

---

С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университетінің  
ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Павлодарского государственного университета имени С. Торайгырова

# ПМУ ХАБАРШЫСЫ

Физика-математикалық сериясы

1997 жылдан бастап шығады



# ВЕСТНИК ПГУ

Физико-математическая серия

Издается с 1997 года

№2 (2017)

---

Павлодар

**НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ**  
Павлодарского государственного университета имени С. Торайгырова

**Физико-математическая серия**  
выходит 4 раза в год

**СВИДЕТЕЛЬСТВО**

о постановке на учет средства массовой информации  
№ 14213-Ж

выдано

Министерством культуры, информации и общественного согласия  
Республики Казахстан

**Бас редакторы – главный редактор**

Тлеукенов С. К.

*доктор ф.-м.н., профессор*

Заместитель главного редактора

Испулов Н. А., *к.ф.-м.н., доцент*

Ответственный секретарь

Сыздыкова А. Т.

**Редакция алқасы – Редакционная коллегия**

Отелбаев М. О.,	<i>д.ф.-м.н., профессор, академик НАН РК</i>
Уалиев Г. У.,	<i>д.ф.-м.н., профессор, академик НАН РК</i>
Рахмон А. Х.,	<i>PhD (Пакистан)</i>
Ткаченко И. М.,	<i>д.ф.-м.н., профессор (Испания)</i>
Демкин В. П.,	<i>д.ф.-м.н., профессор (Россия)</i>
Бактыбаев К. Б.,	<i>д.ф.-м.н., профессор</i>
Кумеков С. Е.,	<i>д.ф.-м.н., профессор</i>
Куралбаев З.,	<i>д.ф.-м.н., профессор</i>
Оспанов К. Н.,	<i>д.ф.-м.н., профессор</i>
Нургожина Б. В.,	<i>технический редактор</i>

За достоверность материалов и рекламы ответственность несут авторы и рекламодатели  
Редакция оставляет за собой право на отклонение материалов  
При использовании материалов журнала ссылка на «Вестник ПГУ» обязательна

© ПГУ имени С. Торайгырова

**МАЗМҰНЫ**

**ИНФОРМАТИКА**

**Қаппасова Ж. Б., Криворучко В. А.**

Мобильдік анықтама электронды-цифрлық қолтаңбаны алуға тиімді құрал .....6

**Турковский Ю. А., Улихина Ю. В., Ткач Г. М., Оспанова Н. Н.**

Автокөліктік борттық компьютердің қолжетімді аналогтарын өз қолдарымен құрастыру. Smart car жүйесі .....16

**Салықова О., Жантекин Р.**

V-REP робототехникалық симуляторымен мобильді роботтарының компьютерлік көруі .....22

**МАТЕМАТИКА**

**Дроботун Б. Н., Катлабуга А. Д.**

Булева сигнатурасының алгебралық жүйелері алгебралық жиындар ретінде (II) .....31

**Дроботун Б. Н., Хасенов А. К.**

Пропозициялық есептеулер үшін компактлік теоремасы I .....40

**Жаныс А. Б.**

Қатты денеде вариациялық әдістермен стационарлық жылу сызықты емес теңдеулер үшін сандық есептеулер.....51

**Павлюк И. И., Сарсембаева Г. А., Катабекова С. В.**

Түйендес элементтердің және факторизацияның шекті класстары бар Черников топтары .....57

**Сенашов В. И., Герасимова А. М.**

Қабатты графтар топтарын қалпына келтіру

**ФИЗИКА**

**Аринов Е.**

Цилиндр пішінді вертикаль қуыс тау-кен жынысын қосымша күшсіз байыту кернеуі туралы

**БАҒЫТТАР БОЙЫНША ҒЫЛЫМИ-МЕТОДОЛОГИЯЛЫҚ ЗЕРТТЕУЛЕР**

**Жаппар Қ. Ж.**

Құпия ақпараттың жайылып кетуін алдын алу жүйесін зерттеу

**Исмуканова А. Н., Лаэров Д. Н., Кубигенова А. Т., Ожибаева З. М.**

Латент-семантикалық талдау көмегімен ғылыми жіктеу мәтінін зерттеу

Авторларға арналған ережелер.....97

## СОДЕРЖАНИЕ

### ИНФОРМАТИКА

**Каппасова Ж. Б., Криворучко В. А.**

Мобильный справочник как эффективный инструмент получения электронно-цифровой подписи

