е. $f_2$ - бинарная операция «взятия среднего арифметического чисел $a_1$ и $a_2$».

Операции $g_1(x_1)$ и $g_2(x_1; x_2)$ определяется, в свою очередь, на множестве $R^+$ следующим образом:

$(\forall a_1 \in R^+)(g_1(a_1) = a_1^{10})$,

т. е. $g_1$ - унарная операция «возведения в 10-ую степень»;

$(\forall a_1; a_2 \in R^+)(g_2(a_1; a_2) = \sqrt{a_1 \cdot a_2})$,

т.е. $g_2$ - бинарная операция «взятия среднего геометрического чисел $a_1$ и $a_2$».

Интерпретации $\Phi$ и $\Psi$ сигнатуры $\sigma$ в данном примере строятся следующим образом:

$$^{\Phi}\sigma = \langle {}^{\Phi}F_1^1; {}^{\Phi}F_2^2; {}^{\Phi}c_1 \rangle = \langle f_1(x_1); f_2(x_1; x_2); 0 \rangle \qquad (4)$$

$$^{\Psi}\sigma = \langle {}^{\Psi}F_1^1; {}^{\Psi}F_2^2; {}^{\Psi}c_1 \rangle = \langle g_1(x_1); g_2(x_1; x_2); 1 \rangle \qquad (5)$$

Определим отображение $\Phi: R \to R^+$ основного множества $R$ первой алгебры ***R*** в основное множество $R^+$ второй алгебры ***R***$^+$ по следующему правилу:

$$(\forall x \in R)(\Phi(x) = 2^x). \qquad (6)$$

Свойства функции $y = 2^x$, известные еще из школьной математики, позволяют утверждать, что $\Phi$ - биективное отображение из множества $R$ на множество $R^+$ (смотри рисунок 2).

Проверим, что отображение $\Phi$, определенное по правилу (6), яв-ляется изоморфным отображением алгебры ***R*** на алгебру ***R***$^+$.

Для этого осталось убедиться в том, что отображение Ф согласо-ванно с основными операциями алгебр R и , т. е. что условия 1) и 2) определения изоморфизма, приведенные в пункте 2, действительно имеют место. Эти условия, в виду определений (4), (5) и (6) примут вид:

1.1) $(\forall a_1 \in R)(\Phi(f_1(a_1)) = g_1(\Phi(a_1)))$;

1.2) $(\forall a_1; a_2 \in R)(\Phi(f_2(a_1; a_2)) = g_2(\Phi(a_1); \Phi(a_2)))$;

2) $\Phi(0) = 1$.

С учетом очевидности последнего равенства, проверке подлежат лишь условия 1.1) и 1.2)

Действительно, пусть $a_1; a_2 \in R$, тогда:

1.1) $\Phi(f_1(a_1)) = \Phi(10a_1) = 2^{10a_1} = (2^{a_1})^{10} = (\Phi(a_1))^{10} = g_1(\Phi(a_1))$;



1.2) $\Phi(f_2(a_1; a_2)) = \Phi\left(\dfrac{a_1 + a_2}{2}\right) = 2^{\frac{a_1 + a_2}{2}} = \sqrt{2^{a_1 + a_2}} = \sqrt{2^{a_1} \cdot 2^{a_2}} =$
$= \sqrt{\Phi(a_1) \cdot \Phi(a_2)} = g_2(\Phi(a_1) \cdot \Phi(a_2))$.

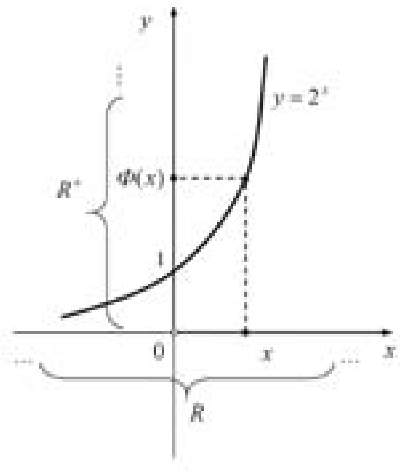



Рисунок 2

Таким образом, совокупности $\{f_1; f_2\}$ и $\{g_1; g_2\}$ основных операций алгебр ***R*** и ***R***$^+$ действуют на носителях $R$ и $R^+$ этих алгебр, с точностью до отображения $\Phi$, одинаково, т. е. ***R*** $\cong$ ***R***$^+$.

4. Как отмечено в пункте 2, понятие изоморфизма алгебр является частным случаем более общего понятия гомоморфизма.

Полное определение этого понятия дается так: отображение Ф: $M_1 \to M_2$ основного множества $M_1$ алгебры ***M***$_1$ в основное множество $M_2$ алгебры ***M***$_2$, удовлетворяющего условия 1) и 2) пункта 2 называется гомоморфным отображением или гомоморфизмом первой из этих алгебр во вторую.

Отметим, что полный гомоморфный образ первой алгебры явля-ется подалгеброй второй алгебры. Так как гомоморфное отображение в общем случае не является биективным, то в этой подалгебре могут быть утрачены некоторые (или даже многие) из структурных свойств, присущих первой алгебре. Тем не менее, самые существенные свойства первой алгебры найдут свое отражение и в ее гомоморфных образах.

Придерживаясь того же пути в пропедевтическом освоении поня-тия гомоморфизма, что и при формировании представлений о концепции изоморфизма алгебр, несколько изменим пример пункта 3, связанный с рассмотрением художественного произведения, как своеоб-разной алгебры. А именно, в качестве второй алгебры рассмотрим не полный, а сокращенный перевод этого произведения на другой язык. Осуществляя сокращенный перевод, переводчик как бы «забывает» о второстепенных действующих лицах и о многих событиях с ними свя-занных. В то же время, самое основное, что было присуще оригиналу, найдет отражение и в переводе.

Студентам для самостоятельной работы, способствующей фор-мированию содержательных представлений о концепции гомомор-физма, целесообразно дать (для более широкого развертывания) крат-кие описания ситуаций, аккумулирующих в себе возможности по-строения примеров не математического характера, подобных выше-приведенному примеру о художественном произведении и его сокра-щенном переводе.

К описаниям таких ситуаций можно отнести следующие описа-ния:

а) конкретный человек и характеристика на этого человека;

б) радиоприбор и его тактико-технические данные;

в) путешественник, впервые побывавший в некоторой стране, и его воспоминания об этом;

г) рыбак, поймавший рыбу, и его рассказ о своей добыче;

д) березовая аллея и ее черно-белое фотографическое изображе¬ние;

е) реальные процессы действительного мира и их математические модели;

ж) «-Где ты была сегодня, киска?
-У королевы у английской.
-Что ты видала при дворе?
-Видала мышку на ковре!» [7, с. 340]

и) «…… Но вот
Неполный слабый перевод,
С живой картины список бледный,…» [8, с. 60].

Последние два примера, взятые из хорошо известных произведений С.Я. Маршака и А.С. Пушкина, помимо активизации (посредством ярких литературно-художественных образов) интуитивно-содержательных представлений о концепции гомоморфизма, дают примеры семантических связей математического и литературного языков.

Переходя к примерам, имеющим элементы математического со-держания, понимание которого не требует специальной математической подготовки, можно рассмотреть следующие алгебры и их возможные гомоморфные образы:

а) под словом, записанным в символах алфавита $\mathrm{A}=\{a_1;a_2;\dots;a_n\}$, ($n\in N$) будем понимать любую конечную, линейно упорядоченную последовательность $a_{i_1};a_{i_2};\dots;a_{i_t}$ $\{i_1;i_2;\dots;i_t\}\in\{1;2;\dots;n\}$ символов этого алфавита. Длиной слова будем называть число символов алфавита А, входящих в его состав с учетом кратности их вхождения. Если, к примеру, $\mathrm{A}=\{a_1;a_2;a_3;a_4;a_5\}$, то $a_3a_5a_1a_3a_5a_5a_4a_2a_1$ является словом, длина которого равна 9.



Пусть $\boldsymbol{M}=\langle M;\circ\rangle$ - алгебра сигнатуры $\sigma=\langle F_1^1\rangle$, носителем кото-рой служит множество $M$ всех слов алфавита А, а «$\circ$» - бинарная алгебраическая операция, определенная на множестве $M$ по правилу:

$$(\forall a_{i_1};a_{i_2};\dots;a_{i_s};a_{j_1};a_{j_2};\dots;a_{j_u}\in M)(a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_s}\circ a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_u}=$$

$$=a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_s}a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_u}),$$

$i_1;i_2;\dots;i_s;\ j_1;\ j_2;\dots;\ j_u\in\{1;2;3;\dots;n\}$ т.е. «$\circ$» - операция приписывания (слева) второго слова к первому.

В качестве второй алгебры рассмотрим алгебру $\boldsymbol{N}=\langle N;+\rangle$, носи-телем которой служит множество $N$={0,1,2,……} натуральных чисел, а «+» - обычная бинарная операция сложения на этом множестве. Покажем, что алгебра $N$ является гомоморфным образом алгебры $\boldsymbol{M}$. С этой целью определим отображение $\Phi: M\to N$ по правилу:

$$(\forall a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_t}\in M)(\Phi(a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_t})=t),$$

т.е. отображение $\Phi$ каждому слову $a_{i_1};a_{i_2};\dots;a_{i_t}$ из множества $M$ ставит в соответствие его длину $t$.

Говоря на содержательном языке, гомоморфизм $\Phi$ «забывает» о формальной структуре слова, запоминая только его длину. Нетрудно проверить, что $\Phi$ является гомоморфным отображением, так как длина слова, полученного приписыванием слева к 1-му слову 2-го равна сумме длин этих слов. Очевидно также, что это отображение является сюръективным, т.е. отображение «на»;

Относительно этого примера уместно отметить также, что гомоморфизм $\Phi$ не является изоморфизмом, т. к. различные слова из $M$ могут иметь одну и ту же длину;

б) предлагаемый далее пример является некоторой модификацией предыдущего. Пусть $\boldsymbol{N}=\langle N;\circ\rangle$ - алгебра, основным множеством которой является множество натуральных чисел, записанных в десятичной системе счисления и «$\circ$» -, как и раньше, бинарная операция приписывания слева второго числа к первому. Через $S(a)$ обозначим сумму цифр числа $a\in N$. В частности $S(3708)=18$. В качестве второй алгебры рассмотрим алгебру

$\boldsymbol{N}_1=\langle N;+\rangle$, где $\langle N;+\rangle$ - алгебра из предшествующего примера. Определим отображение $\Phi: N\to N$ по правилу:

$$(\forall a\in N)(\Phi(a)=S(a)),$$

т.е. отображение $\Phi$ натуральному числу $a$ ставит в соответствие сумму его цифр. Легко видеть, что $\Phi$ - отображение $N$ на $N$. Так как условие согласованности этого отображения с основной операцией алгебры $N$ в данной ситуации принимает вид:

$(\forall a_1; a_2 \in N)(S(a_1 \circ a_2) = S(a_1) + S(a_2))$,

то $\Phi$ является гомоморфизмом алгебры $N$ на алгебру $N_1$;

в) математическую версию вышеприведенных примеров можно получить следующим образом.

Пусть $\boldsymbol{R}[x] = \langle R[x]; \bullet \rangle$ и $\boldsymbol{N} = \langle N; + \rangle$ - алгебры сигнатуры $\sigma = \langle F_1^2 \rangle$.

Основным множеством 1-ой из этих алгебр является кольцо мно-гочленов от одной переменной $x$ над полем $R$ действительных чисел. В качестве основной операции этой алгебры берется обычная опера-ция «$\bullet$» - умножения многочленов. Вторая же алгебра вновь является алгеброй $N$ из предыдущих примеров этого пункта.

Непосредственное сравнение алгебр $R[x]$ и $N$ не позволяет отметить внешних, бросающихся в глаза, связей между ними. Для выявле-ния этих связей нужно проанализировать специфику действия операции «$\bullet$» - умножения на множестве $R[x]$. Заметим, что одной из основных характеристик многочлена $f(x)$ является его степень $\deg f(x)$ и что при умножении многочленов из кольца $R[x]$ степень произведе-ния равна сумме степеней сомножителей, т. е.

$$(\forall f(x) \in R[x])(\forall g(x) \in R[x])(\deg(f(x) \cdot g(x)) = \\ = (\deg f(x) + \deg g(x))) \qquad (7)$$

Нетрудно видеть, что по своему формальному строению это ут-верждение напоминает условие 1) определения понятия изоморфизма из пункта 2. Если же задать отображение $\Phi: R[x] \to N$ по правилу:

$$(\forall f(x) \in R[x])(\Phi(f(x)) = \deg f(x)) \qquad (8)$$

т. е. сопоставить каждому из многочленов кольца R[x] его степень, то утверждение (7) запишется в виде:

$$(\forall f(x) \in R[x])(\forall g(x) \in R[x])(\Phi(f(x) \cdot g(x)) = (\Phi(f(x)) + \Phi(g(x)))) \qquad (9)$$

т. е. в виде в полной мере идентичном этому условию. Отображение $\Phi$, определенное по правилу (8), являясь отображением «на», не является биективным, но в связи с утверждением (9) оно согласованно с основными операциями алгебр $\boldsymbol{R}$[x] и $N$ и, следовательно, является гомоморфным отображением первой из этих алгебр на вторую.

5. При изучении логико-алгебраических дисциплин в высших учебных заведениях нередко встречаются утверждения по своему формальному строению и содержательному смыслу напоминающие утверждение (7):

- модуль произведения двух комплексных чисел равен произведе¬нию модулей этих чисел;
- аргумент произведения двух комплексных чисел равен сумме аргументов сомножителей (взятой по модулю 2π);
- определитель произведения двух квадратных матриц n-го по¬рядка равен произведению определителей;



- знак произведения подстановок n-ой степени равен произведе¬нию знаков этих подстановок.

Как будет видно из дальнейшего, эти утверждения, имея место в соответствующих алгебрах, обеспечивают возможности построения фактор-алгебр этих алгебр.

Технология факторизации алгебр и первая теорема о гомомор-физмах алгебр представляют собой глубокое обобщение идейно-методологических подходов, лежащих в основе определения операции деления и классифицированных процедур, истоки которых восходят к формальной логике.

Как и ранее в пункте 2, дадим предварительно описание методологии построения фактор-алгебр на языке современной математики для того, чтобы полнее охватить круг проблем, требующих пропедев-тической отработки.

Пусть $\boldsymbol{M} = \langle M; {}^{\varphi}\sigma \rangle$ - алгебра сигнатуры $\sigma$ и $P$ - отношение эк-вивалентности на основном множестве $M$ этой алгебры. Отношение $P$ на алгебре $M$ называется конгруэнцией, если для каждой основной операции ${}^{\varphi}F_i^{n_i} \in {}^{\varphi}\sigma$ этой алгебры выполняется условие:

$$(\forall a_1; a_2; \ldots; a_{n_i} \in M)(\forall b_1; b_2; \ldots; b_{n_i} \in M)(\mathop{\&}_{i=1}^{n_i}(a_i P b_i) \to \\ \to ({}^{\varphi}F_i^{n_i}(a_1; a_2; \ldots; a_{n_i}) P\, {}^{\varphi}F_i^{n_i}(b_1; b_2; \ldots; b_{n_i}))) \qquad (10)$$

для любого i={1;2;…;k}.

Содержательно условие (10), означает, что если $a_1; a_2; \ldots; a_{n_i}$ сово-купность представителей из некоторых классов эквивалентности множества $M$ по отношению $P$ и $b_1; b_2; \ldots; b_{n_i}$ - другая совокупность представителей из тех же классов, соответственно, то результаты операции ${}^{\varphi}F_i^{n_i}$ на этих наборах лежат в одном и том же классе.

Если $P$ - конгруэнция на основном множестве $M$ алгебры $\boldsymbol{M} = \langle M; {}^{\varphi}\sigma \rangle$, то на фактор-множестве $M/P$ можно задать структуру новой алгебры по следующим правилам.

Носителем этой новой алгебры, как отмечено выше, будет мно-жество $M/P$. Для определения интерпретации ψ: $\sigma \to F(M/P)$ нужно каждому функциональному символу $F_i^{n_i} \in \sigma$ поставить в соответствие алгебраическую операцию ${}^{\psi}F_i^{n_i}$, заданную на множестве $M/P$ и каждому константному символу $c_j \in \delta\ (j = 1; 2; \ldots; l)$ поставить в соответствие некоторый выделенный элемент из множества $M/P$. Делается это так.

Для того чтобы определить результат операции ${}^{\psi}F_i^{n_i}$ на классах

$[a_1]_P; [a_2]_P; \ldots; [a_{n_i}]_P \in M/P$:

а) выбираем в каждом из этих классов по представителю $a_1;a_2;...;a_{n_i}$, соответственно;

б) находим результат ${}^{\varphi}F_i^{n_i}(a_1;a_2;...;a_{n_i})$ операции ${}^{\varphi}F_i^{n_i}$ на этих представителях;

в) в качестве результата ${}^{\psi}F_i^{n_i}([a_1]_P;[a_2]_P;...;[a_{n_i}]_P)$ определяемой операции ${}^{\psi}F_i^{n_i}$ берем класс $[{}^{\varphi}F_i^{n_i}(a_1;a_2;...;a_{n_i})]_P \in M/P$, в который попал элемент ${}^{\varphi}F_i^{n_i}(a_1;a_2;...;a_{n_i})$, i={1;2;…;k}.

Заметим, что для успешной реализации этого плана на отношение эквивалентности $P$ нужно положить условие, которое обеспечило бы независимость результата ${}^{\psi}F_i^{n_i}([a_1]_P;[a_2]_P;...;[a_{n_i}]_P)$ операции ${}^{\psi}F_i^{n_i}$ от выбора представителей в классах эквивалентности $[a_1]_P;[a_2]_P;...;[a_{n_i}]_P$, т. е. обеспечило бы корректность определения этой операции.

Вспоминая содержательный смысл утверждения (10), получаем, что отношение $P$ должно быть конгруэнцией. В этом случае, как легко видеть, определение ${}^{\psi}F_i^{n_i}$ операции по схеме а) - в) будет корректным.

Значение константного символа $c_j \in \delta$ при интерпретации $\Psi$ определим по правилу:

$${}^{\psi}c_j = \left[{}^{\varphi}c_j\right]_P, \quad j = 1;2;...;l.$$

Полученная алгебра называется фактор-алгеброй алгебры $\boldsymbol{M}$ по конгруэнции $P$ и обозначается через $\boldsymbol{M}/P$.

6. Пропедевтическое освоение технологий построения фактор-алгебр и ознакомление с первой теоремой о гомоморфизмах алгебр целесообразно начинать с освоения схемы описания фактор-множеств с точностью до биективности [9].

Для множества $M$ и определенного на нем отношения эквивалентности $P$ эта схема выглядит следующим образом:

1)найти, исходя из определения отношения эквивалентности $P$ на множестве $M$, характерный признак принадлежности элементов этого множества одному и тому же классу эквивалентности;

2)основываясь на этом признаке, дать описание конкретного класса эквивалентности в терминах подходящей системы новых понятий, характеризующее любого представителя этого класса и не зависящее от выбора этих представителей;

3)исходя из полученного описания конкретных классов эквива-лентности, дать описание фактор-множества в целом.

Начиная ознакомление с этой схемой, желательно, как и раньше, переходить от рассмотрения примеров не математического характера к наглядным примерам, имеющим отношение к математике и, далее, к примерам из различных разделов дисциплин логико-алгебраической ориентации.



а) Пусть $M$ - множество всех рабочих некоторой строительной фирмы. Для корректности дальнейшего изложения будем предполагать, что каждый рабочий имеет только одну профессию.

Определим на $M$ бинарное отношение $P$ по правилу:

$(\forall a;b \in M)(aPb \Leftrightarrow$ рабочие $a$ и $b$ имеют одну и ту же профессию).

Очевидно, что $P$ отношение эквивалентности на множестве $M$. Следуя вышеприведенной схеме, будем иметь:

1)рабочие $a$ и $b$ попадут в один и тот же класс эквивалентности

тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же профессию (т. е. к примеру, все каменщики строительной фирмы составят один класс, все штукатуры другой и т. д.);

2)так как каждый из классов эквивалентности состоит из рабо-чих одной и той же строительной профессии, то этот класс можно од-нозначно охарактеризовать наименованием этой профессии (т. е. классу, составленному из каменщиков, поставить в соответствие сло-во «каменщик» и т. д.);

3)фактор-множество $M/P$, состоящее из всех классов эквива-лентности, можно описать, таким образом, как множество всех слов, являющихся именами рабочих строительных профессий, рассматри-ваемой строительной фирмы:

$M/P \cong$ {каменщик, штукатур, плотник, … }.

б) В качестве примера математического характера можно рас-смотреть множество $M_n(R)$ - всех квадратных матриц $n$-го порядка над полем действительных чисел, определив на этом множестве би-нарное отношение $P$ по одному из правил:

б.1) $(\forall A;B \in M_n(R))(APB \Leftrightarrow (r(A) = r(B)))$,

т. е. матрицы $A$ и $B$ находятся в отношении $P$ тогда и только тогда, ко-гда их ранги равны;

б.2) $(\forall A;B \in M_n(R))(APB \Leftrightarrow (\det(A) = \det(B)))$,

т. е. матрицы $A$ и $B$ находятся в отношении $P$ тогда и только тогда, ко-гда их определители равны.

Очевидно, что в каждом из случаев б.1) и б.2) отношение $P$ будет являться отношением эквивалентности.

Применяя схему описания получаемых при этом фактор-множеств, будем иметь:

б.1)

1) матрицы $A$ и $B$ попадут в один класс $\Leftrightarrow$ когда ранги этих мат-риц равны;

2) так как все матрицы из класса эквивалентности $[A]_P$ имеют один и тот же ранг, равный рангу любой матрицы из этого класса (в частности, рангу матрицы $A$), то класс $[A]_P$ полностью характеризуется (с классификационных позиций) числом $r(A)$;

3) так как ранг любой матрицы из множества $M_n(R)$ является не-отрицательном числом $k$, удовлетворяющим условию $(0 \le k \le n)$, то фактор-множество $M/P$ с точностью до биективности представляет собой множество $\{0;1;2;...;n\}$, т. е.

$$M/P \cong \{0;1;2;...;t\}.$$

б.2)

1) матрицы $A$ и $B$ попадут в один класс $\Leftrightarrow$ когда их определители равны;

2) так как определитель любой матрицы из $M_n(R)$ является действительным числом, то каждый класс эквивалентности $[A]_P$ можно однозначно охарактеризовать числом $\det(B)$, где $B$ - любая матрица из этого класса;

3) так как для любого действительного числа $\alpha$ существуют матрицы А из $M_n(R)$ с определителем, равным $\alpha$ (к примеру матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}),$$

то фактор-множество $M_n(R)/P$ (с точностью до биективности) представляет собой множество всех действительных чисел, т. е. $M_n(R)/P \cong R$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Архитектура математики. Очерки по истории раз-вития математики. М.: ИЛ, 1965. 292 с.

2. Философский энциклопедический словарь. М.: Советская эн-циклопедия, 1983. 840 с.

3. Колмогоров А. Н. Научные основы школьного курса математи-ки. Первая лекция. Современные взгляды на природу математики // «Математика в школе», 1969, № 3.



4. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.

5. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: Нау-ка, 1979. 320 с.

6. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.

7. Маршак С. Я. Собрание сочинений в 4-х томах. М.: Правда, 1990. Том 1, 592 с.

8. Пушкин А. С. Собрание сочинений в 10 томах. М.: Наука, 1978. Том 5, 528 с.

9. Гончаров С. С., Дроботун Б.Н., Никитин А.А. Методические аспекты изучения алгебраических систем в высшем учебном заведе-нии: Моногр.- Новосибирск: изд-во НГУ. Научное издание, 2007. 251с.

**_Түйіндеме_**

*Жұмыста алгебралық жүйелерді изоморфизмге дейін дәлдігін оқыту тұжырымдамасы туралы мағыналы ұсыныстарды құру тәжірибесі талданып және осы тәжірибені жалпылау негізінде ұғымдардың формальді ұқсастығын игеруіне әдіснамалық тәсілдер ұсынылады. Канондық құрылымдар және технологиялық процедуралар ауыстыруларга сәйкес келеді және бұл тұжырымдар логико – алгебралық пәндер төңірегінде іске асырылады.*

**_Resume_**

*This paper examines the experience of forming meaningful under-standing of the con-cept study of algebraic systems up to isomorphism, and on the basis of summarizing the experience methodological approaches are offered to the development of formal analogues of the concepts of canoni-cal structures and technological processes, accompanying the formulation and implementation of this concept in the logic-algebraic subjects studied in higher education.*

УДК 004.89

## ТЕХНОЛОГИИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ МУЛЬТИАГЕНТНЫХ СИСТЕМ В ОБРАЗОВАНИИ

**Н.А. Дубинец**

*Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар*

Перспективным направлением искусственного интеллекта на сегодняшний день являются интеллектуальные мультиагентные системы. Это новое направление сформировалось на основе нескольких областей информационных технологий – параллельных вычислений, сетевых технологий и распределенных компьютерных сетей.

Идея многоагентных систем появилась в научной школе М.Л. Цетлина в конце 1950-х голов, где изучалось коллективное поведение автоматов.[1] Агентами были названы искусственные существа, способные воспринимать и интерпретировать сигналы внешней среды и формировать ответные сигналы, то есть обладающие свойствами реактивности. Они описывались как «маленькие животные». В этой роли выступали конечные автоматы, которые не имели каких-либо знаний об свойствах внешней среды и о наличии в ней других существ, но они знали цель своей деятельности и были способны оценивать поступающие сведения относительно достижения этой цели. В стационарных вероятностных средах конечные автоматы демонстрируют хорошие способности, несмотря на свою простоту. Следующим свойством агентов-автоматов была рациональность, накопленная агентом сумма положительных откликов среды за некоторый период его существования. В дальнейших исследованиях структура «маленьких животных» усложнялась. Сначала появились вероятностные автоматы с переменной структурой, адаптирующей к характеристикам среды, затем появились агенты, способные изменять свои реакции на основании истории существования и анализа окружающей среды. [2] Простейшие модели взаимодействия агентов могли общаться между собой через среду. На каждом шаге функционирования агенты совершают выбор действий, возможный только для них. Множество всех действий инициирует отклики и распределяет их для всех участников, которые могут использовать либо не использовать при формировании своих ответных шагов.

Примерно к концу 70-х годов прошлого столетия был сделан новый шаг к современному пониманию агентов благодаря появлению распределенных компьютерных систем. В это время сформировалась идеология интеллектуальных многоагентных систем, основанная на результатах работ по исследованию «распределенного искусственного интеллекта». Первоначально использовался термин «многоагентная система», впоследствии благодаря бурному развитию многоагентных направлений этот термин стал использоваться в английской транскрипции (Multi-agent system). В последние годы в литературе и Интернете начал утверждаться термин «мультиагентная система». Темины «многоагентная» и «мультиагентная» являются синонимами и могут использоваться равнозначно, поэтому в дальнейшем в данной работе будет использоваться термин «мультиагентная система».

В последние годы термин «интеллектуальный агент» понимается как программа, самостоятельно выполняющая задание, указанное пользователем компьютера, в течение длительных промежутков времени. Интеллектуальные



агенты используются для сбора информации или помощи пользователю. Актуальным примером таких заданий, выполняемых агентами, может служить задача постоянного поиска и сбора необходимой информации в Интернете. Компьютерные вирусы, поисковые роботы — всё это также можно отнести к интеллектуальным агентам. Хотя такие агенты имеют строгий алгоритм, «интеллектуальность» в этом контексте понимается, как способность приспосабливаться и обучаться. [4]

В настоящее время мультиагентной системой можно считать сетевую совокупность в разной степени автономных объектов, способных хранить, получать и обрабатывать информацию как в собственных целях, так и в корпоративных интересах. Агентом такой системы может быть аппаратная, программная, или аппаратно-программная реализация. Уровень «интеллекта» агента определяется возможностями программы. [4]

Интеллектуальным агентам свойственны следующие основные признаки: автономность; общительность; реактивность; целенаправленность, имеющая наличие собственные источники мотивации; наличие базовых знаний о себе, о других агентах и об окружающей среде; желания; убеждения; намерения.

Для классификации мультиагентных систем используется основной признак - степень развития внутреннего представления о внешнем мире. [2]

По этому признаку выделяются интеллектуальные (когнитивные, рассуждающие) и реактивные агенты. Интеллектуальные агенты обладают хорошо развитой и пополняемой символьной моделью внешнего мира благодаря наличию у них базы знаний, механизмов рассуждения и анализа действий. Обобщенная схема интеллектуального агента представлена на рисунке 1. Реактивные агенты не имеют развитого представления о внешней среде. Они не используют рассуждений и могут не иметь собственных ресурсов. Их поведение определяется целью, в соответствии с которой формируются реакции на предъявляемые ситуации. В связи с этим реактивные агенты не имеют внутренних источников мотивации и не способны планировать свои действия.


Рисунок 1 – Обобщенная схема интеллектуального агента

Актуальной областью применения мультиагентных систем определилось создание виртуальных моделей предметных областей – экономических, математических, эволюционных, имитационных.

В настоящее время сформировалось два класса задач – задачи распределенного управления системами и задачи планирования целей развития сложных систем. [4]

Задачи распределенного управления системами можно применить в образовании, создав мультиагентные системы, поддерживающие учебный процесс на всех административных уровнях. Учебный процесс состоит из множества субъектов: деканат, кафедра, офис-регистраторы, профессорско-преподавательский состав, учебно-методический отдел, обучающиеся. Каждый субъект должен иметь поддержку собственной мультиагентной системы. Создание такой сложной системы возможно, если вести целенаправленные и планомерные исследования с обязательным уточнением необходимых условий и требований согласно разработанных спецификаций.

Накопленные в ходе работы профессорско-преподавательского состава данные исключительно ценны. Необходимо систематизировать накопленные данные с целью минимизации риска испортить их в процессе работы: утрата такой ценности недопустима.

Необходимо разделить рабочую базу данных, отвечающую за текущее функционирование учебного заведения, и хранилище данных, назначение которого – накопление всего массива данных с целью дальнейшего анализа и синтеза. Как правило, от рабочей базы данных требуется высокая производительность с поддержкой транзакций. Хранилище данных, в свою



очередь, может иметь несколько другую структуру и быть доступным только на чтение обучающимся. Данные из рабочей базы данных периодически заносятся в хранилище. При этом может происходить проверка данных на непротиворечивость, преобразование структуры данных в вид, удобный для анализа и т.д.

Хранилище документов организовано определенным образом ручной или автоматической категоризацией, содержит учебные и методические документы, презентации, электронные учебники, лабораторные практикумы, практические работы и другие подобные файлы. Наиболее удачный термин - «корпоративное хранилище».

Обмен и передача знаний, обеспечение накопление и повторное использование знаний в рамках одного учебного заведения требует постоянной технической и программной поддержки с наличием справочной информации и также описанием шагов создания и пополнения корпоративного хранилища.

Модель интеллектуальной обучающей системы на основе моделирования учебного процесса показана на рисунке 2.

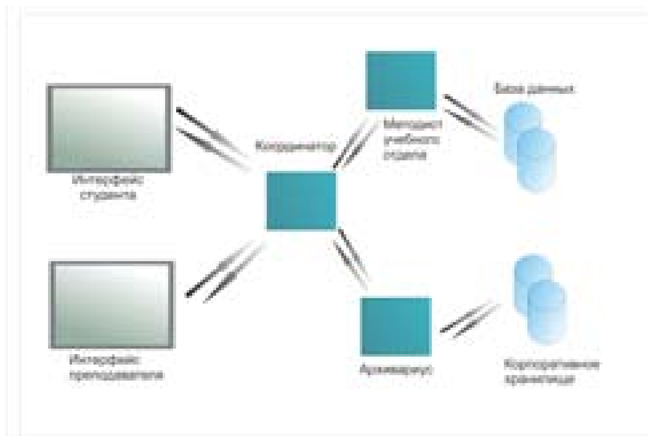


Рисунок 2 - Модель интеллектуальной обучающей системы на основе моделирования учебного процесса

Интерфейсный агент студента обеспечивает взаимодействие с обучающимся. Он поддерживает процесс формулирования запросов и предоставление результатов поиска и сортировки в виде ссылок на документы из корпоративного хранилища.

Интерфейсный агент преподавателя обеспечивает взаимодействие с профессорско-преподавательским составом. Он должен уметь формулировать запрос поиска и сортировки документов по различным категориям, составлять запрос на удаление или замену соответствующего документов в соответствии с концепцией модели выпускника по данной специальности, а также иметь возможность формирования графика индивидуальных консультаций по текущим темам дисциплин с согласованием расписания занятий.

Агент-координатор оптимально распределяет между агентами выполнение локальных задач, организовывает коллективное поведение и разрешение конфликтов.

Агент методиста учебного отдела планирует модель выпускника по данной специальности, формирует список компетенций специалиста по дисциплинам, определяет «наполняемость» корпоративного хранилища в соответствии силлабусами дисциплин, формирует расписание учебных занятий, самостоятельной работы и индивидуальных консультаций, составляет список обучаемых по группам.

Агент архивариуса формирует базы данных ссылок на документы в корпоративном хранилище в соответствии списка компетенций специалиста, выполняет функции запоминания отправленных ссылок на изменение и удаление, хранит глоссарий терминов по соответствующим компетенциям.

Применение задач распределенного управления системами дает возможность учебному процессу стать более качественным, упорядоченным и контролируемым. Появляется возможность обнаружения «узких мест» в преподавании учебных дисциплин, контроль качества «наполнения» учебно-методического материала любой дисциплины, проверки уровня квалификации соответствию данной специальности на региональном и международном уровне. В дальнейшем обеспечивается переход на использование компетенций специалиста при формировании выпускной модели обучающегося.

В общем плане повышается эффективность работы как профессорско-преподавателького состава, так и административных служб учебного заведения.

ЛИТЕРАТУРА


1 Цетлин М.Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем.- М.: Наука, 1969. – с.316

2 Тарасов В.Б. От многоагентных систем к интеллектуальным организациям: философия, психология, информатика. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – с.352

3 Поспелов Д.А. Многоагентные системы - настоящее и будущее// Информационные технологии и вычислительные системы. – 1998. – №1. – с.14-21

4. http://ru.wikipedia.org/wiki/





***Түйіндеме***

*Жасанды интеллект технологиясын қолданумен байланысты ақпараттық жүйелердің жаңа бағытына арналған.*

***Resume***

*The article is devoted to the new direction of information systems associated with the use of artificial intelligence technologies.*


ӘОЖ 514.763.8

# КІШІ ПАРАМЕТРЛІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ЗЕРТТЕУДЕ ВАРИАЦИЯЛЫ ТЕҢДЕУЛЕР ҚАСИЕТІН ПАЙДАЛАНУ


***А.Е. Жұмағалиева, С.С. Жакиева***

*М.Өтемісов атындағы Батыс Қазақстан мемлекеттік университеті*


Параметрі ескерілетін дифференциалдық теңдеулер нақты физикалық есептерді сипаттағанда жиі кездеседі. Себебі көптеген физикалық шамаларды, айталық, тұтқырлық коэфиценті, қатаңдылық, жылу өткізгіштік, диффузия коэфиценті және т.б. дәл есептеу мүмкін емес. Қазіргі таңда кіші параметрлі теңдеулер ЭЕМ арқылы жуықтап есептеу әдістерінде кең қолданылуда. Кең қолданыс тапқан салалардың бірі сатикалық механика мен молекулалық физика. Нақты мысалдар келтірсек, үйкеліс күші бар кезіндегі күрделі тербелмелі жүйелерді сипаттағанда, түрлі формалы материалдардың деформациялану формасын есептегенде, жүйенің параметрлі резонанс аймақтарын анықтағанда, тез қарқында өтетін жылулық үрдістерді модельдегенде кіші параметрлі теңдеулер қолданылады [1].

Төмендегі теңдеу үшін Коши есебін қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu) \quad x(t_0, \mu) = x_0 \tag{1}$$

Мұндағы μ- кіші параметр, G- $(t, x, \mu)$ кеңістігіндегі бір аймақ деп алайық. Егер $f(t, x, \mu)$, $\frac{\partial f(t,x,\mu)}{\partial x}$ функциялары G кеңістік аймағында барлық айнымалылары бойынша үздіксіз және бастапқы нүктесі $(t_0, x_0, \mu_0) \in G$ болса, онда Коши есебінің (1) $x(t, \mu)$ түріндегі шешімі $(t, \mu)$ айнымалылары жиынтығы бойынша қандайда $|t - t_0| \le \delta$, $|\mu - \mu_0| \le \delta_1$ облысында үздіксіз екендігін дәлелделік.

Дәлелдеу: Коши есебін (1) эквивалентті интегралды теңдеу есебіне келтірейік

$$x(t,\mu) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau,\mu),\mu)\,d\tau \tag{2}$$

немесе операторлық түрде

$$x = A(x) \tag{3}$$

G облысында орналасқан $|t - t_0| \le a$, $|x - x_0| \le b$, $|\mu - \mu_0| \le c$ тіктөртбұрышын қарастыралық, және оны төмендегідей белгілесек

$K_0 = \max_{\Pi_0} |f(t,x,\mu)|$, $K_1 = \max_{\Pi_0} |\frac{\partial f(t,x,\mu)}{\partial x}|$.

Жоғарыдағы (3) теңдеуге сығынқы шағылдыру принципін қолданайық [2]. Ол үшін бірі біріне кіріккен функциялар жиынын қарастырамыз. Функциялар жиыны В ретінде $|t - t_0| \le \delta$, $|\mu - \mu_0| \le c$ жағдайында үздіксіз $x(t,\mu)$ функция кеңістігін аламыз. Мұндағы $\delta > 0$ төмендегідей нормамен алынады:

$$\|x(t,\mu)\|_c = \max_{\substack{|t-t_0|\le\delta \\ |\mu-\mu_0|\le c}} x(t,\mu)$$

М функциялар жиынын В құрамынан $\|x(t,\mu) - x_0\|_c \le b$ шарты орындалатындай аламыз. Ескеретін жәйт, егер $\varphi(t,\mu) \in \boldsymbol{B}$ болса келесі функция

$$A(\varphi) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau,\mu),\mu)\,d\tau$$

параметрге тәуелді интегралдың үздіксіздігі туралы теоремаға сәйкес $x$ және $\mu$ бойынша $|t - t_0| \le \delta$, $|\mu - \mu_0| \le c$ жағдайында үздіксіз [3]. Осы теоремаға сәйкес $\delta \le b/K_0$, $\delta \le q/K_1$ болған жағдайда, мұнда 0<q<1, А операторы М функциялар жиынын сығатындығын көре аламыз, яғни теорема дәлелденді.

Енді келесі тұжырымдаманы қарастыралық: Қандай да $(t,x,\mu)$ арқылы сипатталатын кеңістікте $f$ вектор-функциясының $(t,x,\mu)$ айнымалылары бойынша $\partial \ge 1$ дәрежеге дейін үздіксіз туындылары болсын, онда Коши есебінің (1) $x(t,\mu)$ түріндегі шешімінің $(t,\mu)$ айнымалылары бойынша p үздіксіз туындылары болады.

Осы тұжырымның дұрыстығын дәлелдеу үшін жалғыз теңдеу және жалғыз $\mu$ параметр болған жағдайды қарастырайық. Айталық p=1 ал



$x = \varphi(t,\mu)$ - Коши есебінің (1) шешімі. Ал $x = \varphi(t,\mu + \Delta\mu)$ функциясы төмендегі теңдеу

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,\mu + \Delta\mu)$$

мен Коши есебінің берілгенін қанағаттандырсын, сонымен қатар $\Delta\varphi = \varphi(t,\mu+\Delta\mu) - \varphi(t,\mu)$ өз кезегінде

$$\frac{d\Delta\varphi}{dt} = f(t,\varphi(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu) - f(t,\varphi(t,\mu),\mu) \tag{4}$$

теңдеуін қанағаттандыруы қажет. Адамар леммасына сәйкес (4) теңдеудің оң жағын $F\Delta\varphi + G\Delta\mu$ түріне келтіруге болады, мұндағы F, G $t, \varphi(t,\mu), \varphi(t,\mu+\Delta\mu), \mu, \mu+\Delta\mu$ айнымалылары бойынша үздіксіз функциялар. Сонда $\Delta\varphi / \Delta\mu$ функциясы үшін келесі сызықтық теңдеуді аламыз:

$$\frac{d}{dt}\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} = F\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} + G. \tag{5}$$

Осы теңдеудің оң жағы $t, \Delta\mu$ айнымалылары бойынша үздіксіз және $\Delta\varphi / \Delta\mu$ айнымалысы бойнша үздіксіз дифференцилданады [4]. Адамар леммасына сүйене $\frac{\partial \tilde{o}}{\partial \mu}$ туындысы Коши есебіне сәйкес берілгендерін $\frac{dx}{d\mu}\Big|_{t=t_0} = 0$ және келесі теңдеуді қанағаттандыратынын көреміз:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial \mu} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial \mu} \tag{6}$$

Бұл теңдеуді вариациялы теңдеу деп атайды [5].

Егер (6) теңдеудің оң жағының $f(t,x,\mu)$ үздіксіз $\partial \ge 2$ дәрежеге дейін туындысы болса (6) теңдеуге жоғарыдағыдай агоритмді пайдалана $\frac{\partial^2 \tilde{o}}{\partial \mu^2}$, $\frac{\partial^2 \tilde{o}}{\partial t\,\partial \mu}$ туындыларының бар және үздіксіз екендігін көрсетуге болады. Осы тұжырымдаманы жалғастыра отырып қалыпты (нормаль) формадағы n-ші ретті бір теңдеудің параметр мен алғашқы шарттарға байланысты үздіксіз тәуелділігі және үздіксіз дифференциалданатындығы дәлелденеді.

Егер $x(t,\mu)$ шешімі белгілі болса онда ол бірінші ретті сызықты дифференциалды теңдеу. Оның жоғарғы ретті $\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^k x$ туындылары да сызықты болады.

Айталық, (1) Коши есебінің шешімі $\mu=\mu_0 : x=\varphi(t)$ кіші параметрдің жеке бір жағдайында ғана белгілі болсын. Онда варияциялы теңдеуді пайдаланып барлық $\left.\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^k x\right|_{\mu=\mu_0}$ туындыларын есептеп алуға болады. Расында да $\mu=\mu_0$ жағдайында сызықтық теңдеу болады:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial\mu}=\frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t),\mu_0)\frac{\partial x}{\partial\mu}+\frac{\partial f}{\partial\mu}(t,\varphi(t),\mu_0) \qquad \left.\frac{\partial}{\partial\mu}^k x\right|_{\mu=\mu_0}=0.$$

Соңғы теңдеуді интегралдау арқылы $\left.\frac{\partial}{\partial\mu}^k\right|_{\mu=\mu_0}$ табамыз.

Қортындылай келе, осы ретпен, варияциялы теңдеулердің қасиетін пайдалана отырып $\mu_j=(\mu_1,\mu_2,...,\mu_m)$ - кіші параметрлері бар дифференциалдық теңдеулер жүйесінің

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,\mu) \quad x(t_0,\mu_j)=x^0 \tag{7}$$

параметрге байланысты үздіксіз тәуелділігі және үздіксіз дифференциалданатындығы дәлелденеді.

Мақалада келтірілген теоремаларды варияциялы теңдеулердің қасиетін, Адамар леммасын, сығынқы шағылдыру принципін пайдалана дәлелденуі кіші параметрі бар физикалық есептерді қарастырғанда практикалық маңызы зор.

ӘДЕБИЕТТЕР

1. Валлиулин А.Л. Схемы повышенной точности для задач математической физики.- Новосибирск, НГУ, –1973. – С.88.

2. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука 1980. –С.245.

3. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Матем. сб., –Т.31(73), № 3. – 1952-С.575-586.

4. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд.3-е. –М.: «ЛИБРОКОМ», 2009. –С.117-119.



5. Багаев Б.М., Шаидуров В. В. Вариационно-разностное решение уравнения с малым параметром // Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения: Сб. науч. тр. ВЦ СО АН СССР. –Новосибирск, 1977. – С.89-99.

***Түйіндеме***

*Мақалада физикалық есептерде жиі кездесетін кіші параметрлі дифференциалдық теңдеулердің жалпы теориясы қарастырылып, вариациялы теңдеулер қасиетін пайдалану арқылы осы теңдеулердің шешімінің параметр бойынша дифференциалданатындығы және шешімнің параметрден үздіксіз тәуелділігі туралы теоремалар дәлелденеді.*

***Resume***

*The article considers the general theory of the differential equations with a small parameter, which is often to be found in the physical questions. The use of the properties of variational equation provides the proof for the differentiability of the solutions by the parameter and the constant dependence of solutions on the parameters.*

УДК 519.95

# НЬЮТОН-КОТЕСТІҢ АШЫҚ ТИПТІ КВАДРАТУРАЛЫҚ ФОРМУЛАСЫНДАҒЫ БЕЛГІСІЗДЕРДІ ЖАҢА ӘДІСПЕН ТАБУ

**Е.Ә. Қасымов**

*Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті, Алматы қ.*

Интегралдау аралықты $x_i=c+ih$, $i=\overline{1.2m+1}$, $m=1,2,3,...$-нүктелермен тең бөліктерге бөлейік, онда интегралдау аралық тең $2m+2$ бөлікке бөлінеді, яғни $n=2m+1$, мұндағы $a$ мен $b$ нүктелер интер-поляциялау түйіндер емес, ал $x_i$-интерполяциялау түйіндер.

Интеграл астындағы $f(x)$ функцияның $[a,b]$-интегралдау аралықта $f^{(2m+3)}(x)$, $m=1,2,3,...$-ретті үзіліссіз туындылары бар болсын деп ұйғарайық.

Анықталған интегралды төмендегі Нютон-Котестің ашық типті квадратуралық формуласымен жуықтап есептейік:

$$\int_a^A f(x)dx = \int_{a=c}^{b=c+(2m+2)h} f(x)dx = (2m+2)h\left[C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + C_3 f(x_3) + \right.$$

$$\left. + \ldots + \tilde{N}_{2m} f(x_{2m}) + C_{2m+1} f(x_{2m+1})\ \right] + R_{2m+1}^A(f), \qquad (1)$$

мұндағы $a = \tilde{n},\ b = \tilde{n} + (2m+2)h,$ ал $x_i = c + h$ , $i = \overline{1.2m+1}$ -интер-поляциялау түйіндер, $f(x_i)$-интеграл астындағы $f(x)$ функцияның $x = x_i = c + ih$ интерполяциялау түйіндердегі белгілі мәндері, $C_i$, $i = \overline{1.2m+1}$-квадратуралық формуланың іздестіріп отырған белгісіз коэффициенттері, $R_{2m+1}^A(f)$-квадратуралық формуланың бағалау ке-рек қалдық мүшесі, ал $x_i$-түйіндер мен $C_i$-белгісіз коэффициенттер интеграл астындағы функцияның қай кластағы функция болатынына тәуелсіз.

Ашық типті квадратуралық формуланың $C_i$-белгісіз коэффициент-тері мен $R_{2m+1}^A(f)$-қалдық мүшесін жаңа әдіспен бағалау үшін, жаңа $F(h)$ функцияны мына формула түрінде енгізейік:

$$F(h) = \int_{a=c}^{b=c+(2m+2)h} f(x)dx - (2m+2)h\left[C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + C_3 f(x_3) + \right.$$

$$\left. + \ldots + C_{2m} f(x_{2m}) + C_{2m+1} f(x_{2m+1})\right], \qquad (2)$$

мұндағы $x_i = c + h$ , $i = \overline{1.2m+1}$.

Енді (2) формуладағы $F(h)$ функцияны $h = 0$ нүктенің маңайында Маклорен формуласы бойынша жіктейік:

$$F(h) = F(0) + \frac{F^I(0)}{1!}h + \frac{F^I(0)}{2!}h^2 + \frac{F^{III}(0)}{3!}h^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{F^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!}h^{2m+1} + \frac{F^{(2m+2)}(0)}{(2m+2)!}h^{2m+2} + \frac{F^{(2m+3)}(\theta h)}{(2m+3)!}h^{2m+3}, \qquad (3)$$

мұндағы $F(0) = 0,\ 0 < \theta < 1$.