**Турковский Ю. А., Улихина Ю. В., Ткач Г. М., Оспанова Н. Н.**

Доступные аналоги автомобильных бортовых компьютеров своими руками. Система Smart car

**Салыкова О., Жантекин Р.**

Компьютерное зрение мобильных роботов в робототехническом симуляторе V-REP

### МАТЕМАТИКА

**Дроботун Б. Н., Катлабуга А. Д.**

Алгебры множеств, как алгебраические системы булевых сигнатур (II)

**Дроботун Б. Н., Хасенов А. К.**

Теорема компактности для пропозициональных исчислений (I)

**Жаныс А. Б.**

Численные расчеты для нелинейного уравнения стационарной теплопроводности в упругом твердом теле вариационным методом

**Павлюк И. И., Сарсембаева Г. А., Катабекова С. В.**

Черниковские группы с конечными классами сопряженных элементов и факторизации

**Сенашов В. И., Герасимова А. М.**

Восстановление слойных графов групп

### ФИЗИКА

**Аринов Е.**

О напряженном состоянии вертикальной цилиндрической горной выработки без подкрепления

### НАУЧНО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ОТРАСЛЯМ

**Жаппар Қ. Ж.**

Исследование систем противодействия утечек конфиденциальной информации

**Исмуканова А. Н., Лаэров Д. Н., Кубигенова А. Т., Ожибаева З. М.**

Классификация научного текста с помощью латентно-семантического анализа

Правила для авторов.....97

## CONTENT

### INFORMATICS

**Kappassova Z. B., Krivoruchko V. A.**

Mobile guide as an effective tool for electronic-digital signature receiving

**Turkovskiy Y. A., Uliхина Y. V., Tkach G. M., Ospanova N. N.**

Available hand made analogues of automobile on-board computers. Smart car system

**Salykova O., Zhantekin R.**

Computer vision of mobile robots designed in robotic simulator V-REP

### MATHEMATICS

**Drobotun B. N., Katlabuga A. D.**

Algebras of sets, as algebraic systems of Boolean signatures (II)

**Drobotun B. N., Khassenov A. K.**

A compactness theorem for propositional calculus I

**Zhanis A. B.**

Numerical calculation for the nonlinear equation of stationary thermal conductivity in an elastic solid by a variational method

**Pavlyuk I. I., Sarsembayeva G. A., Kattabekova S. V.**

Chernikov's groups with finite classes of conjugate elements and factorizations

**Senashov V. I., Gerasimova A. M.**

Restoration of layered graphs of groups

### PHYSICS

**Arinov E.**

About the stressed state of the vertical cylindrical excavation without reinforcement

### SCIENTIFIC AND METHODOLOGICAL BRANCH RESEARCHES

**Zhappar K. Zh.**

Research of the systems of counteraction to leaks of the confidential information

**Ismukanova A. N., Lavrov D. N.,**

**Kubigenova A. T., Ozhibayeva Z. M.**

Classification of scientific text using latent-semantic analysis

Rules for authors.....97

UDC 004.42

**Z. B. Kappassova<sup>1</sup>, V. A. Krivoruchko<sup>2</sup>**<sup>1</sup>undergraduate student, <sup>2</sup>doctor of Pedagogy, Professor, S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodare-mail: <sup>1</sup>azajan2013@mail.ru, <sup>2</sup>vak-48@mail.ru**MOBILE GUIDE AS AN EFFECTIVE TOOL FOR ELECTRONIC-DIGITAL SIGNATURE RECEIVING**

*An analysis of foreign mobile application for cooperation of the government with citizen was performed in this article. The structure of the mobile application was developed, the software platform was selected, the stages of building were arranged and the mobile handbook on electronic digital signature receiving was developed by reference to the experience of foreign countries. Testing and approbation of the mobile guide was conducted.*

*Keywords: mobile device, mobile application, electronic-digital signature, mobile guide, Android, user.*

**INTRODUCTION**

The past century is characterized by the rapid development of information technology. In the modern world there is growth not only in industry and related industries, but also in civil society. The popularity of mobile devices is growing every day: if 2-3 years ago, this prerogative had the population under 40, then at the present time there is no such distinction according to age of mobile device users.