$F(h)$ функциядан $h$ бойынша $2m+3$ рет туынды алайық:

$$F^I(h) = (2m+2)f(c + (2m+2)h) +$$

$$+ (2m+2)\left[C_1 f(c+h) + C_2 f(c+2h) + \right.$$

$$+ C_3 f(c+3h) + \ldots + C_{2m-1} f(c + (2m-1)h) + C_{2m} f(c + 2hm) +$$

$$+ C_{2m+1} f(c + (2m+1)h)\Big] - (2m+2)h\Big[C_1 f^I(c+h) +$$



$$+ 2C_2 f^I(c+2h) +$$

$$+ 3C_2 f^I(c+3h) + \ldots + (2m-1)C_{2m-1} f^I(c + (2m-1)h) +$$

$$+ 2mC_{2m} f^I(c + 2mh) +$$

$$+ (2m+1)C_{2m+1} f^I(\tilde{n} + (2m+1)h)\Big] =$$

$$= (2m+2)f(\tilde{n} + (2m+2)h) -$$

$$- (2m+2)\sum_{i=1}^{2m+1} C_i f(c+h) - (2m+2)h\sum_{i=1}^{2m+1} i \cdot C_i f^I(c+h),$$

$$F^I(h) =$$

$$(2m+2)^2 f^I(c + (2m+2)h) - (2m+2)\cdot 2\sum_{i=1}^{2m+1} C_i f^I(c+h) -$$

$$- (2m+2)h\sum_{i=1}^{2m+1} i^2 C_i f^I(c+h),$$

$$F^{III}(h) = (2m+2)^3 f^I(c + (2m+2)h) - (2m+2)\cdot 3\sum_{i=1}^{2m+1} i^2 C_i f^I(c+h) -$$

$$- (2m+2)h\sum_{i=1}^{2m+1} i^3 C_i f^{III}(c+h),$$

.........

$$F^{(2m+1)}(h) = (2m+2)^{2m+1} f^{(2m)}(c + (2m+2)h) -$$

$$- (2m+2)\cdot(2m+1)\sum_{i=1}^{2m+1} i^{2m} C_i f^{(2m)}(c+h)$$

$$- (2m+2)h\sum_{i=1}^{2m} i^{2m+1} C_i f^{(2m+1)}(c+h),$$

$$F^{(2m+2)}(h) = (2m+2)^{2m+2} f^{(2m+1)}(c + (2m+2)h) - (2m+2)(2m+2)\times$$

$$\times \sum_{i=1}^{2m+1} i^{2m+1} C_i f^{(2m+1)}(c+h) -$$

$$(2m+2)h\sum_{i=1}^{2m+1} i^{2m+2} C_i f^{(2m+2)}(c+h),$$

$$F^{(2m+3)}(h) = (2m+2)^{2m+3} f^{(2m+2)}(c + (2m+2)h) -$$

$$-\left(2m+2\right)\cdot\left(2m+3\right)\sum_{i=1}^{2m+1} i^{2m+2}C_i f^{(2m+2)}\left(c+h\ \right)-$$

$$-\left(2m+2\right)h\sum_{i=1}^{2m+1} i^{2m+3}C_i f^{(2m+3)}\left(c+h\ \right) \quad . \qquad (4)$$

Алдымен ашық типті квадратуралық формуланың $C_i,\ i=\overline{1.2m+1}$- белгісіз коэффициенттерін табайық ол үшін, $h=0$ болғанда

$$F^{(k)}\left(0\right)=0, \quad k=\overline{1.2m+1} \qquad (5)$$

теңдіктері орындалсын деп ұйғарайық. Онда, (3.8.4) мен (5) өрнектерден $C_i,\ i=\overline{1.2m+1}$-белгісіздері бар біртекті емес сызықты алгебралық теңдеулер жүйе аламыз және ол жүйенің анықтауышы Вандер-монд анықтауыш болады:

$$\begin{cases}
\tilde{N}_1+\tilde{N}_2+\tilde{N}_3+...+\tilde{N}_l+...+\tilde{N}_{2m}+\tilde{N}_{2m+1}=\dfrac{(2m+2)^0}{1}, \\
C_1+2C_2+3C_3+...+lC_l+...+(2m)C_{2m}+(2m+1)C_{2m+1}= \\
=\dfrac{2m+2}{2}, \\
C_1+2^2C_2+3^2C_3+...+l^2C_l+...+(2m)^2C_{2m}+(2m+1)^2C_{2m+1}= \\
=\dfrac{(2m+2)^2}{3}, \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
C_1+2^{l-1}C_2+3^{l-1}C_3+...+l^{l-1}C_l+...+(2m)^{l-1}C_{2m}+ \\
+(2m+1)^{l-1}C_{2m+1}=\dfrac{(2m+2)^{l-1}}{l}, \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
C_1+2^{2m-1}C_2+3^{2m-1}C_3+...+l^{2m-1}C_l+...+(2m)^{2m-1}C_{2m}+ \\
+(2m+1)^{2m-1}C_{2m+1}=\dfrac{(2m+2)^{2m-1}}{2m}, \\
C_1+2^{2m}C_2+3^{2m}C_3+...+l^{2m}C_l+...+(2m)^{2m}C_{2m}+ \\
+(2m+1)^{2m}C_{2m+1}=\dfrac{(2m+2)^{2m}}{2m+1}.
\end{cases}$$

Жүйенің $C_i$-белгісіз коэффициенттерін Крамер әдісімен шешейік:

$$C_i=\frac{\Delta C_i}{\Delta C},\ i=\overline{1.2m+1} \quad , \qquad (6)$$



мұндағы

$$\Delta C=\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & ... & 1 & ... & 1 & 1 \\
1 & 2 & 3 & ... & l & ... & 2m & 2m+1 \\
1 & 2^2 & 3^2 & ... & l^2 & ... & (2m)^2 & (2m+1)^2 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & 2^{l-1} & 3^{l-1} & ... & l^{l-1} & ... & (2m)^{l-1} & (2m+1)^{l-1} \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & 2^{2m-1} & 3^{2m-1} & ... & l^{2m-1} & ... & (2m)^{2m-1} & (2m+1)^{2m-1} \\
1 & 2^{2m} & 3^{2m} & ... & l^{2m} & ... & (2m)^{2m} & (2m+1)^{2m}
\end{vmatrix}$$

Вандермонд анықтауыш, мұндағы $\Delta\tilde{N}_i, i=\overline{0.2m}$-анықтауш $\Delta C$ -Вандермонд анықтауыштың $l$-тік жол элементтерін жүйенің сәйкес бос мүше элементтерімен орын алмастырғанда алынған анықтауыш, яғни

$$\Delta C_l=\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & ... & 1 & ... & 1 & 1 \\
1 & 2 & 3 & ... & \dfrac{2m+2}{2} & ... & 2m & 2m+1 \\
1 & 2^2 & 3^2 & ... & \dfrac{(2m+2)^2}{3} & ... & (2m)^2 & (2m+1)^2 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & 2^{l-1} & 3^{l-1} & ... & \dfrac{(2m+2)^{l-1}}{l} & ... & (2m)^{l-1} & (2m+1)^{l-1} \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & 2^{2m-1} & 3^{2m-1} & ... & \dfrac{(2m+2)^{2m-1}}{2m} & ... & (2m)^{2m-1} & (2m+1)^{2m-1} \\
1 & 2^{2m} & 3^{2m} & ... & \dfrac{(2m+2)^{2m}}{2m+1} & ... & (2m)^{2m} & (2m+1)^{2m}
\end{vmatrix} \qquad (6)$$

формуладан анықталған $C_i$ коэффициенттерді $B_i$ таңбамен белгілейік, яғни $B_i=C_i,\ i=\overline{1.2m+1}$, олар нақты сандар әрі олардың қосындысы бірге тең:

$$2B_1+2B_2+...+2B_{m-1}+B_m=1$$

және бірдей қашықтықта орналасқан $B_i$ коэффициенттер тең:

$$B_1=B_{2m+1},\ B_2=B_{2m},\ B_3=B_{2m-1},...,\ B_{m-1}=B_{m+1},\ B_m\ . \qquad (7)$$

Сонда сәйкес (1), (2) формулалардан:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a=c}^{b=c+(2m+2)h} f(x)dx = (2m+2)h\left[B_1 f(x_1)+B_2 f(x_2)+\ldots+ B_{2m} f(x_{2m})+B_{2m+1} f(x_{2m+1})\right]+R^A_{2m+1}(f), \quad (8)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a=c}^{b=c+(2m+2)h} f(x)dx = (2m+2)h\left[B_1 f(x_1)+B_2 f(x_2)+\ldots+ B_{2m} f(x_{2m})+B_{2m+1} f(x_{2m+1})\right]+F(h) \quad (9)$$

Жоғарыда, (3) формуладағы $F^{(k)}(h)$, $k=\overline{1.2m+1}$ туындылар $h=0$ нүктеде нөлге тең болсын деп ұйғарып, квадратуралық формуланың $C_i$ белгісіз коэффициенттерін анықтадық, енді қалғандарын, яғни $F^{(2m+2)}(h)$ туындыны $h=0$ нүктеде, ал $F^{(2m+3)}(\theta h)$ туындыны $h\to 0$ -да қарастырайық. Сонда, $h=0$-да (4) формуладан

$$F^{(2m+2)}(h)=\left[(2m+2)^{2m+2}-(2m+2)(2m+2)\sum_{i=1}^{2m+1} i^{2m+1}A_i\right]\times \times f^{(2m+1)}(c)\equiv 0, \quad (10)$$

мұндағы квадрат жақша ішіндегі арифметикалық өрнекті Maple-пакет программаны пайдаланып есептейміз, ал $h\to 0$-да мына теңдікті ала-мыз:

$$F^{(2m+3)}(\theta h)=\left[(2m+2)^{2m+3}-(2m+2)(2m+3)\sum_{i=1}^{2m+1} i^{2m+2}B_i\right]\times \times f^{(2m+2)}(c)+O(h)= A_{2m+1}\cdot f^{(2m+2)}(c)+O(h), \quad (11)$$

мұндағы

$$A_{2m+1}=\left[(2m+2)^{2m+3}-(2m+2)(2m+3)\sum_{i=1}^{2m+1} i^{2m+2}B_i\right] \quad (12)$$

квадрат жақша ішіндегі нақты санды Maple-пакет программаны пайдаланып есептейміз.

Сонымен, (5) және (10) теңдіктерді ескеріп, (3) формуладан мына теңдікті аламыз:

$$F(h)=\frac{h^{2m+3}}{(2m+3)!}F^{(2m+3)}(\theta h). \quad (13)$$

Енді (13) формуланы ескеріп, (8) мен (9) формулаларды салыстыр-айық, сонда



$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a=c}^{b=c+(2m+2)h} f(x)dx = (2m+2)h\left[B_1 f(x_1)+B_2 f(x_2)+B_3 f(x_3)+ \ldots + B_{2m} f(x_{2m})+B_{2m+1} f(x_{2m+1})\right]+R^A_{2m+1}(f),$$

$$x_i=c+ih,\quad i=\overline{1.2m+1}, \quad (14)$$

мұндағы

$$R^A_{2m+1}(f)=F(h)=\frac{h^{2m+3}}{(2m+3)!}F^{(2m+3)}(\theta h)=\frac{A_{2m+1}\cdot h^{2m+3}}{(2m+3)!}\times \times\left[f^{(2m+2)}(c)+O(h)\right],\ h=\frac{b-a}{2m+2},\ m=1,2,3,\ldots \quad (15)$$

Қалдық мүшесі (15) формуладан анықталатын (14) формула Ньютон-Котестің жалпыланған ашық типті квадратуралық формуласы деп аталады, мұндағы $B_i=C_i$, $i=\overline{1.2m+1}$ мен $A_{2m+1}$-коэффициент-тер сәйкес (6) мен (12) формулалардан анықталады.

Сонымен, интегралдау аралықты $2m+1$, $m=1,2,3,\ldots$ -нүктелермен тең $2m+2$-жұп бөліктерге бөлгенде, жоғарыда анықталған (14 15), (15) жалпыланған квадратуралық формуладан $n=3$, $n=5$, $n=7$, $n=9$, болғандағы Ньютон-Котестің ашық типті квадратуралық фор-мулаларын алуға болады.

ӘДЕБИЕТТЕР


1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.,-М.; Наука, 1966,-632с.

2. Касымов К.А., Касымов Е.А. Квадратурная формула Ньютона-Котеса //Доклады НАН РК. -2005. -№1. -С.47-51.

3. Касымов Е.А. Квадратурная формула замкнутого типа //Вестник НАН РК.- 2005. -№3. -С.44-49.

4. Касымов Е.А. Приближенное вычисление интеграла //Известия НАН РК, серия физ.-мат. -2005. -№1. -С.27-31.

5. Касымов Е.А. Вычисление определенного интеграла //Вестник КазНУ им. аль-Фараби, серия математика, механика, информатика. 2005.- №2(45), -С.67-71.

6. Касымов Е.А. Квадратурная формула Симпсона. Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева серия Еественных и технических науках, №4(4), 2005. Астана.



***Резюме***

*В этой работе предлагается новый способ получения квадратурной формулы Ньютона-Котеса открытого типа для приближенного вычисления определенного интеграла.*

**_Resume_**

*The article deals the new method of open type quadrature formula Newton-Kotes for approximate calculation of definite integral.*


УДК 519.95

# НЬЮТОН-КОТЕСТІҢ ТҰЙЫҚ ТИПТІ КВАДРАТУРАЛЫҚ ФОРМУЛАСЫНДАҒЫ БЕЛГІСІЗДЕРДІ ЖАҢА ӘДІСПЕН ТАБУ n=2m+1


**_Е.Ә. Қасымов_**

*Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті, Алматы*


Физика, механика және техниканың өзекті есептерінде анықталған интегралдың сандық мәнін жуықтап есептеуге тура келеді, себебі ан-ықталған интегралдың алғашқы функциясы элементар функция арқы-лы өрнектелмейді. Осы уақытқа дейін, анықталған интегралды жуық-тап есептеу үшін, $[a,b]$ -интегралдау аралықты тең бөліктерге бөліп, квадратуралық формуланың белгісіз коэффициенттерін Лагранждың интерполяциялық көпмүшелігін пайдаланып анықтайды, ал қалдық мүшені бағалау үшін математикалық анализ курсындағы орта мән мен аралық мәндер теоремаларын пайдаланады. Ал біз осы мақалада, анықталған интегралды жуықтап есептейтін Ньтон-Котестің квадра-туралық формуласындағы белгісіз коэффициенттер мен қалдық мүше-ні жаңа әдіспен табамыз.

Интегралдау аралықты тең бөліктерге бөлгенде интерполяциялау түйіндер

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = \overline{0,n} \tag{1}$$

өрнектен анықталсын, мұнда $a = x_0,\ b = a + nh,\ h > 0$ -қадам. Бұл жағ-дайда, интегралдау аралықтың $a$ мен $b$ нүктелері интерполяциялау түйіндер болады және интегралдау аралық тең $n$ бөлікке бөлінеді. Осылайша, $[a,b]$ -интегралдау аралықты тең бөліктерге бөлетін интер-поляциялау түйіндер арқылы анықталған интегралды жуық шамамен есептейтін формулалар Ньютон-Котестің тұйық типті квадратура-

лық формулалары деп аталады.

Интегралдау аралықты тең $n = 2m+1, m = 0, 1, 2, 3,...$ -тақ бөлікке бөлейік, және $f(x)$ функцияның $[a,b]$ аралықта $f^{(2m+3)}(x)$, $m = 0, 1, 2, 3,...$ - ретті үзіліссіз туындылары бар болсын деп ұйғарайық.



Анықталған интегралды Ньютон-Котестің тұйық типті квадрату-ралық формуласымен жуықтап есептейік:

$$\int_a^b f(x) = \int_{a=x_0}^{b=x_0+(2m+1)h} f(x)dx = (2m+1)h\left[C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + ... + \right.$$

$$\left. + C_{2m} f(x_{2m}) + C_{2m+1} f(x_{2m+1})\ \right] + R^T_{2m+1}(f), \tag{2}$$

мұндағы $a = x_0, b = x_0 + (2m+1)h,\ x_i = x_0 + ih,\ i = \overline{0.2m-1}$ -интерпо-

ляциялау түйіндер, $f(x_i), i = \overline{0.2m+1}$-интеграл астындағы $f(x)$ функ-цияның $x = x_i = x_0 + h$ интерполяциялау түйіндердегі белгілі мәнде-рі, $C_i, i = \overline{0.2m+1}$-квадратуралық формуланың іздестіріп отырған бел-гісіз коэффициенттері, $R^T_{2m+1}(f)$-квадратуралық формуланың бағалау керек қалдық мүшесі және $x_i$ -түйіндер мен $C_i$ -белгісіз коэффициент-тер интеграл астындағы функцияның қай кластағы функция болатынына тәуелсіз.

Квадратуралық формуланың $C_i$ белгісіз коэффициенттерін табу және $R^T_{2m+1}(f)$-қалдық мүшені бағалау үшін, жаңа $F(h)$ функцияны мына формула түрінде енгізейік:

$$F(h) = \int_{a=x_0}^{b=x_0+(2m+1)h} f(x)dx - (2m+1)h\left[C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \right.$$

$$\left. + ... + C_{2m} f(x_{2m}) + C_{2m+1} f(x_{2m+1})\ \right], \tag{3}$$

мұндағы $x_i = x_0 + ih,\quad i = \overline{0.2m+1}$.

(3) формуладағы $F(h)$ функцияны $h = 0$ нүктенің маңайында Моклорен формуласы бойынша жіктейік:

$$F(h) = F(0) + \frac{F^I(0)}{1!}h + \frac{F^I(0)}{2!}h^2 + ... + \frac{F^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!}h^{2m+1} +$$

$$+ \frac{F^{(2m+2)}(0)}{(2m+2)!}h^{2m+2} + \frac{F^{(2m+3)}(\theta h)}{(2m+3)!}h^{2m+3}, \tag{4}$$

мұндағы $F(0) = 0,\ 0 < \theta < 1$.

$F(h)$ функциядан $h$ бойынша $2m+3$ рет туынды алайық:

$$F^I(h) = (2m+1)f(x_0 + (2m+1)h) - (2m+1)\sum_{i=0}^{2m+1} C_i f(x_0 + h\ ) -$$

$$-(2m+1)h\sum_{i=1}^{2m+1} iC_i f^{I}(x_0+ih),$$

$$F^{II}(h)=(2m+1)^2 f^{I}(x_0+(2m+1)h)-(2m+1)\cdot 2\sum_{i=1}^{2m+1} iC_i f^{I}(x_0+ih)-$$

$$-(2m+1)h\sum_{i=1}^{2m+1} i^2 C_i f^{II}(x_0+ih),$$

$$F^{III}(h)=(2m+1)^3 f^{II}(x_0+(2m+1)h)-(2m+1)\times$$

$$\times 3\sum_{i=1}^{2m+1} i^2 C_i f^{II}(x_0+ih)-(2m+1)h\sum_{i=1}^{2m+1} i^3 C_i f^{III}(x_0+ih),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$F^{(2m+2)}(h)=(2m+1)^{2m+2} f^{(2m+1)}(x_0+(2m+1)h)-$$

$$-(2m+1)\cdot(2m+2)\sum_{i=1}^{2m+1} i^{2m+1} C_i f^{(2m+1)}(x_0+ih)-$$

$$-(2m+1)h\sum_{i=1}^{2m+1} i^{2m+2} C_i f^{(2m+2)}(x_0+ih),$$

$$F^{(2m+3)}(h)=(2m+1)^{2m+3} f^{(2m+2)}(x_0+(2m+1)h)-$$

$$-(2m+1)\cdot(2m+3)\sum_{i=1}^{2m+1} i^{2m+2} C_i f^{(2m+2)}(x_0+ih)-$$

(5)

Алдымен квадратуралық формуланың $C_i$-белгісіз коэффициентте-рін табайық, ол үшін, $h=0$ болғанда

$$F^{(i)}(0)=0, \quad i=\overline{1.2m+2} \tag{6}$$

теңдіктері орындалсын деп ұйғарайық. Онда, (6) өрнектен $C_i$, $i = \overline{= 0.2m+1}$-белгісіздері бар біртекті емес сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз және ол жүйенің анықтауышы Вандермонд анық-тауыш болады:



$$\begin{cases} C_0+C_1+C_2+C_3+\ldots+C_{2m}+C_{2m+1}=\dfrac{(2m+1)^1}{1}, \\ C_1+2C_2+3C_3+\ldots+2mC_{2m}+(2m+1)C_{2m+1}=\dfrac{(2m+1)^2}{2}, \\ C_1+2^2C_2+3^2C_3+\ldots+(2m)^2C_{2m}+(2m+1)^2C_{2m+1}=\dfrac{(2m+1)^3}{3}, \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ C_1+2^{2m}C_2+3^{2m}C_3+\ldots+(2m)^{2m}C_{2m}+(2m+1)^{2m}C_{2m+1}= \\ =\dfrac{(2m+1)^{2m}}{2m+1}, \\ C_1+2^{2m+1}C_2+3^{2m+1}C_3+\ldots+(2m)^{2m+1}C_{2m}+(2m+1)^{2m+1}C_{2m+1}= \\ =\dfrac{(2m+1)^{2m+1}}{2m+2}, \end{cases} \tag{7}$$

мұндағы

$$\Delta C=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots\ 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots\ i & \ldots & 2m & 2m+1 \\ 0 & 1 & 2^2 & 3^2 & \ldots\ i^2 & \ldots & (2m)^2 & (2m+1)^2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & 2^{2m} & 3^{2m} & \ldots\ i^{2m} & \ldots & (2m)^{2m} & (2m+1)^{2m} \\ 0 & 1 & 2^{2m+1} & 3^{2m+1} & \ldots\ i^{2m+1} & \ldots & (2m)^{2m+1} & (2m+1)^{2m+1} \end{vmatrix} \tag{8}$$

-Вандермонд анықтауыш. Осы жүйені $C_i$-белгісіз коэффициенттер бойынша Крамер әдісімен шешейік, ол үшін MAPLE-пакетті пайдала-намыз, сонда

$$\tilde{N}_0=\frac{\Delta C_0}{\Delta C}, \quad \tilde{N}_1=\frac{\Delta C_1}{\Delta C}, \quad .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ ,\tilde{N}_{2m+1}=\frac{\Delta C_{2m+1}}{\Delta C}, \tag{9}$$

мұндағы $\Delta\tilde{N}_i$, $i=\overline{0.2m+1}$-анықтауш $\Delta C$ -Вандермонданықтауыштың $i$ -тік жол элементтерін жүйенің сәйкес бос мүше элементтерімен ор-ын алмастырғанда алынған анықтауыш, яғни

$$\Delta C_i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \frac{2m+1}{2} & \dots & 2m & 2m+1 \\ 0 & 1 & 2^2 & 3^2 & \dots & \frac{(2m+1)^2}{3} & \dots & (2m)^2 & (2m+1)^2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & 2^{2m} & 3^{2m} & \dots & \frac{(2m+1)^{2m}}{2m+1} & \dots & (2m)^{2m} & (2m+1)^{2m} \\ 0 & 1 & 2^{2m+1} & 3^{2m+1} & \dots & \frac{(2m+1)^{2m+1}}{2m+2} & \dots & (2m)^{2m+1} & (2m+1)^{2m+1} \end{vmatrix}, \quad (10)$$

$i = \overline{0.2m+1}$. (9)-формуладан анықталған белгілі коэффициенттерді $A_i = C_i$, $i = \overline{0.2m+1}$ таңбамен белгілейік, олар нақты сандар, әрі бір-дей арақашықтықта орналасқан $A_i$ коэффициенттер тең және олар-дың қосындысы бірге тең, яғни

$$A_0 = A_{2m+1},\ A_1 = A_{2m},\ A_2 = A_{2m-1},\dots,\ A_m = A_{m-1}, \quad (11)$$

$$2A_0 + 2A_1 + 2A_2 + \dots + 2A_m = 1. \quad (12)$$

Сонда (3), (4) формулалардан:

$$\int_a^b f(x) = \int_{a=x_0}^{b=x_0+(2m+1)h} f(x)dx = (2m+1)h[A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_{2m} f(x_{2m}) + A_{2m+1} f(x_{2m+1})] + R^T_{2m+1}(f), \quad (13)$$

$$\int_a^b f(x) = \int_{a=x_0}^{b=x_0+(2m+1)h} f(x)dx = (2m+1)h[A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_{2m} f(x_{2m}) + A_{2m+1} f(x_{2m+1})] + F(h). \quad (14)$$

Енді (6) теңдіктерді ескеріп, (5) формуладағы $F^{(2m+3)}(\theta h)$ өрнек-тегі $h \to 0$-дағы жағдайды қарастырайық :

$$F^{(2m+3)}(\theta h) = \left[(2m+1)^{2m+3} - (2m+1)\cdot(2m+3)\sum_{i=1}^{2m+1} i^{2m+2} A_i\right] \times$$

$$\times f^{(2m+2)}(x_0) + O(h) = A \cdot f^{(2m+2)}(x_0) + O(h), \quad (15)$$

мұндағы

$$A = \left[(2m+1)^{2m+3} - (2m+1)\cdot(2m+3)\sum_{i=1}^{2m+1} i^{2m+2} A_i\right] - \quad (16)$$



санды MAPLE-пакетті пайдаланып есптейміз.

Сонымен, (5), (14) формулаларды ескеріп, (3) формуладан:

$$F(h) = \frac{h^{2m+3}}{(2m+3)!} F^{(2m+3)}(\theta h). \quad (17)$$

Енді (13 пен) (14) формулаларды салыстырайық, сонда

$$\int_a^b f(x) = \int_{a=x_0}^{b=x_0+(2m+1)h} f(x)dx = (2m+1)h[A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_{2m+1} f(x_{2m+1})] + R^T_{2m+1}(f), \quad (18)$$

мұндағы

$$R^T_{2m+1}(f) = F(h) = \frac{h^{2m+3}}{(2m+3)!} F^{(2m+3)}(\theta h) = \frac{A \cdot h^{2m+3}}{(2m+3)!} \times$$

$$\times \left[f^{(2m+2)}(x_0) + O(h)\right]. \quad (19)$$

Қалдық мүше (19) формуладан анықталатын (18) формула Ньютон-Котестің тұйық типті жалпыланған квадратуралық формуласы деп аталады, мұндағы $A_i = C_i, i = \overline{0.2m+1}$, $A$-коэффициенттер сәйкес (9) және (16) формулалардан анықталады.

Сонымен, интегралдау аралықты $2m+1$-тақ бөліктерге бөлгенде, осы мақалада анықталған $C_i$-коэффициенттер мен $R^T_{2m+1}(f)$-қалдық мүшені, [1] оқулықта (176 мен 182-беттегі кестелер) анықталған $C_i$-коэффициенттер мен $R^T_{2m+1}(f)$-қалдық мүшемен салыстырсақ олар бірдей ([1] оқулықта $n = \overline{1.1}$ жағдайлардың белгісіз коэффициенттер мен қалдық мүшелерінің мәндері берілген).

Демек, $C_i$-белгісіз коэффициенттер (7) жүйеден анықталады және ол коэффициенттерге орындалатын (11) мен (12) қасиеттерді тексеру қажет емес. Себебі, (12) қасиет (7) жүйенің бірінші теңдеуі болып та-былады. Ал $R^T_{2m+1}(f)$-қалдық мүшені бағалау үшін (16) формуладағы арифметикалық өрнекті есептеп (19) формулаға қойсақ жеткілікті.

ӘДЕБИЕТТЕР

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.,-М.; Наука, 1966,-632с.

2. Касымов К.А., Касымов Е.А. Квадратурная формула Ньютона-Котеса //Доклады НАН РК. -2005. -№1. -С.47-51.

3. Касымов Е.А. Квадратурная формула замкнутого типа //Вестник НАН РК.- 2005. -№3. -С.44-49.

4. Касымов Е.А. Приближенное вычисление интеграла //Известия НАН РК, серия физ.-мат. -2005. -№1. -С.27-31.

5. Касымов Е.А. Вычисление определенного интеграла //Вестник КазНУ им. аль-Фараби, серия математика, механика, информатика. 2005.- №2(45), -С.67-71.

6. Касымов Е.А. Квадратурная формула Симпсона. Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева серия Еественных и технических науках, №4(4), 2005. Астана.

***Резюме***

*В этой работе предлагается новый способ получения квадратурной формулы Ньютона-Котеса замкнутого типа для приближенного вычисления определенного интеграла.*

***Resume***

*The article deals the new method of closed type quadrature formula Newton-Kotes for approximate calculation of definite integral.*

УДК 539.3

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОГО, ЗАЩЕМЛЕННОГО ДВУМЯ КОНЦАМИ СТЕРЖНЯ ПРИ НАЛИЧИИ РАЗНОРОДНЫХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА НА ЕЕ КОНЦАХ

***А.К. Кудайкулов., А.К. Жумадиллаева***

*Евразийский Национальный Университет имени Л.Н. Гумилева, г. Астана*

Рассматривается стержень ограниченной длины $L\ (см)$, постоянного площади поперечного сечения $F\ (см^2)$. Коэффициент теплового расширения материала стержня $\alpha\left(\frac{1}{^\circ C}\right)$, теплопроводности $K_{xx}\left(\frac{Вт}{см \cdot ^\circ C}\right)$, а модуль



упругости $E\left(\frac{кГ}{см^2}\right)$. Обе концы стержня жестко защемленная. Ось Ох направим слева в право. При этом она совпадает с осью стержня (рисунок 1).

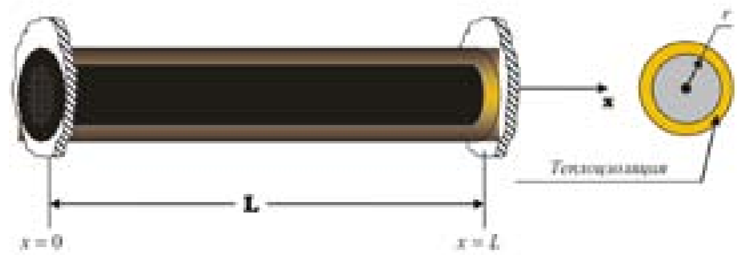



Рисунок-1. Расчетная схема

Рассмотрим разные случай граничных условий, т.е. разных видов источников тепла которые задаются на двух защемленных концах стержня.

**Случай-1**. Предположим что на площади поперечного сечения левого защемленного конца подведен тепловой поток $q\left(\frac{Вт}{см^2}\right)$, а через площади поперечного сечения правого конца происходит теплообмен с окружающей средой. При этом коэффициент теплообмена $h\left(\frac{Вт}{см^2 \cdot ^\circ C}\right)$, а температура окружающей среды $T_{oc}\left(^\circ C\right)$.

Учитывая физику явления в исследуемой задаче, выражение функционала полной тепловой энергии имеет следующий вид [1].

$$I = \int_V \frac{K_{xx}}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dV + \int_{F(x=0)} qTdS + \int_{F(x=L)} \frac{h}{2}(T - T_{oc})^2 dS \qquad (1)$$

где $V$ -объем исследуемого стержня;  -площадь поперечного сечения.

С учетом постановки задачи и теплоизолированности боковой поверхности стержня, поле распределения температуры по ее длине представим в виде полного полинома второго порядка

$$T(x) = ax^2 + bx + c\ , \quad a, b, c = const \qquad (2)$$

Предположим, что в декартовой системе координат $(OxT)$ эта кривая проходит через три точки. Значение температуры в этих точках обозначим следующим образом

$$T(x=0)=T_i;\quad T\left(x=\frac{L}{2}\right)=T_j;\quad T(x=L)=T_k. \quad (3)$$

Пользуясь (2-3) можно переписать (2) в следующем виде

$$T(x)=\varphi_i(x)\cdot T_i+\varphi_j(x)\cdot T_j+\varphi_k(x)\cdot T_k \quad (4)$$

где

$$\varphi_i(x)=\frac{L^2-3Lx+2x^2}{L^2};\quad \varphi_j(x)=\frac{4(Lx-x^2)}{L^2};\quad \varphi_k(x)=\frac{2x^2-Lx}{L^2}. \quad (5)$$

Пользуясь (4-5) перепишем (1) в следующим виде

$$J=\int_V \frac{K_{xx}}{2}\left(\frac{(4x-3L)}{L^2}\cdot T_i+\frac{4(L-2x)}{L^2}\cdot T_j+\frac{(4x-L)}{L^2}\cdot T_k\right)^2 dV+\int_{F(x=0)} q\left(\frac{L^2-3Lx+2x^2}{L^2}\cdot T_i+\right.$$
$$\left.+\frac{4(Lx-x^2)}{L^2}\cdot T_j+\frac{2x^2-Lx}{L^2}\cdot T_k\right)\Bigg|_{x=0} dS+\int_{F(x=L)}\left(\frac{(4x-3L)}{L^2}\cdot T_i+\frac{4(L-2x)}{L^2}\cdot T_j+\right.$$
$$\left.+\frac{(4x-L)}{L^2}\cdot T_k-T_{oc}\right)^2\Bigg|_{x=L} dS \quad (6)$$

После интегрирования из (6) получим

$$J=\frac{K_{xx}F}{6\ell}\left(7T_i^2-16T_i\cdot T_j+2T_iT_k-16T_jT_k+16T_j^2+7T_k^2\right)+q\cdot T_i+\frac{hF}{2}\left(T_k-T_{oc}\right)^2 \quad (7)$$

Здесь следует отметить, что во всех скобках сумма коэффициентов равно нулю, т.е. в первой скобке (7-16+2-16+16+7)=0 и во второй (1-1)=0. Теперь минимизируя $J$ по узловым значениям температуры $T_i$, $T_j$ и $T_k$ получим следующую разрешающую систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ \dfrac{\partial J}{\partial T_i}=0;\Rightarrow \dfrac{K_{xx}F}{3\ell}\left(7T_i-8T_j+T_k\right)+q=0\\
2)\ \dfrac{\partial J}{\partial T_j}=0;\Rightarrow \dfrac{K_{xx}F}{3\ell}\left(-8T_i+16T_j-8T_k\right)=0\\
3)\ \dfrac{\partial J}{\partial T_k}=0;\Rightarrow \dfrac{K_{xx}F}{3\ell}\left(T_i-8T_j+7T_k\right)+hF\left(T_k-T_{oc}\right)=0
\end{array}\right\} \quad (8)$$

Решая систему находим узловые значения температуры



$$\left.\begin{array}{l}
T_i=T_{oc}-\dfrac{q}{h}-\dfrac{q\ell}{K_{xx}};\\
T_j=T_{oc}-\dfrac{q}{h}-\dfrac{q\ell}{2K_{xx}};\\
T_k=T_{oc}-\dfrac{q}{h}.
\end{array}\right\} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (4) и после упрощения определим закон распределения температуры по длине исследуемого стержня

$$T(T_{oc},q,h,\ell,K_{xx},x)=\left(T_{oc}-\frac{q}{h}-\frac{q\ell}{K_{xx}}\right)+\frac{qx}{K_{xx}} \quad (10)$$

Здесь следует отметить, что действительно полученное решение (10) удовлетворяет уравнение теплопроводности и соответствующих граничных условий. Если один конец стержня был бы защемленной, а другой свободен, то за счет теплового расширения стержень удлинялся бы на которая определяется следующим образом

$$\Delta\ell_{T1}=\int_0^\ell \alpha T(x)\left[\left(T_{oc}-\frac{q}{h}-\frac{q\ell}{K_{xx}}\right)+\frac{qx}{K_{xx}}\right]dx \quad (11)$$

Здесь зависимость $\alpha=\alpha(T(x))$ для конструкционных материалов определяются экспериментально [2]. Для многих конструкционных материалов на определенном интервале изменение температур эта зависимость имеет кусочно-линейный характер [2].

Теперь переходим к рассмотрению защемленного стержня. В связи с тепловым расширением стержня из-за ее защемленности двух концов там возникают сжимающее усилие .

Для полноты исследования рассмотрим стержень ограниченной длины защемленным одним концом, а другой свободен. На свободном конце приложено осевое сжимающее усилие R. В связи с этим укорачивания стержня $\Delta\ell_R$ определяется в соответствии закона Гука

$$\Delta\ell_R=-\frac{R\ell}{EF} \quad (12)$$

Тогда для защемленного двумя концами стержня должна удовлетворятся условия совместности деформаций, т.е.

$$\Delta\ell = \Delta\ell_R + \Delta\ell_{T1} = 0 \quad \text{или} \quad -\frac{R\ell}{EF} + \Delta\ell_{T1} = 0 \qquad (13)$$

Отсюда определяются выражение для сжимающего усилия

$$R = -\frac{EF\cdot\Delta\ell_{T1}}{\ell} = -\frac{EF}{\ell}\int_0^{\ell} \alpha(T(x))\cdot T(x,T_{oc},q,h,\ell,K_{xx}) \qquad (14)$$

Выражение для термоупругой составляющий напряжения и деформации определяется в соответствии закон Гука

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{R}{F} = -\frac{E\cdot\Delta\ell_{T1}}{\ell} \\ \varepsilon &= \frac{\sigma}{E} = -\frac{\Delta\ell_{T1}}{\ell} \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Температурная составляющая деформации , определяется следующим образом

$$\varepsilon_T = -\alpha(T(x))\cdot\left[\left(T_{oc} - \frac{q}{h} - \frac{q\ell}{K_{xx}}\right) + \frac{qx}{K_{xx}}\right] \qquad (16)$$

Соответствующая температурной составляющей напряжения $\sigma_T$, определяется в соответствии закона Гука

$$\sigma_T = E\cdot\varepsilon_T = -E\alpha(T(x))\cdot\left[\left(T_{oc} - \frac{q}{h} - \frac{q\ell}{K_{xx}}\right) + \frac{qx}{K_{xx}}\right] \qquad (17)$$

пругая составляющая деформации определяется следующим образом

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon - \varepsilon_T = -\frac{\Delta\ell_T}{\ell} + \alpha(T(x))\cdot\left[\left(T_{oc} - \frac{q}{h} - \frac{q\ell}{K_{xx}}\right) + \frac{qx}{K_{xx}}\right] \\ \sigma_x &= E\cdot\varepsilon_x \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Для иллюстрации данного метода приведем решения в виде графиков при следующих исходных данных:

$L = 20\ (см)$; $F = \pi\ (см^2)$; $K_{xx} = 100\ (Вт/(см\cdot{}^\circ C))$;

$q = -1500\ (Вт/см^2)$; $h = 8\ (Вт/(см^2\cdot{}^\circ C))$; $T_{oc} = 40\ ({}^\circ C)$;



$E = 2\cdot10^6\ (кГ/см^2)$; $\alpha = const = 125\cdot10^{-7}\ (1/{}^\circ C)$. При этих исходных данных поле распределения температуры, составляющих деформаций и напряжения приводится на рисунках 2-4.

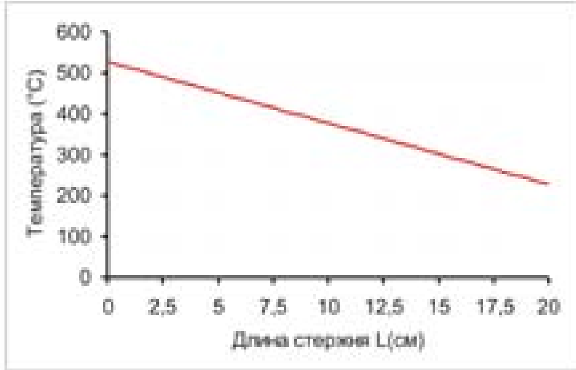



Рисунок 2 – Поле распределение температуры

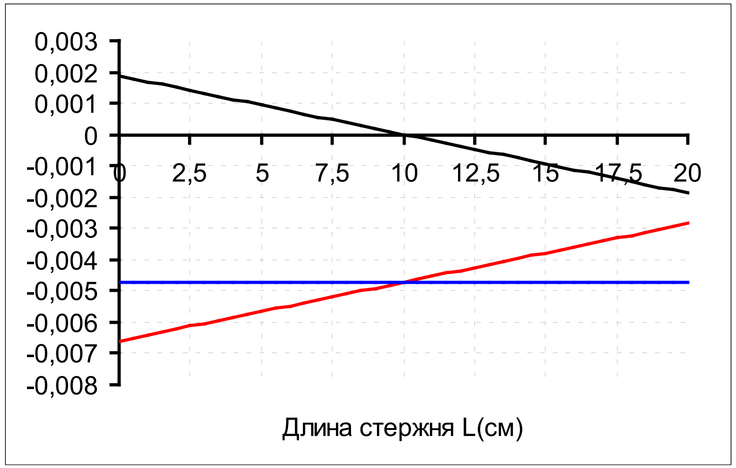



Рисунок 3 – Поле распределения составляющих деформаций

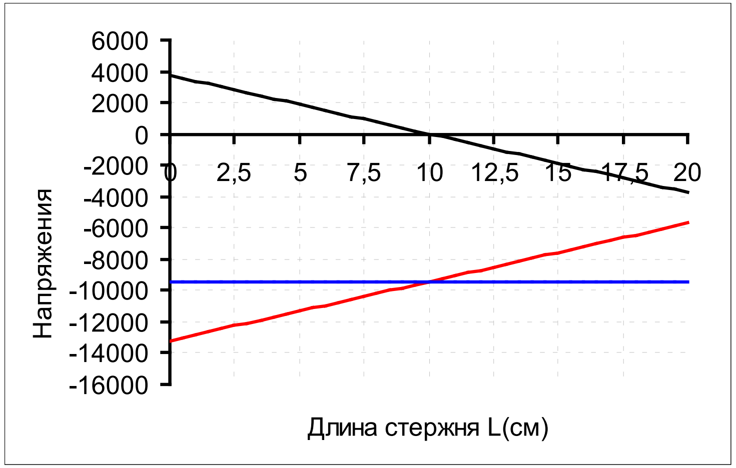



Рисунок 4 – Поле распределение составляющих напряжений

**Случай-2**. Предположим на защемленных концах стержня задано температура $T(x=0)=T_1$ и $T(x=L)=T_2$. В этом случае закон распределения температура по длине стержня будет следующей

$$T(x,\ \ell,\ T_1,\ T_2)=\frac{T_2-T_1}{\ell}\cdot x+T_1 \tag{19}$$

Тогда удлинения стержня определяется следующим образом

$$\Delta\ell_{T_2}=\int_0^{\ell}\alpha(T(x))\cdot\left[\frac{T_2-T_1}{\ell}\cdot x+T_1\right]dx \tag{20}$$

Величина сжимающего усилия, оставляющих деформаций и напряжения определяется следующим образом

$$\left.\begin{array}{l} R=-\dfrac{\Delta\ell_{T_2}\cdot E\cdot F}{\ell};\ \ \sigma=-\dfrac{\Delta\ell_{T_2}E}{\ell};\ \ \varepsilon=-\dfrac{\Delta\ell_{T}}{\ell};\ \ \varepsilon_T=-\alpha(T(x))\cdot T(x,\ell,T_1,T_2) \\ \sigma_T=E\cdot\varepsilon_T;\ \ \varepsilon_x=\varepsilon-\varepsilon_T;\ \ \sigma_x=E\cdot\varepsilon_x \end{array}\right\} \tag{21}$$

**Случай-3.** Предположим, что через площадей двух защемленных концов стержня происходит конвективный теплообмен с окружающей средой. При этом на левом конце $(x=0)$ стержня коэффициент теплообмена $h_1$, температура окружающей среды $T_{\text{в}\,1}$, а на правом конце $(x=L)$



соответственно $h_2$ и $T_{\text{в}\,2}$. В этом случае поле распределения температуры по длине стержня будет такова

$$T(x,h_1,h_2,T_{\text{в}\,1},T_{o\,2},K_x)=\frac{h_1\cdot h_1(T_{o\,1}-T_{o\,2})}{K_x(h_2-h_1)}\cdot x+\frac{h_2T_{o\,2}-h_1T_{o\,1}}{h_2-h_1} \tag{22}$$

Удлинения стержня определяется из следующего выражения

$$\Delta\ell_{T_3}=\int_0^{\ell}\alpha(T(x))\cdot\left[\frac{h_1h_2(T_{o\,1}-T_{o\,2})}{K_x(h_2-h_1)}\cdot x+\frac{h_2T_{o\,2}-h_1T_{o\,1}}{h_2-h_1}\right]dx \tag{23}$$

Остальные параметры определяются следующим образом

$$\left.\begin{array}{l} R=-\dfrac{\Delta\ell_{T_3}\cdot E\cdot F}{\ell};\ \ \sigma=-\dfrac{\Delta\ell_{T_3}E}{\ell};\ \ \varepsilon=-\dfrac{\Delta\ell_{T}}{\ell};\ \ \varepsilon_T=-\alpha(T(x))\cdot T(x,\ h_1,h_2,T_{o\,1},T_{o\,2},K_x); \\ \sigma_T=E\cdot\varepsilon_T;\ \ \varepsilon_x=\varepsilon-\varepsilon_T;\ \ \sigma_x=E\cdot\varepsilon_x; \end{array}\right\} \tag{24}$$

В принципе предложенный энергетический метод позволяет всесторонне исследовать термоупругое состояния защемленного двумя концами теплоизолированного по боковой поверхности стержня при разных вариациях граничных условий на концах стержня в смысле задания источников тепла любого вида.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ноздрев В.Ф. Курс термодинамики. – М.: Мир, - 1967. – 247с.
2. Химушин Ф.Ф. Жаропрочные стали и сплавы// 2-ое переработанное и дополненное издание. – М.: Металлургия, 1969. – 749с.



### *Түйіндеме*

*Бұл жұмыста екі шеті мықтап бекітілген, шектелген ұзындықты, бүйір беті бойынша жылудан қоргалган стерженнің жылу серпімділік күйін есептеудің аналитикалық шешімі энергетикалық принцип негізінде құрылады. Мықтап бекітілген шеттерінде әртүрлі жылу көздері беріледі. Температуралық, серпімді және жылу серпімділік құрайтын деформациялар және кернеулерден температураның таралу өрісі құрылады. Бұл үшін стержен материалының жылулық ұлгаю коэффициентінің мәні температураның функциясы болып табылады.*

### *Resume*

*In the given work on the basis of a power principle the analytical decision of a problem of a thermoelastic condition warmly isolated on a lateral surface of a core of the limited length jammed by two ends is under*

*construction. On the jammed ends different kinds of sources are set. The field distribution of temperature, temperature, elastic and thermoelastic making deformations and pressure is under construction. Thus value of factor of thermal expansion of a material of a core is temperature function.*

УДК 371.67:004.91:16

# К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ ЛОГИКИ ЭЛЕКТРОННОГО УЧЕБНОГО КУРСА

**Ж.Г. Муканова**
*к.п.н., Павлодарского государственный педагогический институт, г. Павлодар*
**А.М.Смагулова**
*Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар*

Проблема сжатия учебной информации и представления ее в лаконичном и доступном виде, с целью формирования динамического знания, применимого в реальных изменяющихся условиях в дидактике существует давно. Широко известны работы В.В. Давыдова и Д.Б. Эльконина по теории содержательного обобщения, П.М. Эрдниева (укрупнение дидактических единиц), Л.Я. Зорина и В.А. Усова (формирование системного знания) и др. Имеют место разработки технологических схем применения основных дидактических принципов, обеспечивающих структурирование знания и соответствия ее научной теории, лежащей в основе предмета.

Остановимся вкратце на закономерностях формирования знания, являющихся основанием для логико-структурного подхода к построению учебных курсов.

Процесс усвоения знаний во многом зависит от логики учебного курса. Сама же логика учебного курса – один из принципиальных вопросов в теории обучения. [1] Она включает в себя логику учебного предмета и зависит от психологических особенностей усвоения учащимися преподаваемого учебного материала.

При анализе логики учебного материала получают обоснованное решение вопросы о том, как поставить познавательную задачу перед учащимися, чтобы она была принята ими, в каком плане и в каком объеме нужно подать материал, какие вопросы поставить, какие задания для наблюдения и продумывания организовать и какие самостоятельные работы предложить, чтобы процесс обучения был оптимально эффективным, как в отношении усвоения знаний, так и в отношении развития учащихся. [1]



Усвоение знаний опирается на понимание в процессе восприятия учебной информации учащимися, на это влияют многие факторы. Например, частота передачи информации, скорость, день недели, часы, психическое состояние человека и т.д. Также на восприятие влияют поставленные перед учащимся цели обучения, от мотивов его деятельности и установок, от эмоций, которые могут изменять содержание восприятия, а также от особенностей личности учащегося.

В книге В.А.Сластенина, И.Ф.Исаева, Е.Н.Шиянова «Педагогика» описывается следующая схема восприятия учебной информации: понимание → осмысление → обобщение → применение знаний.