Every day more and more people use the capabilities of mobile devices. Their popularity caused by, first of all, their usability: a small size, powerful software, access to all modern ways of communication. For most people, smartphones have already replaced the desktop computer. In connection with the increase the mobile technology, the population has certain difficulties in tracking all information flows on all devices [1].

Development of application for mobile devices is a process in which applications are developed for small portable devices, such as PPC, smart phones or cell phones. These applications can be pre-installed on the device during

production, downloaded by the user by means of various platforms for distributing the software, or to be web applications that are processed on the client or server side [2].

Every day millions of people install (use) mobile applications on their smartphones – it is a whole culture, developing at a frantic pace. The advantage of mobile applications is that they can serve the population almost anywhere and at any time, not just those who are currently working on the computer.

Taking into account these obvious advantages, it seems strange that government agencies are slow to implement mobile applications. Part of it is caused by the fact that their benefits are sometimes difficult to express in economic terms and, therefore, it is difficult to justify the corresponding costs, especially in the context of the limitation of budgetary appropriations [3].

On the other hand, government agencies may not have to invest in application development at all: they can simply provide basic data, and the private sector will develop applications. This is the case with the application «Mobile guide for electronic digital signature receiving», created for the Public Service Center of Pavlodar.

Despite the fact that the majority of the population of Kazakhstan uses the Internet in their daily lives and a large part of population turns to public services, many citizens still prefer to come to government institutions personally, instead of solving their problems online. The main problem is that citizens of modern Kazakhstan are psychologically ready to use the electronic digital signature, but do not have proficient knowledge and skills in using the electronic government portal. Thus, there is a need to create a mobile guide for electronic digital signature receiving.

**MAIN PART**

After our research, we came to the conclusion that government agencies around the world are rapidly digitizing, portals for interaction with citizens are being created, and then pass into mobile applications. We reviewed similar mobile applications abroad.

Experience of Hong Kong. For example, a mobile application provided by the Hong Kong government allows a citizen to send a request for information from any government agency. The application also allows to make a reminder about a visit to a government agency, point to the official the most convenient time for you to visit the administration, to keep a history of all requests to the state. In the application a citizen can specify the most convenient form for receiving notifications from government authorities:

- PUSH notification;
- Phone call;

- SMS;
- Email;
- Facebook;
- Twitter, etc. [4].

Experience of South Korea. South Korea, like no other country in the world, is rich in various mobile applications for the interaction of government authorities with citizens. Mobile applications from the government of South Korea are so diverse that they enable to cover almost all aspects of life (birth of a child, marriage registration, company registration, registration at the labor exchange, etc.)

But the most useful, in our opinion, is the mobile application EGE.N, provided by the Department of Health and Social Services of South Korea. EGE.N is a real ambulance in the pocket. The application shows information about the nearest medical institutions, gives an opportunity to call an ambulance to the location of the user of smartphone, contains a list of instructions for the rendering urgent medical aid. In addition, the application allows the user:

- store information about chronic illnesses and medical contraindications, which are automatically sent to the nearest emergency department after receiving an emergency call;
- keep a calendar of drug administration;
- keep a calendar of visits to the doctor;
- review the medicines and indications prescribed by treating doctor [5].

Experience of Turkey. The mobile application for government interaction with citizens collected all the electronic services that the user can get on the e-government portal. We will describe all functionality of e-Devlet, as the amount of services is worth a separate article. Here we indicate the most interesting of them:

- accounting of demerit point if there is road traffic offense;
- calculation of taxes;
- request for information on the state of health insurance;
- obtaining information about pensionary accruals;
- currency converter;
- meteorological data, and much more [6].

Experience of Australia. Express Plus Centrelink is a mobile application developed for the Australian Department of Social Services. The developers of the application initially assumed that the main users of Express Plus Centrelink would be young families, students, pensioners and unemployed people, receiving subsidies and payments from the state. The application was so successful that it is also used by working citizens of Australia to estimate the expenses of the family budget.

Express Plus Centrelink allows the user to:

- view the history of social payments (pensions, allowances, scholarships, etc.);
- view online letters and load documents into your mobile phone;
- view and update personal data in social services;
- keep a calendar of meetings with social workers;
- keep record of expenses / incomes of the family budget [7].