Понимание передаваемой информации происходит через установление первичных, в значительной мере обобщенных, связей и отношений между предметами, явлениями и процессами. В процессе понимания устанавливаются связи между ранее изученным и изучаемым на данный момент материалом. В свою очередь это ведет к более глубокому осмыслению учебного материала.

Осмысление изучаемой информации требует задействования общеучебных умений и навыков, опирающихся на такие приемы умственной деятельности, в основе которых лежат сложные мыслительные операции: анализ и синтез, сравнение и сопоставление, классификация и систематизация и др. [1] Осмысление учебного материала ведет к обобщению знаний.

Обобщение представляет собой процесс выделения и систематизации общих существенных признаков предметов и явлений. Это более высокая по сравнению с осмыслением ступень абстрагирования от конкретного, момент перехода от уяснения смысла к определению понятия. Оперирование научными понятиями на этапе обобщения знаний приводит к установлению связей между ними, к формированию суждений. [1] Сопоставление суждений приводит к самостоятельным выводам и доказательствам.

Важными структурными компонентами процесса усвоения знаний являются взаимосвязанные процессы закрепления и применения знаний. Целью закрепления знаний является введение нового материала в структуру личного опыта учащегося, на основе ранее изученного материала. Эффективность закрепления обусловлена системой упражнений в применении знаний на практике.

На данный момент для более лучшего восприятия учебной информации актуальна технология визуализации учебной информации, т.е. учебный материал может быть построен на основе схемно-знаковых моделей. В свою очередь это дает возможность более точно выделить главное в учебном материале и создавать логически построенные электронные учебные курсы.

По классификации Г.К.Селевко, технология интенсификации обучения на основе схемных и знаковых моделей учебного материала относится к группе педагогических технологий на основе активизации и интенсификации деятельности учащихся. По целевым ориентациям она направлена на:

- Формирование знаний, умений, навыков;
- Обучение всех категорий обучаемых, без селекции;
- Ускоренное обучение.

К этой же группе технологий он относит: игровые технологии, проблемное обучение и некоторые частно-предметные (например, интенсивную технологию изучения иностранного языка Лозанова - Китайгородской). [2]

Визуализация учебной информации может быть достигнута различными методологическими методами и приемами и, соответственно, известны разнообразные схемно-знаковые модели представления знаний. Для примера мы опишем несколько моделей, наиболее популярных в вузовской системе.

Продукционная модель. Эта модель представляет собой набор правил или алгоритмических предписаний для представления какой-либо модели. Продукционная модель дает возможность показать наглядно визуальную композицию со всеми связями и разветвлениями, если материал состоит из большого количества правил (продукций).

Логическая модель чаще всего используется для записи математических аксиом и теорем с использованием логики предикатов, что позволяет сократить число записываемых «знаков» в несколько раз.

Модель семантической сети. Как правило, используется для раскрытия объема понятия, то есть тех разновидностей, которые характеризуют данный предмет. Примером такой модели могут служить графы, блок-схемы, терминологические гнезда.

Когнитивно-графические элементы «Древо» и «Здание» строятся по принципу блок-схем. Здесь важна последовательность основных компонентов в изучаемой теории: основание – ядро – приложение.

Фреймовая модель. (Фрейм – рамка, остов, скелет, минимальное описание явления). Фрейм в технологии обучения – это единица представления знаний, заполненная в прошлом, детали которой при необходимости могут быть изменены согласно ситуации. Обычно фрейм состоит из нескольких ячеек (слотов), каждый из которых имеет свое назначение. При помощи фреймовой модели можно «сжимать», структурировать и систематизировать информацию в виде таблиц, матриц.

Опорный конспект или лист опорных сигналов (Л.О.С.) – это построенная по специальным принципам визуальная модель содержания учебного материала, в которой в сжатой форме изображены основные смысловые вехи изучаемой темы, а также используются графические приемы повышения мнемонического эффекта. [2] Его можно считать качественно новым этапом в схематизации учебного материала, который не отрицает, а развивает схему.

Логическая структура учебной информации в форме графа. Граф – это схема, которая показывает каким образом множество точек (вершин)



соединяется множеством линий (ребер). Граф учебной темы отображает структуру учебной информации. Вершина в графе является учебным элементом, а ребро – связь между учебными элементами. В связи с тем, что возможны различные структуры учебной информации, могут быть и разные формы представления графов.

Линейный граф.

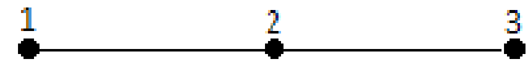



Рисунок 1 - Линейный граф

Дедуктивный граф.

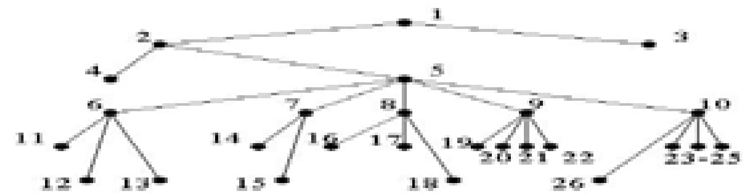



Рисунок 2 - Дедуктивный граф

Индуктивный граф.

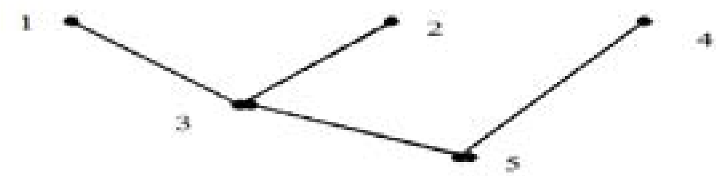



Рисунок 3 - Индуктивный граф

В зависимости от поставленной цели выстраивается учебный материал.

Нами поставлена задача выявления основных понятий курса «Информатизация образования, проблемы и перспективы», их логической взаимосвязи, построение логической структуры этого курса и рассматриваемых в нем основных тем и разработка на этой основе электронного обучающего средства, дающего достаточно полный обзор процессов и тенденций, наблюдаемых в этой сфере.

Модель освоения учебного материала показывает, в какой последовательности должны изучаться темы и каковы логические связи между ними.

Для того чтобы построить логическую модель учебного курса в первую очередь необходимо разбить материал на отдельные учебные элементы.

В состав модели курса входят матрицы отношений очередности и логических связей учебных элементов, последовательности изучения учебных элементов, граф логических связей учебных элементов. Построение модели производят в четыре этапа:

- формирование матрицы отношений очередности учебных материалов;
- обработка матрицы отношений очередности и построение последовательности изучения учебного материала в виде списка учебных элементов;
- формирование матрицы логических связей учебных элементов;
- построение графа логических связей учебных элементов.

Электронное средство по дисциплине «Информатизация образования и проблемы обучения» содержит 19 тем. В данной статье мы указываем основные темы электронного курса:

1. Информатизация образования.
2. Информатизация педагогического процесса.
3. Информационный процесс представления знаний.
4. Методы, средства и формы обучения в эпоху информатизации образования.
5. Новые педагогические средства.
6. Логика учебного материала и закономерности процесса усвоения знаний.
7. Дистанционная технология обучения, как альтернатива традиционной.
8. Ожидаемые результаты и перспективы информатизации обучения

В полной мере матрица и граф приводятся в материалах магистерской диссертации.

При заполнении ячеек матрицы отношений очередности анализируют отношения очередности между двумя учебными элементами. Единицу ставят в ячейку, если учебный элемент, указанный в номере строки, должен изучаться после учебного элемента, указанного в номере столбца. Противоположное отношение очередности обозначают нулем или оставляют соответствующую ячейку матрицы пустой. [4] Все ячейки главной диагонали матрицы отношений заполняют единицами. Ячейки матрицы, симметричные относительно главной диагонали должны иметь противоположные значения.

Единицу в ячейку матрицы логических связей учебных элементов ставят только при условии, что учебный материал учебного элемента логически связан с учебным материалом учебного элемента, указанного в номере столбца.

Следуя этапам построения логической модели, мы получили следующие результаты:



| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | | 1 |
| 2 | 1 | 1 | | | | | | | 2 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | | | | | | 3 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | 4 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | 5 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | 6 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 7 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 8 |

Рисунок 4 - Матрица отношений очередности

Матрицу логических связей можно представить в полном и сокращенном виде. В данной статье матрица логических связей приводиться в сокращенном виде.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | 1 | |
| 2 | 1 | | | | | | | |
| 3 | | 1 | | | | | | |
| 4 | | 1 | | | | | | |
| 5 | | 1 | | 1 | | | | |
| 6 | | | 1 | 1 | | | | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | | | 1 | | | | | |

Рисунок 5 - Матрица логических связей

На основе матрицы логических связей курса выстраивается графовая схема связей тем учебного курса. Граф может быть полный и сокращенный. Здесь приведен сокращенный граф. Логические связи учебных элементов отображают для наглядности в виде ориентированного графа.

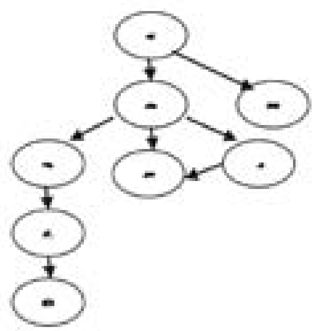


Рисунок 6 - Граф

В магистерской диссертации для построения логической модели учебного курса была предпочтена схема в виде графа. Это объясняется тем, что граф является наиболее простой формой схематического представления учебной информации для понимания и визуального восприятия, не требующей введения дополнительно словаря для расшифровки схем. При таком построении логической схемы представления учебной информации можно показать основные ее элементы и связи между ними. Он универсален для анализа логики учебной информации любого объема, сопоставления вариантов логических схем, и выбора оптимального для решения поставленной задачи курса.

ЛИТЕРАТУРА

1. http://www.p-lib.ru/peda gogika/slastenin/slastenin47.html.

2. Лаврентьев Г.В., Лаврентьева Н.Б., Неудахина Н.А. «Инновационные обучающие технологии в профессиональной подготовке специалистов» (часть 2), 2002, с.148-179.

3. http://krotov.info/lib_sec/shso/71_slas0.html.

4. http://www.dupliksv.hut.ru/pauk/glava3.html#gl3_1.

***Түйіндеме***

*Осы мақаладағы кезеңдер «Білім беру мен оқыту мәселелерін» ақпараттандыру» электрондық оқыту тәсіліндегі логикалық моделі тәртіп тәлімінде қарастырылады.*



***Resume***

*In the given article there considered the stages of logical modeling of electronic teaching aids on the example of discipline “Informatization of education and training problems”.*

ӘОЖ 539.3:534.2

# ЕКІ ОРТА ШЕКАРАЛАРЫНДАҒЫ ТЕРМОСЕРПІМДІ ТОЛҚЫНДАРЫНЫҢ ШАҒЫЛУ-СЫНУ ЕСЕБІ ЖӨНІНДЕ

***Н.А. Испулов, Ж.Д. Оспанова***

*С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.*

Бұл жұмыста, матрицант әдісі негізінде, екі орта шекараларындағы термосерпімді толқындарының шағылу-сыну есебі зерттеледі.

*B* матрица коэффициенттері кубтық сингонияның бір өлшемді $(m=0, n=0)$ жағдайындағы анизотропты ортадағы термосерпімді толқынының таралуы кезінде:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega b_{17} & b_{87} & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Кубтық сингония үшін $(Z \quad oci, m=0, n=0)$ (1) матрица коэффициенттерінің компоненттері келесі түрде болады:

$$b_{12}=\frac{1}{c_{11}}; \qquad b_{17}=\frac{\beta_{11}}{c_{11}}; \qquad b_{21}=-\omega^2\rho;$$

$$b_{78}=-\frac{1}{\lambda_{33}}; \qquad b_{87}=-i\omega\left(\frac{\beta_{11}^2}{c_{11}}+\frac{c_\varepsilon}{T_0}\right)$$

Екінші жуықтауда

$$P_{(2)}=E+\frac{B^2}{2}h^2 \qquad (2)$$

мұндағы $E$ – бірлік матрица,

$B$ – коэффициенттер матрицасы,

$h$ – біртексіздіктің периоды.

$$P_{(2)} = \frac{h^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega b_{17} & b_{87} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega b_{17} & b_{87} & 0 \end{pmatrix} + E =$$

$$= \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & P_{14} \\ 0 & P_1 & P_{23} & 0 \\ 0 & -i\omega P_{14} & P_2 & 0 \\ -i\omega P_{23} & 0 & 0 & P_2 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

(3) коэффициенттер матрицасының компоненттері келесі түрде болады:

$$P_1 = 1 + \frac{1}{2}h^2 b_{12} b_{21}; \qquad P_{14} = \frac{1}{2}h^2 b_{17} b_{78};$$

$$P_{23} = \frac{1}{2}h^2 b_{17} b_{21}; \qquad P_2 = 1 + \frac{1}{2}h^2 b_{78} b_{87}$$

Периодты біртексіз орталардың кең қолданысқа түсуіне байланысты олар біртексіз орталардың негізгі класстарының бірі болып табылады. Фундаменталдық шешулердің құрылымы периодты біртексіз орталардағы термосерпімді толқындарының жалпы дисперсия теңдеулерін анықтауға мүмкіндік береді.

Нетривиалдық шешулердің бар болу шарттары, анықтауыш теңсіздігі болып табылады [1]:

$$\det\left|P_{(2)} - \lambda E\right| = 0 \qquad (4)$$

Сипаттаушы теңдеудің түбірі келесі түрде болады:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{b_{12}b_{21}}{2} + \frac{b_{78}b_{87}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b_{12}^2 b_{21}^2 - 2b_{12}b_{21}b_{78}b_{87} + b_{78}^2 b_{87}^2 - 4i\omega b_{17}^2 b_{21} b_{78}}};$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\frac{b_{12}b_{21}}{2} + \frac{b_{78}b_{87}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b_{12}^2 b_{21}^2 - 2b_{12}b_{21}b_{78}b_{87} + b_{78}^2 b_{87}^2 - 4i\omega b_{17}^2 b_{21} b_{78}}}; \qquad (5)$$



$$\lambda_3 = \sqrt{\frac{b_{12}b_{21} + b_{78}b_{87} - \sqrt{b_{12}^2 b_{21}^2 - 2b_{12}b_{21}b_{78}b_{87} + b_{78}^2 b_{87}^2 - 4i\omega b_{17}^2 b_{21} b_{78}}}{2}};$$

$$\lambda_4 = -\sqrt{\frac{b_{12}b_{21} + b_{78}b_{87} - \sqrt{b_{12}^2 b_{21}^2 - 2b_{12}b_{21}b_{78}b_{87} + b_{78}^2 b_{87}^2 - 4i\omega b_{17}^2 b_{21} b_{78}}}{2}}$$

Екінші $k$ және $\chi$ серпімді және жылулық толқынының толқындық векторларының абсолют мәні:

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-b_{12}b_{21} - \sqrt{(b_{12}b_{21} - b_{78}b_{87})^2 - 4i\omega b_{17}^2 b_{21} b_{78}}\right)};$$

$$\chi = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-b_{12}b_{21} + \sqrt{(b_{12}b_{21} - b_{78}b_{87})^2 - 4i\omega b_{17}^2 b_{21} b_{78}}\right)} \qquad (6)$$

*П* матрицасы:

$$\Pi = \frac{1}{\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2}\left(P_{(2)} - \frac{1}{2}(\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)E\right) \qquad (7)$$

(7) теңдеуі матрицалық түрде:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 & 0 & \Pi_{14} \\ 0 & \Pi_1 & \Pi_{23} & 0 \\ 0 & -i\omega\Pi_{14} & -\Pi_1 & 0 \\ -i\omega\Pi_{23} & 0 & 0 & -\Pi_1 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

(8) матрица коэффициенттерінің компоненттері:

$$\Pi_1 = \frac{b_{12}b_{21} - b_{78}b_{87}}{2(\chi^2 - k^2)}; \qquad \Pi_{14} = \frac{b_{17}b_{78}}{\chi^2 - k^2}; \qquad \Pi_{23} = \frac{b_{17}b_{21}}{\chi^2 - k^2}$$

Серпімді бойлық және жылулық толқынының байланысқан матрицантының жалпы түрі келесідей болады [2]:

$$T = \left(\Pi + \frac{1}{2}E\right)\left(E\cos kz + \frac{B}{k}\sin kz\right) - \left(\Pi - \frac{1}{2}E\right)\left(E\cos\chi z + \frac{B}{\chi}\sin\chi z\right) \qquad (9)$$

$$\cos kz = \frac{e^{ikz} + e^{-ikz}}{2}; \qquad \sin kz = \frac{e^{ikz} - e^{-ikz}}{2} \qquad (10)$$

(10) теңдеуін ескере және $e^{-i(\chi)z}$ - физикалық мәнін қабылдай отыра (9) келесі түрде жазамыз:

$$T=\left(\Pi+\frac{1}{2}E\right)\frac{1}{2}\left(Ee^{-ikz}-\frac{B}{ik}e^{-ikz}\right)-\left(\Pi-\frac{1}{2}E\right)\frac{1}{2}\left(Ee^{-i\chi z}-\frac{B}{\chi}e^{-i\chi z}\right) \quad (11)$$

$T_0^+$ орташаланған матрицант бұл жағдайда термосерпімді орта үшін келесі түрде болады:

$$T_0^+=(\Pi+\frac{1}{2}E)(E-\frac{B}{ik})-(\Pi-\frac{1}{2}E)(E-\frac{B}{i\chi}) \quad (12)$$

(12) матрицасының құрылымы:

$$T_0^{\pm}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & 0 \\ t_{21} & 1 & 0 & t_{24} \\ t_{31} & 0 & 1 & t_{34} \\ 0 & t_{42} & t_{43} & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

мұндағы

$t_{12}=-b_{12}b_{78}b_{87}-i\omega b_{17}^2b_{78}+\sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87}+i\omega b_{17}^2)}$;

$t_{13}=b_{17}\sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87}+i\omega b_{17}^2)}$;

$t_{21}=-b_{21}b_{78}b_{87}+\sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87}+i\omega b_{17}^2)}$;

$t_{24}=b_{17}b_{21}b_{78}$;

$t_{31}=-i\omega b_{17}b_{21}b_{78}$;

$t_{34}=-b_{12}b_{21}b_{78}+\sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87}+i\omega b_{17}^2)}$;

$t_{42}=-i\omega b_{17}\sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87}+i\omega b_{17}^2)}$;

$t_{43}=-b_{12}b_{21}b_{87}-i\omega b_{17}^2b_{21}+\sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87}+i\omega b_{17}^2)}$

Егер $z=0$ болса (12) орташаланған матрицант келесі түрде жазылуы мүмкін:

$$T_0^{\pm}=\frac{1}{2}E\mp R \quad (14)$$



$R$ матрицасы келесі түрде болады:

$$R=\frac{1}{2i}\left(\frac{k-\chi}{k\chi}\right)\pi B-\frac{1}{4i}\left(\frac{k+\chi}{k\chi}\right)B \quad (15)$$

мұндағы

$$R=\begin{pmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & 0 & 0 & r_{24} \\ -i\omega r_{24} & 0 & 0 & r_{34} \\ 0 & -i\omega r_{13} & r_{43} & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

(16) матрица коэффициенттері келесі түрде болады:

$r_{12}=-i\omega b_{17}^2b_{78}+b_{12}(-b_{78}b_{87}+\sqrt{b_{21}b_{78}(i\omega b_{17}^2+b_{12}b_{87})})$;

$r_{13}=b_{17}\sqrt{b_{21}b_{78}(i\omega b_{17}^2+b_{12}b_{87})})$;

$r_{21}=b_{21}(-b_{78}b_{87}+\sqrt{b_{21}b_{78}(i\omega b_{17}^2+b_{12}b_{87})})$;

$r_{24}=b_{17}b_{21}b_{78}$;

$r_{34}=b_{78}(-b_{12}b_{21}+\sqrt{b_{21}b_{78}(i\omega b_{17}^2+b_{12}b_{87})})$;

$r_{43}=-i\omega b_{17}^2b_{21}+b_{87}(-b_{12}b_{21}+\sqrt{b_{21}b_{78}(i\omega b_{17}^2+b_{12}b_{87})})$

$\vec{U}_P$ - түсетін толқындар өрісін, $\vec{U}_R$ - шағылған толқындар өрісін және $\vec{U}_t$ - сынған толқындар өрісін ескере отырып [3], (1) негізінде:

$T_0^P\vec{U}_P+T_0^R\vec{U}_R=T_0^t\vec{U}_t$ при $z=0$

немесе

$$\left(\frac{1}{2}E-R_0\right)\vec{U}_P+\left(\frac{1}{2}E+R_0\right)\vec{U}_R=\left(\frac{1}{2}E-R_t\right)\vec{U}_t \quad (17)$$

Орталар байланысындағы өрістердің үзіліссіздігін ескере:

$$\vec{U}_P+\vec{U}_R=\vec{U}_t \quad (18)$$

келесіні аламыз:

$$R_0\vec{U}_P - R_0\vec{U}_R = R_t\vec{U}_t \qquad (19)$$

(18) ескере (19) өрнегі ізделіп отырған матрицалық түрдегі $\vec{U}_P, \vec{U}_R, \vec{U}_t$ векторлары үшін шекаралық шарттар болып табылады.

(18) және (19) өрнектерінде $\vec{U}_R$ және $\vec{U}_t$ белгісіз векторлар. (18) –ді (19)-ға қою келесі теңдеуді береді:

$$(R_0 + R_t)\vec{U}_R = (R_0 - R_t)\vec{U}_P \qquad (20)$$

Осыдан шағылған толқындар үшін представление шығады:

$$\vec{U}_R = (R_0 + R_t)^{-1}(R_0 - R_t)\vec{U}_0 \qquad (21)$$

$\vec{U}_t$ сынған толқынның өрісі (18) формуласымен анықталады.

$$R_0 + R^t = Q_1, \qquad R_0 - R^t = Q_2 \qquad (22)$$

болсын. Онда

$$\vec{U}_R = (Q)^{-1}(Q)\vec{U}_P \qquad (23)$$

$Q^+$ және $Q^-$ матрица элементтері

$$\tau^+_{ij} = r^0_{ij} + r^t_{ij}, \qquad \tau^-_{ij} = r^0_{ij} - r^t_{ij} \qquad (24)$$

сияқты анықталады.