On the basis of the analysis of the experience of foreign countries we developed a mobile application-guide, which can serve citizens of Pavlodar city as a guide for receiving an electronic digital signature. Despite the fact that the majority of the population of Kazakhstan uses the Internet in everyday life and a large part of it addresses public services, many citizens still prefer to come to government institutions personally rather than solve their problems online. The main problem is that citizens of modern Kazakhstan are psychologically ready to use the electronic digital signature, but do not have proficient knowledge and skills in using the electronic government portal. Due to the fact that the market offers a huge variety of versions of mobile devices, each of them requires a certain kind of platform for working with the guide. Today, the most popular platforms are Android and iOS, as well as BlackBerry and Linux - they are relevant for working with corporate applications. But also popular Windows Phone is aimed at the consumer segment.

The research company IDC presented its new report on the situation on the world market of smartphones, the number of sold devices and the share of operating systems for the second quarter of 2016. Total sales of devices on Android and iOS are 95.7 % of all smartphones sold in 2016 compared to 91.2 % a year earlier. But the most important thing is that Android takes 60 % of these 95.7 %, and 800 million devices on this operating system were sold in 2016. This information shows that Android is the best way to create a mobile guide that will be installed on mobile devices of the population of Kazakhstan [8].

We started development with a graphical interface. It is associated with the peculiarities of programming for Android. In order to interact with the window elements, the program module connects to the necessary elements using the identifiers. In this case, the interface elements in the main window must be created firstly.

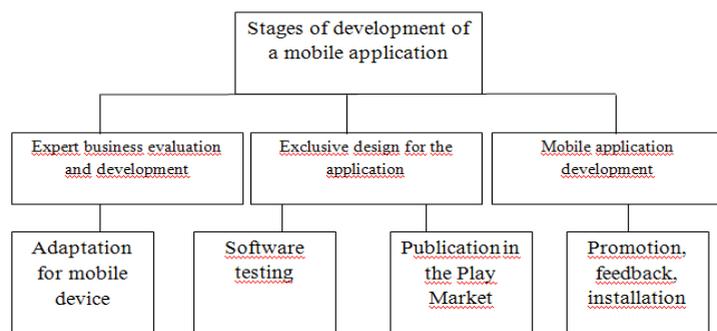
The graphical user's interface is declared in XML files, and the main language for developing Android applications is the object-oriented programming language Java. In accordance with a certain structure, the Java language will be used to develop the components of the application. The Android Studio environment is used as the development environment, as it is provided with a plug-in for working with the Android SDK, and it is also freely distributed.

Advantages of this platform:

- Some observers note that Android is better than one of its competitors, Apple iOS, in a number of features, such as web surfing, integration with Google services and others. Also, Android, unlike iOS, is an open platform, which allows to implement more functions on it;
- Despite the initial interdiction of installing programs from «unverified sources» (for example, from a memory card), this restriction is disabled by the inbuilt tool in the device settings, which allows to install programs on phones and pads without an Internet connection, and also allows anyone to write Android applications for free and test on your device;
- Android is available for various hardware platforms, such as ARM, MIPS, x86;
- There are alternative Google Play applications store: Amazon Appstore, Opera Mobile Store, Yandex.Store, GetUpps!, Mobogenie, F-Droid, IMobile Market;
- Support for multi-user mode is introduced in version 4.3 [9].

The scheme of stages of building a mobile application of the guide developed by us includes the following items:

- Expert business assessment and development;
- Exclusive design for the application;
- Development of a mobile application (picture 1).



Picture 1 – Stages of development of mobile application guide

The mobile directory includes:

- Map of the location of the Public Service Centers in Pavlodar;
- Instruction and video-instruction for receiving an electronic digital signature;
- User’s manual for installing the NCALayer program;

- Physical person’s manual for obtaining registration certificates of the National Certification Authority of the Republic of Kazakhstan (NCA RK);
- Manual of chief executive officer of the legal body for obtaining registration certificates of the NCA RK;
- Manual of an employee of a legal body for obtaining registration certificates of the NCA RK.

The code of the home page of the mobile application is:

```

public class ConsFragment extends Fragment {
public ConsFragment() {
// Required empty public constructor
}
@Override
public View onCreateView(LayoutInflater inflater, ViewGroup container,
Bundle savedInstanceState) {
View v = inflater.inflate(R.layout.fragment_cons, container, false);
RecyclerView recyclerView = (RecyclerView) v.findViewById(R.id.list_cons);
recyclerView.setHasFixedSize(true);
recyclerView.setLayoutManager(new LinearLayoutManager(getActivity()));
recyclerView.setAdapter(new ConsAdapter(Place.getData(getActivity(), R.array.cons)));
return v;
}
}
    
```

At start the application guide, the language selection page: Kazakh-Russian opens for the user. Then go to the home page of our application, where the menu of the guide opens (picture 2).

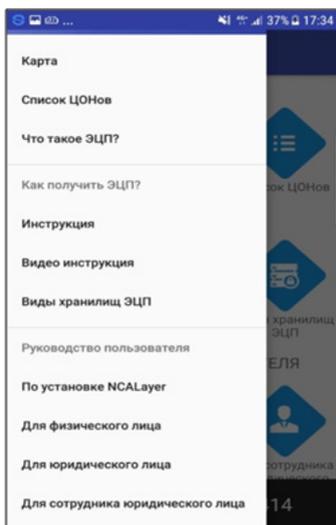
At the top of the page we see the logo of our E-handBook application and the subsections «General Information», «How to receive EDS?», «User’s instruction».

In each subsection there are icons «Map», «What is EDS?», «List of PSCs», «Instruction», «Video instruction», «Types of EDS storages» and «User manuals».

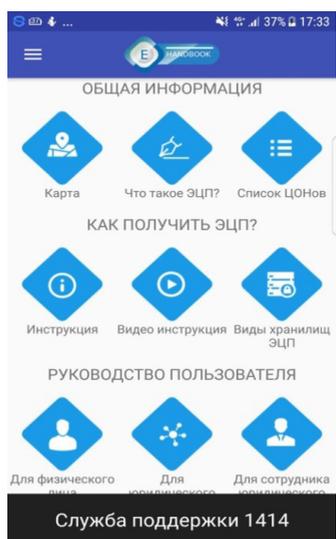
Also on the application home page there is a button for connection with the single contact center of the Republic of Kazakhstan «Support service 1414», when user clicks it, the user is offered to choose an application with the help of which user can contacted the center «using the phone», «Viber», «Skype». By this phone number, we can find out any information we are interested in about receiving an electronic digital signature.

All above mentioned functions of the guide can also be performed through the navigation menu of the guide, which is on the left side of the screen and on

the home page (picture 3). Thus, we can choose the point we need, both on the main page of the application, and in the pop-up navigation menu.



Picture 2 – Home page of the application guide



Picture 3 – Navigation menu of the application

When selecting the «User map» menu point, a detailed map of the location of the Public Service Centers in Pavlodar city will be available, by clicking on the PSC we will see the exact address of the center and contact phone numbers, as well as our own location, through which we will know how far we are from the center needed for us.

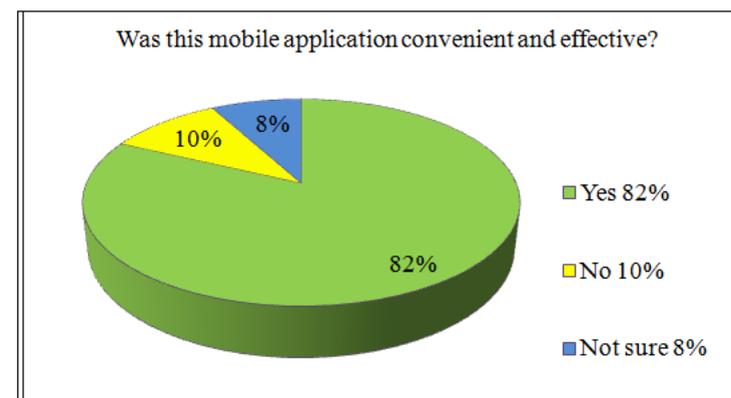
When you click on the map on one of the icons, a list of Public Service Centers with addresses and contact telephones will appear on the screen, and this function is also available on the home page of the application «List of PSCs». Like on the «User’s map» there are addresses of centers, phone numbers and work pattern.

To receive an electronic digital signature, it is necessary to follow the instructions that are in the application menu.

For the convenience of users, there is also a video instruction in the application also contains on how to receive an electronic digital signature on the electronic government portal and a brief instruction on the types of electronic digital signature stores.

### CONCLUSION

After the development of this application – the mobile guide, it was tested. Then a user questioning was conducted, where we offered to answer the question: «Was this mobile application convenient and effective?». Based on the results of the questioning, we constructed a diagram (Figure 4).