Шағылған толқындар өрісі:

$$\vec{U}_R = G\vec{U}_P \qquad (25)$$

(18)-ден:

$$\vec{U}_R = \vec{U}_t - \vec{U}_P \qquad (26)$$

(26)-ді (25)-ге қойып, сынғантолқын өрісін аламыз:

$$\vec{U}_t = (G + E)\vec{U}_P \qquad (27)$$

мұндағы

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & g_{14} \\ 0 & g_{22} & g_{23} & 0 \\ 0 & g_{32} & g_{33} & 0 \\ g_{41} & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix} \qquad (28)$$



$G$ матрица элементтері келесі түрде алынады:

$$g_{11} = -1 + \frac{2b_{21}(b_{78} + a\chi r_{34})}{b_{21}(b_{78} + a\chi r_{34}) + ak(ia\omega\chi r_{24}^2 + r_{21}(b_{78} + a\chi r_{34}))},$$

$$g_{14} = -\frac{2ab_{78}kr_{24}}{b_{21}(b_{78} + a\chi r_{34}) + ak(ia\omega\chi r_{24}^2 + r_{21}(b_{78} + a\chi r_{34}))};$$

$$g_{22} = -1 + \frac{2b_{12}(b_{87} + a\chi r_{43})}{b_{12}(b_{87} + a\chi r_{43}) + ak(ia\omega\chi r_{13}^2 + r_{12}(b_{87} + a\chi r_{43}))};$$

$$g_{23} = -\frac{2ab_{87}kr_{13}}{b_{12}(b_{87} + a\chi r_{43}) + ak(ia\omega\chi r_{13}^2 + r_{12}(b_{87} + a\chi r_{43}))};$$

$$g_{32} = \frac{2ia\omega b_{12}\chi r_{13}}{b_{12}(b_{87} + a\chi r_{43}) + ak(ia\omega\chi r_{13}^2 + r_{12}(b_{87} + a\chi r_{43}))};$$

$$g_{33} = -1 + \frac{2b_{87}(b_{12} + akr_{12})}{b_{12}(b_{87} + a\chi r_{43}) + ak(ia\omega\chi r_{13}^2 + r_{12}(b_{87} + a\chi r_{43}))};$$

$$g_{41} = \frac{2ia\omega b_{21}\chi r_{24}}{b_{21}(b_{78} + a\chi r_{34}) + ak(ia\omega\chi r_{24}^2 + r_{21}(b_{78} + a\chi r_{34}))};$$

$$g_{44} = -1 + \frac{2b_{78}(b_{21} + akr_{21})}{b_{21}(b_{34} + a\chi r_{34}) + ak(ia\omega\chi r_{24}^2 + r_{21}(b_{78} + a\chi r_{34}))};$$

Сондықтан

$$\vec{U}_R = (U_{zR}, \sigma_{zR}, \theta_R, q_{zR})$$

$$\vec{U}_t = (U_{zt}, \sigma_{zt}, \theta_t, q_{zt}) \qquad (29)$$

$$\vec{U}_P = (U_{zP}, \sigma_{zP}, 0, 0) \qquad (30)$$

(25) теңдеуіне қойып шағылған толқындар өрісін аламыз:

$$\begin{pmatrix} U_{zR} \\ \sigma_{zR} \\ \theta_R \\ q_{zR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & g_{14} \\ 0 & g_{22} & g_{23} & 0 \\ 0 & g_{32} & g_{33} & 0 \\ g_{41} & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} U_{zP} \\ \sigma_{zP} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (31)$$

$$U_{zR} = g_{11}U_{zP}; \qquad \sigma_{zR} = g_{22}\sigma_{zP};$$

$$\theta_R = g_{32}\sigma_{zP}; \qquad q_{zR} = g_{41}U_{zP}$$

(27) теңдеуіне қойып сынған толқындар өрісін аламыз:

$$\begin{pmatrix} U_{zt} \\ \sigma_{zt} \\ \theta_t \\ q_{zt} \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & g_{14} \\ 0 & g_{22} & g_{23} & 0 \\ 0 & g_{32} & g_{33} & 0 \\ g_{41} & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix} \right) * \begin{pmatrix} U_{zP} \\ \sigma_{zP} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (32)$$

$$U_{zt} = (1 + g_{11})U_{zP;}\ \sigma_{zt} = (1 + g_{22})\sigma_{zP};$$

$$\theta_t = g_{32}\sigma_{zP};\ q_{zt} = g_{41}U_{zP}$$

Екі термосерпімді кеңістіктер шекараларындағы термосерпімді толқынның сыну және шағылу есептерін шешу ұқсас орындалады. Шешімі (21) түрінде, ал $R_0$ және $R_t$ матрицалары (16) түрінде болады.

$$(R_0 + R_t)^{-1} = M \qquad (R_0 + R_t) = L$$

деп белгілейміз.

$M$ кері матрица келесі түрде болады:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m_{34} & -m_{24} & 0 \\ m_{43} & 0 & 0 & -m_{13} \\ -m_{13} & 0 & 0 & m_{12} \\ 0 & -m_{24} & m_{21} & 0 \end{pmatrix} \qquad (33)$$

(33) матрица компоненттері келесі түрде алынады:

$$m_{34} = \frac{r_{34}^0 + r_{34}^t}{\delta_2^2}; \qquad m_{13} = \frac{r_{13}^0 - r_{13}^t}{\delta_1^2};$$

$$m_{43} = \frac{r_{43}^0 + r_{43}^t}{\delta_1^2}; \qquad m_{24} = \frac{r_{24}^0 - r_{24}^t}{\delta_2^2};$$

$$m_{21} = \frac{r_{21}^0 + r_{21}^t}{\delta_2^2}; \qquad m_{12} = \frac{r_{12}^0 + r_{12}^t}{\delta_1^2}$$

мұндағы

$$\delta_1^2 = r_{12}r_{43} - r_{13}^2; \qquad \delta_2^2 = r_{21}r_{34} - r_{24}^2;$$



(25) –дегі $G$ матрица көбейтумен анықталады:

$$G = M \cdot L; \qquad l_{ij} = r_{ij}^0 - r_{ij}^t$$

және (28) түрінде болады. Бұл есептің шешуі (25), (26) және (27) формулаларымен беріледі.

ӘДЕБИЕТТЕР

1. Тлеукенов С.К. Метод матрицанта. – Павлодар: НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004. – 148 с.

2. Сейтханова А. К. О задаче отражения-преломления упругой волны на границе термоупругого полупространства // Вестник ПГУ. Серия Физико – математическая, № 4. – Павлодар, 2010. – С. 42 – 49.

3. Тлеукенов С.К., Сейтханова А.К., Ильясов М.Н., Досумбеков К.Р. О коэффициентах отражения и преломления упругих и термоупругих волн // Материалы международной научной конференции «Вторые Ержановские чтения», г.Актобе, 2007 г.

***Резюме***

*Метод исследования работы - аналитический, основанный на развитии матричных методов исследования динамики упругих слоистых сред. Суть метода заключается в приведении исходных уравнений движения, на основе метода разделения переменных (представления решения в виде плоских волн), к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами и построении структуры матрицанта (нормированная матрица фундаментальных решений). Матричный метод позволяет при едином подходе рассматривать распространение волн в широком классе сред. Другое достоинство этого метода состоит в том, что выражения, полученные матричным методом, имеют весьма компактную форму, которая оказывается удобной как при аналитических исследованиях, так и при численных расчетах.*

***Resume***

*Method of research of work - analytical, based on development of matrix methods of research of dynamics of elastic layered environments. The method essence consists in reduction of the initial equations of movement, on the basis of a method of division of variables (representation of the decision in the form of flat waves), to equivalent system of the ordinary differential equations of the first order with variable factors and structure construction матрицанта (нормированная a matrix of fundamental decisions).The matrix method allows to consider at the uniform approach distribution of waves to a wide class of environments. Other advantage of this method consists that the expressions received by a matrix method, have rather compact form which appears convenient both at analytical researches, and at numerical calculations.*

УДК 621.315.592

# ВЛИЯНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ АКЦЕПТОРНОЙ ПРИМЕСИ, ТЕМПЕРАТУРЫ И НАПРЯЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПРОВОДИМОСТЬ И ПРОДОЛЬНОЕ МАГНЕТОСОПРОТИВЛЕНИЕ В КРЕМНИИ *P*-ТИПА

***Л.У. Таймуратова***

*Каспийский государственный университет технологий и инжиниринга имени Ш. Есенова, г. Актау*

Поскольку примеси могут весьма существенным образом влиять на электрические свойства полупроводников, рассмотрим влияние акцепторной примеси на электропроводность и магнитнорезистивный эффект [1,2].

Известно, удельное сопротивление примесных полупроводников определяется концентрацией легированной примеси. В частности, с повышением концентрации примеси (в частности, бора) удельное сопротивление примесного кремния экспоненциально падает, что связано с резким повышением концентрации дырок в валентной зоне. Резкое падение электропроводности с рост концентрации дырок в кремнии p-типа связано с появлением акцепторного уровня в запрещенной зоне, вблизи валентной зоны и переходом валентных электронов на этот уровень. Такой переход вполне возможен в связи с низкой энергией ионизации (kT) носителей заряда в примесном полупроводнике. При легировании кремния бором, значение энергии ионизации электронов из валентной зоны 0,045 эВ. В нашем эксперименте диапазон изменения удельного сопротивления кремния p-типа составил от 70 Ом до 2200 кОм. Зависимость удельного сопротивления от концентрации бора в кремнии представлена в таблице № 1.

Таблица №1 Зависимость удельного сопротивления от концентрации бора в кремнии.

Таблица №1

| $\rho$ | $10 Ом\cdot см$ | $40 Ом\cdot см$ | $70 Ом\cdot см$ | $300 Ом\cdot см$ | $2200 Ом\cdot см$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $2{,}1\cdot 10^{15} см^{-3}$ | $4{,}7\cdot 10^{14} см^{-3}$ | $1{,}06\cdot 10^{14} см^{-3}$ | $4{,}63\cdot 10^{13} ñì^{-3}$ | $2{,}03\cdot 10^{13} см^{-3}$ |

Для выяснения характера зависимости удельного сопротивления (ρ) от концентрации бора (n) в кремнии построим график этой зависимости ρ(n). Согласно рисунок 1. зависимость ρ(n) является экспоненциальной.



Из представленных данных (рисунок 1.) можно заключить, что при больших концентрациях примеси в кремнии p-типа проводимость достигает насыщения и далее электропроводность перестает зависеть от примеси. Исследование образцов кремния p-типа в магнитном поле позволило установить, что четко выражена анизотропия продольного магнетосопротивления образцов в зависимости от кристаллографического направления, а также заметная зависимость этой величины от концентрации примеси в образце (рисунок 2.).

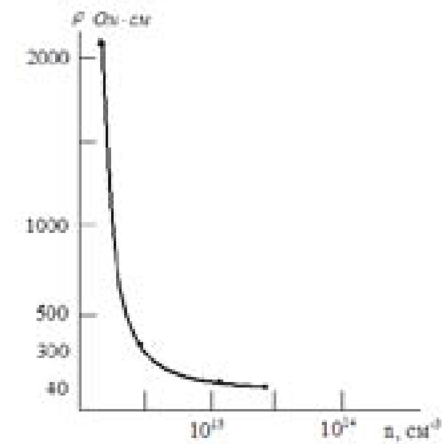



Рисунок 1 Зависимость удельного сопротивления от концентрации бора в кремнии p-типа

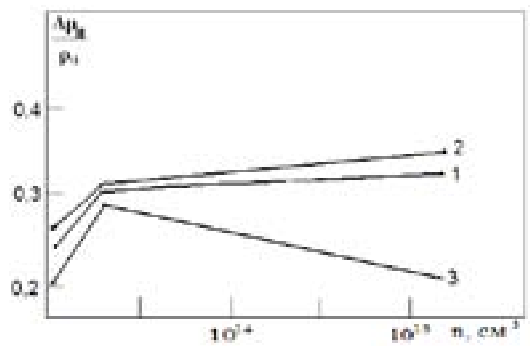



Рисунок 2 - Зависимость максимума продольного магнетосопротивления кремния p-типа от концентрации примеси (бора) вдоль различных кристаллографических осей (1- [001], 2- [110], 3- [111])

Резко повышается продольное магнетосопротивление образцов в диапазоне удельного сопротивления от 70 до 300 Ом, т.е. по мере уменьшения концентрации бора в кремнии от $1{,}06\cdot10^{14}см^{-3}$ до $4{,}63\cdot10^{13}см^{-3}$. Следует отметить, что наибольший скачок максимума продольного магнетосопротивления в зависимости от концентрации примеси (изменение составляет примерно на 0,08) наблюдается вдоль направления [111]. В то же время для направлений [110] и [001], эти зависимости менее ярко выражены (изменение составляет примерно 0,03). В области малых концентраций примеси или больших удельных сопротивлений (2200 кОм) также значение максимума продольного магнетосопротивления существенно отличается от кристаллографического направления. В диапазоне удельных сопротивлений от 300 до 2200 Ом·см наибольшее изменение максимума продольного магнетосопротивления в зависимости от концентрации примеси наблюдается вдоль направления [111]. Слабое изменение этой величины наблюдается вдоль осей [110] и [001]. Однако при больших концентрациях акцепторной примеси ($1{,}06\cdot10^{14}см^{-3}$) или в области малого удельного сопротивления (около 70 Ом·см и ниже) значение максимума продольного магнетосопротивления кремния p-типа вдоль любых кристаллографических осей практически изменяется слабо. Следовательно, несмотря на то, что имеется анизотропия максимума продольного магнетосопротивления кремния p-типа вдоль любых кристаллографических осей, как при высоких концентрациях примеси, так и при низких, тем не менее, в области больших концентрации примеси анизотропия этой величины значительно снижается. Можно ожидать, что указанная анизотропия будет несущественной при высоких концентрациях примеси порядка $1{,}06\cdot10^{15}см^{-3}$.

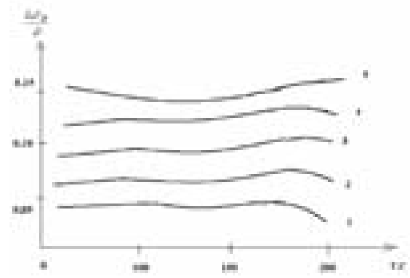
При достаточно высокой концентрации примесного бора в кремнии удельное сопротивление образца снижается до десятков Ом·см, за счет резкого повышения концентрации дырок. Из рисунка 2 следует, что при насыщении полупроводника высокой концентрацией дырок анизотропия продольного магнетосопротивления в образце может быть сведена минимуму, что согласуется с теорией[3,4].

Таким образом, можно управлять значением продольного магнетосопротивления в кремнии путем введения различных концентраций примесных элементов.

Влияние температуры на продольное магнетосопротивление кремния p-типа выражено менее ярко. Можно отметить, что изменение продольного магнетосопротивления исследуемых образцов в диапазоне температур от комнатной до 200$^0$С носит неравномерный характер. Одновременное влияние магнитного поля и температуры на магниторезистивные свойства кремния p-типа можно увидеть на рисунке 3, где представлены температурные зависимости продольного магнетосопротивления кремния p-типа при разных значениях напряженностей магнитного поля.

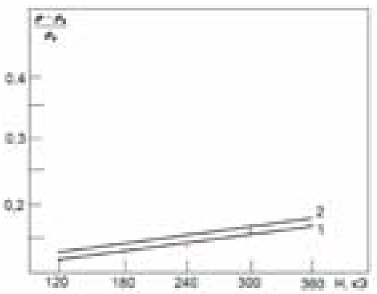


На рисунке 3 видно, что на кривых зависимости $\Delta\rho\|/\rho0$ (T) наблюдается отчетливо выраженный минимум для образцов кремния p-типа. Этот минимум обусловлен, с одной стороны, уменьшением подвижности носителей тока с увеличением температуры и, с другой стороны, вкладом дырок в область смешанной проводимости, которые, как квазиизотропные носители электрического заряда, почти не испытывают влияния продольного магнитного поля. Следовательно, они занижают магнетосопротивление в продольном магнитном поле, что и приводит к наблюдению минимума на температурной зависимости продольного магнетосопротивления. Минимум магнетосопротивления не зависит от напряженности магнитного поля, не смещается в сторону сильных магнитных полей с увеличением напряженности магнитного поля. Минимальное значение для p-типа образцов при 1800С.



H, кЭ: 1-120; 2-180; 3-240; 4-300; 5-360, $\rho = 40Ом\cdot см$ , J? H? [111]

Рисунок 3 - Температурная зависимость продольного магнетосопротивления кремния p-типа




1- при T= 300 К; 2 - при T=373 К.

Рисунок 4 - Зависимость продольного магнетосопротивления вдоль оси J‖H‖[111] от напряженности магнитного поля для кремния p-типа с $\rho = 40Ом\cdot см$ при разных температурах

Влияние магнитного поля на продольное магнетосопротивление кремния р-типа можно наблюдать с помощью рисунок 3. Отметим, что эта зависимость достаточно заметная в температурном диапазоне от комнатной до 473 К . Для выявления характера такой зависимости построим график зависимости продольного магнетосопротивления кремния р-типа от магнитного поля (рисунок 4).

Как видно из рисунка 4 зависимость продольного магнетосопротивления вдоль оси J‖H‖[111] от напряженности магнитного поля (для кремния р-типа с $\rho = 40 Ом \cdot см$) носит линейный характер. Причем, в данном диапазоне напряженности магнитного поля продольное магнетосопротивление растет слабо, как при комнатной температуре, так и при Т= 373 К. Следует отметить, что данный образец обладает высокой концентрацией дырок [5,6]. Поэтому согласно экспериментальным данным рисунок 3.5 можно ожидать, что характер зависимости продольного магнетосопротивления от напряженности магнитного поля будет аналогичным и относительно других кристаллографических направлений. Рост продольного магнетосопротивления кремния р-типа с повышением магнитного поля можно объяснить линейным увеличением взаимодействия дырок с приложенным магнитным полем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Argyres R.N. Galvanomagnetic effects in the quantum limit // J. Phys. Chem. Solids. - 1959. –Vol.8, №1.- P124-130.

2. Машкауцан В.В., Зайнуллина Р.И., Бебенин Н.Г., Устинов В.В., Муковский Я.М. Эффект Холла в монокристаллах La1-xSrxMnO3 // ФТТ. - 2003. - Т45, вып. 3. - С. 468-472.

3. Рябинкина Л.И., Абрамова Г.М., Романова О.Б., Киселев Н.И. Эффект Холла в магнитных полупроводниках FexMn1-xS // ФТТ. - 2004. – Т.46, вып.6. -С.1038-1043.

4. Шмелев Г.М., Эпштейн Э.М., Маглеванный И.И. Эффект Холла в квазидвумерных сверхрешетках в неквантующих магнитном и сильном электрическом полях // ФТП. - 1997. – Т. 31, вып. 8. - С. 916-920.

5. Кадушкин В.И. Эффект Холла на инерционных электронах в полупроводниках // ФТП. - 1997. – Т. 31, вып. 4. – С. 468-470.http://www.ioffe.ru/journals/ftp/1997/04/page-468.html.ru

6. Алексеенко М.В., Забродский А.Г., Штеренгас Л.М. Вклад легких дырок в эффект Холла для сложной валентной зоны германия и его зависимость от уровня легирования // ФТП. - 1998. – Т. 32, вып.7. – С. 811-820.

***Түйіндеме***

*Бұл мақалада акцепторлық қоспа концентрациясының, температураның және магнит өрісінің кернеулігінің өткізгіштікке және р-типті кремнийдің магнитті кедергісіне әсері қарастырылады.*



***Resume***

*In this paper we consider effects of concentration acceptor impurity, temperature and magnetic field on the conductivity and the longitudinal magneto resistance in p-type silicon.*

УДК 539.3

# ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖУЩЕЙСЯ В НЕПОДКРЕПЛЕННОМ ЗАГЛУБЛЕННОМ ТОННЕЛЕ НАГРУЗКИ НА ЕГО ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

**В.Н. Украинец, Д.А. Алигожина, А.Х. Жакиянова**
*Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар*

1. Рассмотрим круговую цилиндрическую полость радиуса $R$ в линейно упругом, однородном и изотропном пространстве с параметрами Ламе $\lambda, \mu$ и плотностью $\rho$ .

В направлении оси полости по её поверхности с постоянной скоростью $c$ движется нагрузка $P$:

$$\sigma_{ij}\big|_{r=R} = P_j(\theta,\eta), \quad j = r,\theta,\eta \tag{1}$$

где $\sigma_{ij}$ – компоненты тензора напряжений в среде, $P_j(\theta,\eta)$ – составляющие интенсивности подвижной нагрузки Р в подвижной цилиндрической системе координат $(r,\theta,\eta = z-ct)$.

Движениепространства описывается динамическими уравнениями теории упругости

$$\left(\frac{1}{M_p^2}-\frac{1}{M_s^2}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}+\frac{1}{M_s^2}\nabla^2\mathbf{u}=\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial\eta^2} \tag{2}$$

Здесь u– вектор смещения упругой среды; $M_p = c/c_p, M_s = c/c_s$ – числа Маха; $c_p = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$, $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ –скорости распространения волн расширения – сжатия и сдвига в среде.

Преобразуем уравнение (2), выразив вектор смещения упругой среды через потенциалы Ламе [1]

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi_1 + \operatorname{rot}(\varphi_2\mathbf{e}_\eta) + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\varphi_3\mathbf{e}_\eta), \qquad (3)$$

где $\mathbf{e}_\eta$ – орт оси $\eta$.

Из (2) и (3) следует, что потенциалы $\varphi_j$ удовлетворяют видоизменённым волновым уравнениям

$$\nabla^2\varphi_j = M_j^2 \frac{\partial^2\varphi_j}{\partial\eta^2}, \; j = 1, 2, 3. \qquad (4)$$

Здесь $M_1 = M_p,\, M_2 = M_3 = M_s$.

Рассмотрим периодическую задачу, когда подвижная нагрузка периодична по и представима в виде

$$P_j(\theta,\eta) = p_j(\theta)e^{i\xi\eta}, \quad p_j(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{nj}e^{in\theta}, \quad j = r,\theta,\eta. \qquad (5)$$

Потенциалы $\varphi_j$ также будем искать в виде периодических функций по $\eta$

$$\varphi_j(r,\theta,\eta) = \Phi_j(r,\theta)e^{i\xi\eta} \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (4), получим видоизменённые уравнения Гельмгольца

$$\nabla_2^2\Phi_j - m_j^2\xi^2\Phi_j = 0, \; j = 1, 2, 3. \qquad (7)$$

Здесь $\nabla_2^2$ – двумерный оператор Лапласа, $m_j^2 = 1 - M_j^2,\, m_1 = m_p,\, m_2 = m_3 = m_s$.

Представив компоненты напряжённо-деформированного состояния среды через потенциалы Ламе можно получить выражения для перемещений $u_l$ и напряжений $\sigma_{lm}$ в цилиндрической $(l = r,\theta,\eta,\, m = r,\theta,\eta)$ системе координат как функции от $\Phi_j$. Для определения компонент НДС массива нужно найти $\Phi_j$.

Предположим, что скорость нагрузки меньше скорости распространения волн сдвига в окружающей полость среде. В этом случае $M_s < 1\; (m_s > 0)$, и решения уравнений (7) можно представить в виде

$$\Phi_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj}K_n(k_j r)e^{in\theta}, \qquad (8)$$

где $K_n(k_j r)$ – функции Макдональда, $k_j = m_j\xi$; $a_{nj}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя (8) в выражения для компонент НДС среды, получим:

$$u_l = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{3} T_{lj}(K_n(k_j r))e^{i(\xi\eta + n\theta)}a_{nj}, \qquad (9)$$

$$\frac{\sigma_{lm}}{\mu} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{3} S_{lmj}(K_n(k_j r))e^{i(\xi\eta + n\theta)}a_{nj}.$$



Здесь $l = r,\theta,\eta,\quad m = r,\theta,\eta$. Вид функций $T_{lj}(K_n(k_j r))$, $S_{lmj}(K_n(k_j r))$ определен в [2].

Для определения коэффициентов $a_{nj}$ воспользуемся граничными условиями (1), с учётом (5) и (9). Приравнивая коэффициенты рядов при $e^{in\theta}$, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{3} S_{rmj}(K_n(k_j R))a_{nj} = P_{mn}/\mu, \qquad (10)$$

$m = r,\theta,\eta$; $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Как показали проведенные исследования, обращение в ноль определителя системы (10), возможно только при скоростях нагрузки не ниже, чем скорость релеевской волны $c_R$.

2. Исследуем влияние скоростис движения и периода $T = 2\pi/\xi$ нормальной осесимметричной периодической нагрузки с амплитудой $P_0$, оказывающей давление на поверхность тоннеля в области начала подвижной системы координат, на его прогибы. В качестве примера рассмотрим тоннель глубокого заложения радиусом один метр. Для исследований возьмём породы, механические свойства которых существенно отличаются друг от друга:

*а) гранит* – $\lambda = 2{,}99\cdot10^4$ МПа, $\mu = 3{,}185\cdot10^4$ МПа, $\rho = 2{,}6\cdot10^3$ кг/м³, $c_p = 5999{,}2$ м/с, $c_s = 3500$ м/с, $c_R = 3213$ м/с;

*б) алевролит* – $\lambda = 1{,}688\cdot10^3$ МПа, $\mu = 2{,}532\cdot10^3$ МПа, $\rho = 2{,}5\cdot10^3$ кг/м³, $c_p = 1643{,}4$ м/с, $c_s = 1006{,}4$ м/с, $c_R = 917$ м/с;

*в) насыпные грунты* – $\lambda = 1{,}561\cdot10^2$ МПа, $\mu = 1{,}0935\cdot10^2$ МПа, $\rho = 1{,}5\cdot10^3$ кг/м³, $c_p = 500$ м/с, $c_s = 270$ м/с, $c_R = 250$ м/с.

Как показали расчеты, увеличением скорости движения нагрузки с любым фиксированным периодом приводит к возрастанию прогибов поверхности тоннеля. При этом, нагрузка с большим периодом $T$ вызывает большие прогибы. Иная картина наблюдается при движении нагрузки с разными периодами. В табл. 1 приведены значения прогибов $u_r^* = u_r\mu/P_0$ поверхности тоннеля в начале подвижной системы координат $(\eta = 0)$ при разных скоростях движения (т.е. при различных числах Маха $M_R = c/c_R$) и периодах нагрузки $T$. Из анализа данных таблицы следует, что, независимо от свойств породного массива, увеличение периода нагрузки оказывает более существенное влияние на деформацию поверхности тоннеля, чем увеличение ее скорости.

Таблица 1

Прогибы поверхности тоннеля в начале подвижной системы координат при разных скоростях и периодах нагрузки

| $M_z$ | $T$, м | Гранит | Алевролит | Нас.грунты |
|---|---|---|---|---|
| | | $w_r^*$, м | | |
| 0,1 | $2\pi$ | 0,450 | 0,452 | 0,446 |
| 0,9 | $\pi/4$ | 0,240 | 0,249 | 0,227 |

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь Л.И., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – Киев: Наукова думка, 1978. – 308с.

2. Украинец В.Н., Гирнис С.Р. О расчете заглубленного неподкрепленного тоннеля при действии стационарной подвижной нагрузки //Наука и техника Казахстана. – 2006. – №1. – С. 82–86.

***Түйіндеме***

*Қажетті шамада тоннель бойынша жүретін жүктеме оны қоршаған текті массивте тербелесті құрады. Оған қоса қайта қалыптастыруда, сонымен қатар салынған тоннельдің тереңдігінен пайда болады. Берілген жұмыста, модельдік жағдайда дөңгелек цилиндрлік қуыс айналысымен бірқалыпты қозғалуы туралы кезеңдік жүктемеде серпімді кеңістікте бекітілмеген терең салынған тоннельде қайта қалыптастыру жағдайына оның жылдамдығы мен кезеңінің әсері зерттеледі.*

***Resume***

*The load running along a tunnel creates oscillations in the surrounding rock massif. The arousing deformations considerably depend on the kind and the parameters of the load, as well as on the depth of the tunnel bedding. In the given work, on the basis of a model task on the periodic load uniformly moving in an elastic space along a round cylinder vesicle, the influence of its speed and the period on the deformed condition of the unsupported tunnel of deep bedding is studied.*



УДК 517.927

# МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РИККАТИ

***К.А. Хасеинов***

*Казахский Национальный технический университет имени К.И.Сатпаева*

Линейных дифференциальных уравнений (ЛДУ) с переменными коэффициентами,нахождение решений которых сводилось бы к конечной последовательности действий над известными функциями и интегрированию этих функций, мало.Примерами могут служить урав-нение Эйлера, некоторые классы уравнений, коэффициенты которых удовлетворяют определенным условиям, приводимые к уравнениям с постоянными коэффициентами постановкой Еругина или методом последовательных дифференцирований [1;2]. На наш взгляд ,задача решения в квадратурах ЛДУ и нахождение новых классов интегри-руемых уравнений представляет интерес по следующим причинам:

- интегрирование в замкнутом виде дает решение в аналитической форме, позволяющей произвести полное исследование решаемой задачи;
- возникает возможность нахождения приближенных решений дифференциальных уравнений, близких по своему виду к интегри-руемым уравнениям;
- вопрос интегрируемости ЛДУ в замкнутом виде не исследован полностью [3;4;5].

Еще Л. Эйлер привел уравнение второго порядка к уравнению Риккати, применив метод интегрирующего множителя в виде exp [6]. Идея нахождения частного решения линейного однородного уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами в форме нашло также косвенное отражение в работах Жордана и операторном методе Ващенко-Захарченко и прямое у Мордухай-Болтовского . Поз-же итальянский математик Дж. Сансоне [7], разыскивая решение в том же виде , линейное уравнение n-го порядка привел к нелинейному уравнению (n-1)-го порядка. Исследованию и решению в квадратурах линейных дифференциаль-ных уравнений или уравнений типа Риккати посвящены работы[4;5;8] Одним из критериев преобразования является, более полная иссле-дуемость новых уравнений, их большая «решабельность» по сравне-нию с исходными. Конечно, интегрирование характеристических уравнений типа Риккати может оказаться не менее трудным, чем интегрирование самих линейных уравнений, но в некоторых случаях нахождение решения существенно облегчается .Следует также отметить, что кажущееся усложнение задачи носит принципиальный характер, ставится следующая задача:

Разработать методы решения ЛДУ с переменными коэффициен-тами, выделить в разрезе единого подхода классы уравнений ,порядок которых можно понизить или даже свести задачу к квадратурам.

В работе исследуются характеристические уравнения типа Риккати, что позволило получить некоторые новые результаты. Дано опреде-ление кратных решений характеристического уравнения *(n-1)*-го порядка типа Риккати и определена фундаментальная система реше-ний(ФСР)[9]. Полученный результат является обобщением случая кратных корней характеристического уравнения для ЛДУ с постоян-ными коэффициентами. В случае, когда хотя бы одно из решений характеристического уравнения есть постоянная величина, разработан алгебраический метод решения ЛДУ п-го порядка с переменными коэффициентами. Найдено необходимое и достаточное условие существования решения экспоненциального вида. Введено понятие возвратного линейного дифференциального уравнения произвольного порядка, изучены его свойства. Доказана частичная приводимость линейного дифференциального уравнения *n*-го порядка, т.е. доказано, что существует хотя бы одно решение вида $e^{\lambda t}$ у линейного уравнения с переменными коэффициентами, полученного заменой независимой переменной [10]. Таким образом ,поставленные задачи являются актуальными,и реше-ние их позволит развить теорию дифференциальных уравнений , а также расширить области их приложений.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение п-го порядка с непрерывными на *(a,b)* коэффициентами

$$Ly \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(i)} + a_0(x) y = 0, \quad a_n(x) = 1 \ \forall x \in (a,b) \qquad (1)$$

и нелинейное дифференциальное уравнение *(n-1)*-го порядка

$$R(r) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i(x)[p + r(x)]^{i-1} \cdot r(x) + a_0(x) = 0, \qquad (2)$$

которое будем называть характеристическим уравнением типа Риккати. Здесь $[p+r(x)]^{k} \cdot r(x)$ означает последовательное применение k раз оператора $[p+r(x)]$, $p = \dfrac{d}{dx}$ к функции *r(x)*.

Под решениями (классическими) уравнений (1) и (2) будем понимать функции $y(x) \in C^{n}(a,b)$, $r(x) \in C^{n-1}(a,b)$, удовлетворяющие



соответственно уравнениям (1) и (2). Позже введем понятие ослабленного решения уравнения (2).

В дальнейшем понадобится известная связь уравнений (1) и (2), которую сформулируем в виде леммы.

**Лемма 1.** Линейное дифференциальное уравнение (1.1) заменой неизвестной функции

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} r(t)dt}, \quad x_0 \in (a,b)$$

приводится к характеристическому уравнению типа Риккати (2). И наоборот, характеристическое уравнение *(n-1)*-го порядка типа Риккати при замене

$$r(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}, \qquad y(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b),$$

переходит в линейное однородное дифференциальное уравнение (1).

Лемма 2. Пусть $y(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,c) \cup (c,b)$ решение линейного дифференциального уравнения (1) имеет в точке $c \in (a,b)$, $c \neq x_0$ нуль порядка $k \ (1 \leq k \leq n-1)$.

Тогда функция

$$r(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}$$

имеет при $x \to c$ асимптотику

$$r(x) \sim \frac{k}{x-c}, \ 1 \leq k \leq n-1 \qquad (3)$$

Обратно, если *r(x)* – решение характеристического уравнения типа Риккати (2), определенное в выколотой окрестности *S* точки $c \in (a,b)$ и имеющее асимптотику (3), тогда функция

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} r(t)d}, \quad x_0 \in (a,b)$$

является решением линейного дифференциального уравнения (1) и имеет в точке $x = c$ нуль порядка *k*.

**Определение.** Функция *r(x)* называется ослабленным решением характеристического уравнения *(n-1)*-го порядка типа Риккати (2) на конечном *(a,b)*, если существует конечное или пустое множество $\sum$ точек $c_1 < c_2 < \ldots < c_q$; $c_\nu \in (a,b)$, $c_\nu \neq x_0$, $\nu = 1,2,\ldots,q$, таких, что:

1. На интервалах $(a,c_1),(c_1,c_2),...,(c_q,b)$ функция $r(x)$ является классическим решением этого уравнения.

2. При $x \to c_\nu$, $\nu = 1,2,...,q$ для $r(x)$ имеет место асимптотика (3)

$$r(x) \sim \frac{k_\nu}{x-c_\nu}, \quad 1 \le k_\nu \le n-1.$$

В случае $\sum = \varnothing$ ослабленное решение совпадает с классическим.

Предположим, что $m$ решений характеристического уравнения типа Риккати (2) имеют асимптотику в виде (3), т.е.

$$r_\chi(x) = \frac{k_{\chi\nu}}{x-c_{\chi\nu}} + \tilde{r}_\chi(x), \ \chi = 1,2,...,m; \ c_{\chi\nu} \in \sum, \ c_{\chi\nu} \ne x_0,$$

а остальные решения - гладкие функции на $(a,b)$. Тогда решения $y_\chi(x)$ линейного дифференциального уравнения (1) на основе леммы - 2 представляются в виде

$$y_\chi(x) = \left(\frac{x-c_{\chi\nu}}{x_0-c_{\chi\nu}}\right)^{k_{\chi\nu}} e^{\int_{x_0}^{x} \tilde{r}(t)dt},$$

где натуральные числа $k_{\chi\nu}$ - порядки соответствующих нулей.

**Лемма 3.** Пусть $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ - фундаментальная система решений линейного дифференциального уравнения (1), а $r_1(x), r_2(x),..., r_n(x)$ - решения характеристического уравнения типа Риккати (2):

$$r_i(x) = \frac{y_i'(x)}{y_i(x)}, \quad i = 1,2,...,n, \quad x \in \Omega.$$

Тогда определитель

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ r_1(x) & \dots & r_n(x) \\ [P+r_1(x)]r_1(x) & \dots & [P+r_n(x)]r_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [P+r_1(x)]^{n-2} r_1(x) & \dots & [P+r_n(x)]^{n-2} r_n(x) \end{vmatrix} \ne 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

где $\Omega = \{x \in (a,b) : y_i(x) \ne 0, i = 1,2,...,n\}$ или $\Omega = (a,b) \setminus \sum$. Обратно, пусть $r_1(x), r_2(x),..., r_n(x)$ - ослабленные решения характеристического уравнения типа Риккати (2) и такие, что $D(x) \ne 0, \quad \forall x \in \Omega$. Тогда функции



$$y_i(x) = e^{\int_{x_0}^{x} r_i(t)dt}, \quad i = 1,2,...,n$$

являются фундаментальной системой решений линейного дифференциального уравнения (1).

Пусть в окрестности точки $x = 0 \in (a,b)$ функция $r_0(x)$ *(n-1)* раз непрерывно дифференцируема и является классическим решением уравнения (2).

**Определение.** Будем говорить, что характеристическое уравнение *(n-1)*-го порядка типа Риккати имеет классическое решение кратности k (1≤k≤n), если его ослабленными решениями являются функции

$$r_0(x) + \frac{\nu}{x}, \ \nu = 0,1,...,k-1.$$

**Лемма 4.** Пусть характеристическое уравнение *(n-1)*-го порядка типа Риккати (2) имеет классическое решение $r_0(x)$ кратности $k$, тогда функции

$$y_k = x^\nu y_0(x), \ \nu = 0,1,...,k-1,$$

где

$$y_0(x) = \exp \int_{x_0}^{x} r_0(t)dt,$$

являются линейно независимыми решениями однородного линейного дифференциального уравнения (1).

**Теорема.** Пусть характеристическое уравнение *(n-1)*-го порядка типа Риккати имеет в окрестности точки x=0 различные классические решения $r_1(x), r_2(x),..., r_l(x)$ соответствующих кратностей $k_1, k_2,..., k_l$, причем $\sum_{j=1}^{l} k_j = n$. Если для решений $r_j(x) + \frac{\nu_j}{x}, \ j = 1,2,...,l; \ \nu_j = 0,1,...,k_j - 1, \ D(x) \ne 0 \ \ \forall x \in (a,b)$, то функции

$$y_{j\nu_j} = x^{\nu_j} e^{\int_{x_0}^{x} r_j(t)dt}, \quad j = 1,2,...,l; \ \nu_j = 0,1,...,k_j - 1$$

образуют фундаментальную систему решений линейного дифференциального уравнения (1).

Полученный результат является обобщением случая кратных корней характеристических уравнений для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами .

<u>Пример.</u> Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение специального вида

$$[p+a(x)]^n y=0, \tag{4}$$

где $a(x)\in C^{n-1}(a,b)$. Это уравнение можно расписать в виде

$$[p+a(x)]^n y = y^{(n)} + C_n^1 y^{(n-1)}a(x) + C_n^2 y^{(n-2)}[p+a(x)]a(x)+\ldots+$$
$$+C_n^k y^{(n-k)}[p+a(x)]^{k-1}a(x)+\ldots+C_n^{n-1}y'[p+a(x)]^{n-2}a(x)+$$
$$+y[p+a(x)]^{n-1}a(x)=0.$$

Тогда данному линейному уравнению соответствует характеристическое уравнение *(n-1)*-го порядка типа Риккати

$$\begin{aligned}&(p+r)^{n-1}r + C_n^1 a(x)(p+r)^{n-2}r + C_n^2[p+a(x)]a(x)(p+r)^{n-3}r+\\ &+\ldots+C_n^k[p+a(x)]^{k-1}a(x)(p+r)^{n-k-1}r+\ldots+\\ &+C_n^{n-1}[p+a(x)]^{n-2}a(x)r+[p+a(x)]^{n-1}a(x)=0.\end{aligned} \tag{5}$$

Заметим, что функция $r(x)=-a(x)$ удовлетворяет характеристическому уравнению типа Риккати. Отыскивая решение уравнения (5) в виде

$$r(x)=-a(x)+\frac{v}{x},\ \ x\neq 0,$$

после уничтожения соответствующих членов в левой части уравнения (5) остаются $\left(p+\frac{v}{x}\right)^{n-1}\frac{v}{x}=0.$

Или расписав его, получим

$$\frac{v(v-1)(v-2)\cdot\ldots\cdot(v-n+1)}{x^n}=0.$$

Таким образом, ослабленными решениями характеристического уравнения типа Риккати (5) являются функции

$$r(x)=-a(x)+\frac{v}{x},\ \ v=0,1,\ldots,n-1.$$

Тогда на основании теоремы фундаментальной системой решений линейного дифференциального уравнения (4) являются



$$y_v(x)=x^v e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt},\ \ v=0,1,\ldots,n-1.$$

Таким образом ,благодаря исследованию нелинейного уравнения найдены кратные решения и построена ФСР для ЛДУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. АсланянА.Г.,Буренков В.И.Об одной задаче Н.П.Еругина об интегрируемости в квадратурах системы обыкновенных дифференциаль-ных уравнений//Диф.уравнения.1967,№5.с.811-819.

2. Еругин Н.П. Приводимые системы//Труды Матем.института им.В.А.Стеклова,т.13,Из-во АН СССР,М-Л,1946,96 с.

3. Мкртумян Р.Р. Об одном случае интегрируемости линейного уравнения второго порядка//Диф.уравнения.1979,т.15,№3,с.555-559.

4. Мурядян М.Г.,Енгибарян Н.Б. Линейные дифференциальные уравнения Риккати//ДАН СССР,1977,т.235,№2,с.263-265.

5. Прикарпатский А.К.Об уравнениях Риккати,интегрируемых в квадратурах//ДАН СССР,1980,т.251,№5,1072-1077.

6.Эйлер Л.Интегральное исчисление.в 3-х томах,М.:Гостехиздат т.2, 1957, 368 с.

7.Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения,в 2 томах,М.:ИЛ,1953,т.1, 346 с.,ИЛ,1954,т.2, 414 с.

8.Хасеинов К.А.Решение линейных дифференциальных уравнений *n*-го порядка с переменными коэффициентами на основе обобщенной формулы// Изв.вузов,сер.Математика,1977,№9(184),с.89-99.

9.Треногин В.А.,Хасеинов К.А.Фундаментальная система решений при кратных решениях характеристического уравнения типа Риккати//Тезисы докл.7 Респ.межвуз.науч.конф.по математике и механике, Алма-Ата, 1984, с.104.

10.Хасеинов К.А.Начальная и многоточечная задачи для линейных дифференциальных уравнений и характеристические уравнения типа Риккати:Автореф.дис. …канд.физ-мат.наук.Москва,1984, 114 с.

***Түйіндеме***

*СДТ-дің n-тәртібіндегі ауыспалы коэффиценттер мен (n-1)-тәртібіндегі Рикатти типіндегі сипаттамалық теңдеулерімен байланысы зерттелген. Ситаттамалы теңдеудің еселенген шешімдері зерттелген.*

***Resume***

*It was researched connection of LDE with variable coefficients of nth order and secular equations of Riccati type ( n-1) order. This article explored multiple solutions of secular equations.*

УДК 517.927

# АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ П-ГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

*К.А. Хасеинов*

*Казахский Национальный технический университет имени К.И.Сатпаева*

В статье исследуются и изучаются вместо линейных дифференциальных уравнений (ЛДУ) с переменными коэффи-циентами соответствующие уравнения типа Риккати,которые играют такую же роль ,как и характеристическое уравнение при интегри-ровании ЛДУ с постоянными коэффициентами. Установлена некото-рая аналогия проблем интегрирования ЛДУ в квадратурах с пробле-мой решения алгебраических уравнений в радикалах[ 1;2].

Характеристическое уравнение *(n-1)* -го порядка типа Риккати

$$[p+r(x)]^{n-1} r(x) + b_{n-1}(x)[p+r(x)]^{n-2} r(x) + \\ + \ldots + b_1(x) r(x) + b_0(x) = 0. \qquad (1)$$

содержит неизвестную функцию *r(x)* в *n*-ой степени ,тогда оно имеет ровно *n* «корней», т.е.решений ,среди которых естественно , как част-ные случаи ,могут быть и постоянные числа.То есть ЛДУ с перемен-ными коэффициентами имеет решение вида exp [ 3].

Действительно,часто встречаются линейные дифференциальные урав-нения с переменными коэффициентами

$$y^{(n)} + b_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + b_1(x) y' + b_0(x) y = 0, \; b_{i-1}(x) \in C(a,b),$$

которые имеют одно (или несколько) решение вида $e^{\lambda x}$. В этом случае одним частным решением характеристического уравнения *(n-1)*-го порядка типа Риккати является постоянная $r_1(x) = \lambda = const.$ Постоянная λ может быть и комплексной. В это категорически не поверили ленинградские математики в 1979 году на допзащите моей первой кандидатской диссертации. Поэтому в конце статьи приведена дюжина примеров .Относительно выделяемых уравнений доказана

**Теорема 1.** Для того чтобы линейное дифференциальное уравнение (2) имело решение вида $e^{\lambda x}$, необходимо и достаточно чтобы число λ



удовлетворяло характеристическому уравнению (1), при этом уравнение (2) приводится к виду

$$(y' - \lambda y)^{(n-1)} + [\lambda + b_{n-1}(x)](y' - \lambda y)^{(n-2)} + \\ + [\lambda^2 + b_{n-1}(x)\lambda + b_{n-2}(x)](y' - \lambda y)^{(n-3)} + \ldots + [\lambda^{n-2} + b_{n-1}(x)\lambda^{n-3} + \\ + \ldots + b_3(x)\lambda + b_2(x)](y' - \lambda y)' + \\ + [\lambda^{n-1} + b_{n-1}(x)\lambda^{n-2} + \ldots + b_2(x)\lambda + b_1(x)](y' - \lambda y) = 0.$$

**Доказательство. Необходимость.** Предположим, что частным решением уравнения (2) является $y = e^{\lambda x}$, т.е. $r_1(x) = \lambda$. Подставляя $e^{\lambda x}$ в (2) и сокращая на экспоненту, получим

$$\lambda^n + b_{n-1}(x)\lambda^{n-1} + \ldots + b_1(x)\lambda + b_0(x) = 0, \qquad (4)$$

что и требовалось доказать.

**Достаточность.** Пусть выполнено условие (4), умножим его почленно на $e^{\lambda x}$. Зная формулу *k*-й производной экспоненты, убедимся, что функция $y(x) = e^{\lambda x}$ удовлетворяет уравнению (2).

Теперь найдем новые коэффициенты пониженного на порядок уравнения, т.е. преобразуем дифференциальное уравнение (2) к доказываемому виду (3). Для этого подставим вместо $b_0(x)$ в уравнение (2) его значение из (4)

$$y^{(n)} + b_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + b_2(x) y'' + b_1(x) y' - \\ - \lambda y \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\lambda^{i-1} = 0, \; b_n(x) = 1 \;\; \forall x \in (a,b).$$

В уравнении прибавим и отнимем выражение

$$y' \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\lambda^{i-1},$$

тогда имеем

$$y^{(n)} + b_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + b_2(x) y'' + b_1(x) y' - y' \sum_{i=2}^{n} b_i(x)\lambda^{i-1} - \\ - b_1(x) y' + y' \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\lambda^{i-1} - \lambda y \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\lambda^{i-1} = 0.$$

Уничтожая члены $b_1(x) y'$ вынесем λ за знак первой суммы, далее группируя вторую и третью суммы, приведем уравнение к виду

$$y^{(n)}+b_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+b_3(x)y'''+b_2(x)y''-\lambda y'\sum_{i=2}^{n}b_i(x)\lambda^{i-2}+$$
$$+(y'-\lambda y)\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\lambda^{i-1}=0.$$

В приведенном уравнении добавляя и вычитая выражение

$$y''\sum_{i=2}^{n}b_i(x)\lambda^{i-2},$$

получим

$$y^{(n)}+b_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+b_3(x)y'''+b_2(x)y''-y''\sum_{i=2}^{n}b_i(x)\lambda^{i-2}-$$
$$-b_2(x)y''+y''\sum_{i=2}^{n}b_i(x)\lambda^{i-2}-\lambda y'\sum_{i=2}^{n}b_i(x)\lambda^{i-2}+(y'-\lambda y)\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\lambda^{i-1}=0.$$

Уничтожая члены $b_2(x)y''$, вынесем λ за знак первой суммы, далее группируя вторую и третью суммы и подводя под знак производной, преобразуем уравнение к виду

$$y^{(n)}+b_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+b_4(x)y^{(4)}+b_3(x)y'''-\lambda y''\sum_{i=3}^{n}b_i(x)\lambda^{i-3}-$$
$$+(y''-\lambda y')\sum_{i=2}^{n}b_i(x)\lambda^{i-2}+(y'-\lambda y)\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\lambda^{i-1}=0$$

и т.д.

Проделав эту операцию вышеуказанным способом *(n-1)* раз, и получим уравнение (3).

**Следствие 1.** Для того чтобы уравнение (2) имело решение вида $e^{\lambda x}$, необходимо существование таких ненулевых чисел $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}$, чтобы выполнялось условие

$$b_0(x)+\alpha_1 b_1(x)+\ldots+\alpha_{n-1}b_{n-1}(x)=const\neq 0. \qquad (5)$$

**Доказательство** очевидное. Это условие тем примечательно, что по коэффициентам дифференциального уравнения можно легко определить, будет ли оно иметь частное решение вида $e^{\lambda x}$.

**Следствие 2**. Если алгебраическое уравнение n-го порядка

$$r^n+b_{n-1}r^{n-1}+b_{n-2}r^{n-2}+\ldots+b_1 r+b_0=0$$

имеет корень λ, то оно представляется в виде



$$(r-\lambda)[r^{n-1}+(\lambda+b_{n-1})r^{n-2}+(\lambda^2+b_{n-1}\lambda+b_{n-2})r^{n-3}+\ldots+$$
$$+(\lambda^{n-2}+b_{n-1}\lambda^{n-3}+b_{n-2}\lambda^{n-4}+\ldots+b_3\lambda+b_2)r+$$
$$+(\lambda^{n-1}+b_{n-1}\lambda^{n-2}+b_{n-2}\lambda^{n-3}+\ldots+b_2\lambda+b_1)]=0. \qquad (6)$$

Доказывается подобно теореме прибавлением и вычитанием выражений, в которых вместо производных $y^{(k)}(x)$ берется степень $r^k$.

**Теорема 2.** Если характеристическое уравнение

$$r^n(x)+b_{n-1}(x)r^{n-1}(x)+\ldots+b_1(x)r(x)+b_0(x)=0 \qquad (7)$$

имеет *(n-1)* постоянных корней $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}$, и функциональный корень $\lambda(x)$, то дифференциальное уравнение (2) перейдет в неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+\ldots+a_1y'+a_0y=C_n\exp\int_{x_0}^{x}\lambda(t)dt, \qquad (8)$$

где

$$a_0=(-1)^{n-1}\lambda_1\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_{n-1},$$
$$a_1=(-1)^{n-2}(\lambda_1\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_{n-2}+\lambda_1\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_{n-3}\lambda_{n-1}+\ldots+\lambda_2\lambda_3\cdot\ldots\cdot\lambda_{n-1}),$$

...........................................................................................................

$$a_{n-2}=-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}).$$

Представляет определенную трудность решение функционального алгебраического уравнения (7) и особенно преобразование и выде-ление постоянных корней, существование которых предполагается. Поэтому необходимо упростить процесс нахождения корней. Предположим существование решения ЛДУ с переменными коэффициентами в виде $e^{\lambda x}$. Уравнение (7) справедливо для $\forall\ x\in(a,b)$.

Для нахождения его постоянных корней нужно рассмотреть алгебраическое уравнение, полученное из (1) при $x=x_1\in(a,b)$, т.е.

$$r^n+b_{n-1}(x_1)r^{n-1}+\ldots+b_1(x_1)r+b_0(x_1)=0,$$

которое в свою очередь имеет *n* корней, а само уравнение (7) имеет постоянных корней меньше из-за переменности коэффициентов дифференциального уравнения (2). Чтобы из множества найденных постоянных корней определить решение алгебраического функционального уравнения (7) нужно брать *n* точек интервала *(a,b)*. На самом деле, запишем уравнение (7) в различных точках для решения $\lambda_1$:

$$\begin{cases} \lambda_1^n + b_{n-1}(x_1)\lambda_1^{n-1} + \ldots + b_1(x_1)\lambda_1 = -b_0(x_1), \\ \lambda_1^n + b_{n-1}(x_2)\lambda_1^{n-1} + \ldots + b_1(x_2)\lambda_1 = -b_0(x_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^n + b_{n-1}(x_n)\lambda_1^{n-1} + \ldots + b_1(x_n)\lambda_1 = -b_0(x_n). \end{cases}$$

Полученная система *n* уравнений относительно *n* чисел $\lambda_1^n$, $\lambda_1^{n-1}$,…, $\lambda_1$, имеет единственное решение в случае отличия от нуля определителя системы.

Первый метод. Чтобы определить частные решения ЛДУ (2), необходимо найти постоянные корни уравнения (7), предварительно записав его в удобной для расчета точке $x_1$ (например, $b_0(x_1) = 0$ или $b_0(x_1) = b_1(x_1) = \ldots = b_k(x_1) = 0$ . Из постоянных корней нужно выбрать те $\lambda_j$, которые удовлетворяют функциональному уравнению (7), тогда решениями будут функции $y_j = e^{\lambda_j x}$ [4].

Второй метод. Записав функциональное алгебраическое уравнение (7) в *n* точках $x_\nu \in (a,b)$, $\nu = 1,2,\ldots,n$, найдем корни полученных уравнений. Если среди множества этих чисел есть такие, которые являются корнями одновременно всех уравнений, то они могут быть решениями функционального уравнения (7), т.е. функции $y_j(x) = e^{\lambda_j x}$ суть частные решения ЛДУ с переменными коэф-фициентами (2).

**Случаи существования среди переменных корней $r_j(x)$ алгебраического функционального уравнения постоянных $r_k = const$ косвенно рассмотрены в работах [5].**

1. $y'' + \frac{a}{x^2} \cdot y' - \left(b^2 + \frac{ab}{x^2}\right) y = 0, \; x \neq 0, \quad y_1(x) = e^{bx}$
2. $y'' - xy' + (x-1)y = 0, \quad y_1(x) = e^x$ 3.
3. $4xy'' + 4y' - (x+2)y = 0, \; y_1(x) = e^{\frac{x}{2}}$
4. $(x - x^2)y'' + (3x - 2x^2)y' + 2xy = 0, \quad y_1 = e^{-2x}$
5. $y'' + y' \cdot \mathrm{tg}\, x - (\alpha \mathrm{tg} x + \alpha^2)y = 0, \quad y_1(x) = e^{\alpha x}$
6. $y''' - \frac{2x}{x^2+2} y'' - y' + \frac{2x}{x^2+2} y = 0, \quad y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x}$
7. $(x^2 - 2x + 3)y''' - (x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y = 0,$ $y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-2x}$



8. $y''' - \frac{1}{x} y'' + y' - \frac{1}{x} y = 0, \quad r(x) = \pm i, \quad y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x$
9. $y''' - y'' \cdot \mathrm{ctg} 3x + 4y' - 4y \cdot \mathrm{ctg} 3x = 0,$ $r(x) = \pm 2i, \quad y_1 = \cos 2x, \quad y_2 = \sin 2x$
10. $y''' - (x^2 - 4)y'' + (5 - 4x^2)y' + 5x^2 y = 0,$ $r(x) = 2 \pm i, \quad y_1 = e^{2x} \cdot \cos x, \quad y_2 = e^{2x} \cdot \sin x$

Таким образом ,разработан и обоснован метод интегрирования одного класса ЛДУ *n*-го порядка с переменными коэффициентами при наличии постоянных корней характеристического уравнения типа Риккати *(n-1)*-го порядка.Показана методика нахождения постоянных корней упомянутого уравнения,переходящегося в алгебраическое функциональное уравнение,коэффициенты которого нужно брать в какой-либо точке или в различных точках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Trenogin V.A.,Khasseinov K.A. Nonlocal Problems for DE and it's dual Problems//Abstr.of Plenary and Ynvitead Leactures,deliv. an the 2 Cong. ISAAC,Fukuoka,Yapan,August 16-21,1999.

2. Богаевский В.Н.Повзнер А.Я. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений.М.:Наука,1987,255 с.

3. Хасеинов К.А.Новые классы характеристических уравнений Риккати,разрешаемых в квадратурах//Тезисы докл.5-ой Казах.межвуз. науч. конф.по мат. и мех.Алма-Ата:Изд-во КазГУ,1974,с.97-99

4. Хасеинов К.А.Задачи и упражнения по инженерной математике( с индивидуальными заданиями)Алматы,КазНТУ МОН РК,2009,631 с.

5. Куликов Н.К.Обобщенная формула для представления функций. М.:МТИПП,1974, 127 с.

***Түйіндеме***

*(n-1) тәртібіндегі Рикатти типіндегі сипаттамалық теңдеулерін зерттеуде ауыспалы коэффиценттерімен СДТ-дің exp ax шешімдерінің бар жағдайлары анықталды. Тұрақты түбірлерін табудың екі амалы келтірілген.*

***Resume***

*Through research of secular equations of Riccati type (n-1) order it was determined cases of existence of exp ax-type solutions in LDE with variable coefficients. This article offers two ways of determination permanent roots.*

УДК 517.927

# ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РИККАТИ В ВИДЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ

**К.А. Хасеинов**
*Казахский Национальный технический университет имени К.И.Сатпаева*

В столь классической компактной записи линейных диффере-нциальных уравнений (ЛДУ) почти невозможно заметить какой-либо прямой метод или предвидеть целевой подход к решению его. Нелинейность и «шероховатость» характеристического уравнения типа Риккати [1] позволяют «зацепиться»и выудить новые классы ЛДУ с переменными коэффициентами, которые можно решить и найти новые методы интегрирования .Доказана связь между ЛДУ n-го порядка и алгебраическим функциональным уравнением n-ой степени. В работе [2;3] характеристическое уравнение типа Риккати *(n-1)*-го порядка представляется как алгебраическое уравнение *n*-ой степени относительно функции *r(x)* с коэффициентами,зависящими от ее производных и коэффициентов ЛДУ ,изложен итерационный метод приближенного вычисления его корней.

Из существования аналогии между проблемами интегрирования ЛДУ в квадратурах и решения алгебраических уравнений в радикалах и на основе изучения свойств последних в статье найдено одно специальное дифференциальное уравнение.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}+b_{n-1}(x)y^{(n-1)}+...+b_1(x)y'+b_0(x)y=0 \qquad (1)$$

с непрерывными коэффициентами на *(a,b)*. Пусть коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям

$$b_k(x)=b_{n-k}(x) \qquad \forall x\in(a.b).\ k=0.1.\dots.n.$$
$$b_0(x)=b_n(x)\equiv 1. \qquad (2)$$

тогда получим линейное уравнение

$$y^{(n)}+b_1(x)y^{(n-1)}+b_2(x)y^{(n-2)}+...+b_2(x)y''+b_1(x)y'+y=0 \qquad (3)$$

По аналогии с алгебраическим уравнением полученное (3) назовем возвратным дифференциальным уравнением *n*-го порядка. Сформулируем некоторые его свойства.



**Теорема 1.** Если возвратное дифференциальное уравнение (3) имеет частное решение $y_1(x)=e^{\alpha x}$, $\alpha\neq 0$, то функция $y_2(x)=e^{\frac{1}{\alpha}x}$ также является его решением.

**Доказательство.** В случае наличия решения вида $y=e^{\lambda x}$ линейному возвратному уравнению (3) соответствует характери-стическое уравнение

$$\lambda^n+b_1(x)\lambda^{n-1}+b_2(x)\lambda^{n-2}+...+b_2(x)\lambda^2+b_1(x)\lambda+1=0. \qquad (4)$$

Так как по предположению существует решение возвратного дифференциального уравнения $y_1(x)=e^{\alpha x}$, тогда $\lambda=\alpha$ удовлетворяет уравнению (4), т.е.

$$\alpha^n+b_1(x)\alpha^{n-1}+b_2(x)\alpha^{n-2}+...+b_2(x)\alpha^2+b_1(x)\alpha+1=0.$$

Подставив в уравнение (4) значение $\lambda=\frac{1}{\alpha}$ и приведя к общему знаменателю $\alpha^n$, получим

$$1+b_1(x)\alpha+b_2(x)\alpha^2+...+b_2(x)\alpha^{n-2}+b_1(x)\alpha^{n-1}+\alpha^n=0,$$

что совпадает с предыдущим условием, и это доказывает теорему.

**Следствие 1**. Возвратное дифференциальное уравнение второго порядка с переменным коэффициентом $b_1(x)\equiv 0$

$$y''+b_1(x)y'+y=0 \qquad (*)$$

не имеет решения экспоненциального вида $y(x)=e^{\lambda x}$.

Если функция $y=e^{\lambda x}$ являлась бы решением, то выполнялось бы

$$\lambda^2+b_1(x)\lambda+1=0,$$

откуда следует, что коэффициент

$$b_1(x)=-\frac{\lambda^2+1}{\lambda}=const,$$

а это противоречит условию.

**Следствие 2.** Если $y_1(x)=\exp\int_{t_0}^{x} r_1(t)dt$, где $r_1(x)\neq 0 \ \ \forall x\in (a,b)$, частное решение возвратного уравнения (*), то функция $y_2(x)=\exp\left[-\int_{t_0}^{x}\frac{1}{r_1(t)}dt\right]$ является решением другого возвратного уравнения второго порядка

$$y''(x)-b_1(x)y'(x)+y(x)=0.$$

Действительно, так как $y_1(x)$ решение уравнения (*), то $r_1(x)$ удовлетворяет характеристическому уравнению Риккати

$$r_1'(x)+r_1^2(x)+b_1(x)r_1(x)+1=0.$$

Разделим его на $r_1^2(x)$ и преобразуем к виду

$$\left(-\frac{1}{r_1(x)}\right)'+\left(-\frac{1}{r_1(x)}\right)^2-b_1(x)\left(-\frac{1}{r_1(x)}\right)+1=0.$$

А это значит, что функция

$$y_2(x)=\exp\left[-\int_{t_0}^{x}\frac{1}{r_1(t)}dt\right]$$

является решением указанного возвратного дифференциального уравнения.

**Теорема 2.** Возвратное дифференциальное уравнение нечетного порядка имеет частное решение $y_1(x)=e^{-x}$ и заменой $y'+y=u(x)$ приводится к возвратному уравнению на порядок ниже.

**Доказательство.** Пусть $n=2k+1,\ k=0,1,2,\dots$. Подставим функцию $y_1(x)=e^{-x}$ в левую часть уравнения (3). Тогда вынося экспоненту за скобку, получим

$$e^{-x}[(-1)^{2k+1}+b_1(x)(-1)^{2k}+b_2(x)(-1)^{2k-1}+\dots+b_k(x)(-1)^{k+1}+$$
$$+b_k(x)(-1)^{k}+\dots+b_2(x)(-1)^2+b_1(x)(-1)+1]=0,$$

ибо члены в квадратных скобках взаимно уничтожаются. Тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Для того, чтобы доказать вторую часть утверждения, восполь-зуемся теоремой о том, что уравнение (3), имеющее решение , приводится к виду



$$(y'-\lambda y)^{(n-1)}+[\lambda+b_{n-1}(x)](y'-\lambda y)^{(n-2)}+$$
$$+[\lambda^2+b_{n-1}(x)\lambda+b_{n-2}(x)](y'-\lambda y)^{(n-3)}+\dots+[\lambda^{n-2}+b_{n-1}(x)\lambda^{n-3}+$$
$$+\dots+b_3(x)\lambda+b_2(x)](y'-\lambda y)'+$$
$$+[\lambda^{n-1}+b_{n-1}(x)\lambda^{n-2}+\dots+b_2(x)\lambda+b_1(x)](y'-\lambda y)=0. \qquad (5)$$

Так как $y_1(x)=e^{-x}$ является частным решением возвратного дифференциального уравнения нечетного порядка, то, подставляя в (5) значение λ=-1, с учетом (2) имеем

$$(y'+y)^{(2k)}+[-1+b_1(x)](y'+y)^{(2k-1)}+[(-1)^2+b_1(x)(-1)+b_2(x)](y'+y)^{(2k-2)}+$$
$$+\dots+[(-1)^k+b_1(x)(-1)^{k-1}+\dots+b_k(x)](y'+y)^{(k)}+[(-1)^{2k-2}+b_1(x)(-1)^{2k-3}+\dots+$$
$$+b_4(x)(-1)+b_3(x)](y'+y)''+[(-1)^{2k-1}+b_1(x)(-1)^{2k-2}+\dots+b_3(x)(-1)+$$
$$+b_2(x)](y'+y)'+[(-1)^{2k}+b_1(x)(-1)^{2k-1}+\dots+b_2(x)(-1)+b_1(x)](y'+y)=0.$$

Нетрудно заметить, что в квадратных скобках при (y' + y)' члены уничтожаются и остается $[-1+b_1(x)]$, а при (y' + y) коэффициент будет равен единице.

Таким образом, получим

$$u^{(2k)}+[-1+b_1(x)]u^{(2k-1)}+[1-b_1(x)+b_2(x)]u^{(2k-2)}+$$
$$+\dots+[(-1)^k+b_1(x)(-1)^{k-1}+\dots+b_k(x)]u^{(k)}+\dots+ \qquad (6)$$
$$+[1-b_1(x)+b_2(x)]u''+[-1+b_1(x)]u'+u=0,$$

где $u=y'(x)+y(x)$.

Полученное дифференциальное уравнение на порядок ниже и есть вовратное.

**Теорема 3.** Линейное уравнение второго порядка (3.21) с коэф-фициентом $b_0(x)>0\ \ \forall x\in(a,b)$ приводится подстановкой $t=\int_{x_0}^{x}\sqrt{b_0(s)}ds$ к возвратному дифференциальному уравнению.

**Доказательство.** Пусть дано уравнение

$$y''(x)+b_1(x)y'(x)+b_0(x)y(x)=0,\ \ b_0(x)>0.$$

Делая в нем замену независимой переменной *t =t(x)*, получим

$$y''_{t^2} + \frac{t''_{x^2} + b_1(x)t'_x}{(t'_x)^2} y'_t + \frac{b_0(x)}{(t'_x)^2} y = 0 \qquad (7)$$

Уравнение (7) будет возвратным тогда и только тогда, когда $\frac{b_0(x)}{(t'_x)^2} = 1$,

откуда $t = \int_{x_0}^{x} \sqrt{b_0(s)}\,ds$ $b_0(s) > 0.$ ,

Подставляя найденную функцию t(x) в уравнение (7), получим искомое возвратное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''_{t^2} + \frac{1}{b_0(x)}\left[\left(\sqrt{b_0(x)}\right)' + b_1(x)\sqrt{b_0(x)}\right] y'_t + y = 0.$$

Таким образом ,путем исследования характеристического уравнения типа Риккати и , связывая его с алгебраическим,получено возвратное ЛДУ с переменными коэффициентами ,установлены его свойства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Reid W.T. Riccati differential eguations.N.Y.:London:Acad.Press,1972, 216 c.

2. Михайлов Ф.А. и др. Динамика непрерывных линейных систем с детерминированными и случайными параметрами.М.:Наука,1979,561с

3. Хасеинов К.А. Решение одного класса линейных дифферен-циальных уравнений n-го порядка //Некоторые вопросы функцио-нального анализа , дифференциального уравнения и их приложе-ния.Алма-Ата,1985,с.90-98.

**Түйіндеме**

*Алгебралық теңдеулермен аналогия бойынша ауыспалы коэффиценттермен өздік диффереациалды теңдеулер түсінігі енгізілген. Оның жаңа қасеттері белгіленген.*

**Resume**

*Analogously with algebraic equations it was introduced concept of reciprocal differential equations with variable coefficients. New peculiarities were established in this article.*



## НАШИ АВТОРЫ

***Алинова Мансия Шарапатовна*** – д.п.н., профессор, кафедра физики и приборостроения, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

***Ахметов Ринат*** - магистрант, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

***Байгулова Гульзира Сапаргалиевна*** – магистрант, кафедра физики и приборостроения, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

***Дроботун Борис Николаевич*** – член корреспондент АПН РК, к.ф.-м.н., д.п.н., профессор ККСОН, кафедра математики, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

***Мозговая Ольга Игоревна*** – магистрант, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

***Дубинец Наталья Александровна*** - магистрант, кафедра информатики и информационных систем, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

***Жұмагалиева Айсулу Елтаевна*** - .к.ф.-м.н, доцент, кафедра физики и математики, Западно-Казахстанский государственный университет имени М. Утемисова.

***Жакиева Светлана Сундетовна*** - магистрант, Западно-Казахстанский государственный университет имени М. Утемисова.

***Касымов Едиль Абдыкалыкович -*** к.ф.-м.н., профессор, кафедра математики, Казахский Национальный Технический Университет имени К.И. Сатпаева, г. Алматы

***Муканова Жазира Гафуровна*** - к.п.н., доцент (ВАК), Павлодарский государственный педагогический институт, г. Павлодар.

***Смагулова Алия Муратовна*** - магистрант, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

***Испулов Нурлыбек Айдаргалиевич*** - к.ф.-м.н., доцент ПГУ, декан факультета физики, математики и информационных технологии, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар

***Оспанова Жулдуз Джумагалиевна*** - магистрант, кафедра физики и приборостроения, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

***Таймуратова Лидия Унгарбаевна*** - к.ф.-м.н., ст. преподаватель, кафедра физики и информатики, Каспийский государственный университет технологий и инжиниринга имени Ш. Есенова, г. Актау.

***Украинец Виталий Николаевич*** – д.т.н., профессор, кафедра БЖД и ЗОС, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

***Алигожина Дина Амангельдыевна*** – преподаватель кафедры БЖД и ЗОС, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

***ЖакияноваАйгеримХасеновна*** – магистрант, кафедра БЖД и ЗОС, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, г. Павлодар.

***Хасеинов Казбек Акбарович -*** к.ф.-м.н.; Ph.D., профессор, академик Международной академии информатизации, профессор кафедра математики, Казахский национальный технический университет имени К.И. Сатпаева, г. Алматы



# ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

(“Вестник ПГУ”, “Наука и техника Казахстана”, “Өлкетану-Краеведение”)

1. В журналы принимаются рукописи статей по всем научным направлениям в 1 экземпляре, набранные на компьютере, напечатанные на одной стороне листа с полуторным межстрочным интервалом, с полями 3 см со всех сторон листа и дискета со всеми материалами в текстовом редакторе “Word 7,0 (`97, 2000) для Windows”.

2. Общий объем рукописи, включая аннотацию, литературу, таблицы и рисунки, не должен превышать **8-10 страниц.**

3. Статья должна сопровождаться рецензией доктора или кандидата наук для авторов, не имеющих ученой степени.

4. Статьи должны быть оформлены в строгом соответствии со следующими правилами: - УДК по таблицам универсальной десятичной классификации;

- название статьи: кегль -14 пунктов, гарнитура - **Times New Roman Cyr** (для русского, английского и немецкого языков), **KZ Times New Roman** (для казахского языка), заглавные, жирные, абзац центрованный;

- инициалы и фамилия(-и) автора(-ов), полное название учреждения: кегль - 12 пунктов, гарнитура - Arial (для русского, английского и немецкого языков), KZ Arial (для казахского языка), абзац центрованный;

- аннотация на казахском, русском и английском языках: кегль - 10 пунктов, гарнитура - Times New Roman (для русского, английского и немецкого языков), KZ Times New Roman (для казахского языка), курсив, отступ слева-справа - 1 см, одинарный межстрочный интервал;

- текст статьи: кегль - 12 пунктов, гарнитура - Times New Roman (для русского, английского и немецкого языков), KZ Times New Roman (для казахского языка), полуторный межстрочный интервал;

- список использованной литературы (ссылки и примечания в рукописи обозначаются сквозной нумерацией и заключаются в квадратные скобки). Список литературы должен быть оформлен в соответствии с ГОСТ 7.1-84.- **например:**

ЛИТЕРАТУРА

1. Автор. Название статьи // Название журнала. Год издания. Том (например, Т.26.) номер (например, № 3.) страница (например С. 34. или С. 15-24.)

2. Андреева С.А. Название книги. Место издания (например, М.:) Издательство (например, Наука,) год издания. Общее число страниц в книге (например, 239 с.) или конкретная страница (например, С. 67.)

**На отдельной странице** (в бумажном и электронном варианте) приводятся сведения об авторе: - Ф.И.О. полностью, ученая степень и ученое звание, место работы (для публикации в разделе “Наши авторы”);

- полные почтовые адреса, номера служебного и домашнего телефонов, E-mail (для связи редакции с авторами, не публикуются);

- название статьи и фамилия (-и) автора(-ов) на казахском, русском и английском языках (для “Содержания”).

4. Иллюстрации. Перечень рисунков и подрисуночные надписи к ним представляют по тексту статьи. В электронной версии рисунки и иллюстрации представляются в формате TIF или JPG с разрешением не менее 300 dpi.

5. Математические формулы должны быть набраны как Microsoft Equation (каждая формула - один объект).

6. Автор просматривает и визирует гранки статьи и несет ответственность за содержание статьи.

7. Редакция не занимается литературной и стилистической обработкой статьи. Рукописи и дискеты не возвращаются. Статьи, оформленные с нарушением требований, к публикации не принимаются и возвращаются авторам.

8. Рукопись и дискету с материалами следует направлять по адресу:

140008, Республика Казахстан, г. Павлодар, ул. Ломова, 64,

РГКП Павлодарский государственный университет им. С.Торайгырова,

Издательство «КЕРЕКУ»

Тел. (8 7182) 67-36-69

E-mail: publish@psu.kz

РНН 451 800 030 073

БИН 990 140 004 654

АО «Цеснабанк»

ИИК 579 98 FTB 000 000 33 10

БИК TS ES KZ KA

Код сектора экономики - 6

Признак резиденства - 1

Теруге 04.05.2012ж. жіберілді. Басуға 18.05.2012 ж. қол қойылды.
Форматы 70x100 1/16. Кітап-журнал қағазы.
Көлемі шартты 6,97 б.т. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.
Компьютерде беттеген А.Р. Тайлақова
Корректорлар: Б.Б. Әубәкірова, А.Р. Омарова
Тапсырыс №1863
Сдано в набор 04.05.2012г. Подписано в печать 18.05.2012 г.
Формат 70x100 1/16. Бумага книжно-журнальная.
Объем 6,97 ч.-изд. л. Тираж 300 экз. Цена договорная.
Компьютерная верстка А.Р. Тайлакова
Корректоры: Б.Б. Аубакирова, А.Р. Омарова
Заказ №1863

«КЕРЕКУ» баспасы
С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік университеті
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.
67-36-69
E-mail: publish@psu.kz