Picture 4 – Questioning of users of the mobile guide

Analysis of the answers showed that 82 % of users found the mobile guide convenient and effective, 10 % of respondents answered in a negative way and 8 % found it difficult to answer the question.

For the purpose of approbation of the mobile guide for the specialists of the monitoring division of the Pavlodar Department «Public Service Centers», we organized a seminar, during which a presentation of this guide was made and the results of the conducted research were shown. Recommendations for the introduction of a mobile guide into the e-government system of Pavlodar region and load it to the Play Market application store of the Android operating system were received following the results of this seminar.

Thus, it can be summarized that the developed mobile guide to receiving an electronic digital signature and its implementation in the electronic and mobile government system through the Public Service Centers has been successful and is an effective tool to involve users to receive an electronic digital signature.

In the long term, it is planned to expand the functionalities of the mobile guide. It is planned to add information not only about receiving the EDS, but also about other online services that are provided on the e-government portal. And also increase the scale of application usage throughout Kazakhstan, by adding other cities of our state.

#### REFERENCES

- 1 The development of the Internet and its meaning. [Electronic resource] – URL: <http://www.bizhit.ru/> (accessed date: 11.02.2017 )
- 2 The Address of the President of the Republic of Kazakhstan Nursultan Nazarbayev to the people of Kazakhstan dated January 31, 2017
- 3 <http://egov.yvision.kz/post/266320>
- 4 **Zavorotnaya, S. V.** On the benefits of e-government for the civil service: the reflections of the Master's Degree Student // The electronic scientific journal «GosReg», 2013. – P. 15-20
- 5 <https://hi-tech.mail.ru/news/mobile-apps-usage.html>
- 6 **Azarov, I. V., Strunina, A. A.** Analysis of the mobile application market // Modern problems of science and education, 2014. – № 6. – P. 26-28
- 7 **Pavlichev, A., Garson, G. D.** Digital Government: Principles and Best Practices // IDEA Group Publishing, 2004.
- 8 **Edwards, A.** The Moderator in Government- Initiated Internet Discussions: Facilitator or Source of Bias // E-transformation in Governance: new directions in government and politics, Idea Group Publishing, 2004. – P. 150-169.
- 9 **Fletcher, P.** Portal and policy: implications of electronic access to U.S. Federal Government information and services // Digital Government: Principles and Best Practices / Ed. by Pavlichev A., Garson G.D., – IDEA, 2004.

Material received on 13.06.17.

*Ж. Б. Қаппасова, В. А. Криворучко*

#### **Мобильдік анықтама электронды-цифрлық қолтаңбаны алуға тиімді құрал**

С. Торайғыров атындағы  
Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.  
Материал 13.06.17 баспаға түсті.

*Ж. Б. Қаппасова, В. А. Криворучко*

#### **Мобильный справочник как эффективный инструмент получения электронно-цифровой подписи**

Павлодарский государственный университет  
имени С. Торайгырова, г. Павлодар  
Материал поступил в редакцию 13.06.17.

*Бұл мақалада азаматтармен үкімет өзара іс-қимыл үшін шетелдік ұялы қосымшаларды талдайды. Шет елдердің тәжірибесіне негізделген, мобильді Фреймворк, бағдарламалық қамтамасыз ету платформа таңдау жүзеге асырылып, құрылыс кезеңдері салынған және электрондық цифрлық қолтаңба алу үшін ұялы нұсқаулығын дамытқан. Ұялы каталог тестілеу және тестілеу жүргізілді.*

*В данной статье проведен анализ зарубежных мобильных приложений по взаимодействию правительства с гражданами. Исходя из опыта зарубежных стран, разработана структура мобильного приложения, осуществлен выбор программной платформы, выстроены этапы построения и разработан мобильный справочник по получению электронно-цифровой подписи. Проведено тестирование и апробация мобильного справочника.*

**Ю. А. Турковский<sup>1</sup>, Ю. В. Улихина<sup>2</sup>,  
Г. М. Ткач<sup>3</sup>, Н. Н. Оспанова<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>студент, <sup>2,3</sup>ст. преподаватель, <sup>4</sup>к.п.н. профессор, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар  
e-mail: <sup>1</sup>yura-pvl@mail.ru, <sup>2</sup>pheniks25@gmail.com, <sup>3</sup>galina\_tkach\_83@mail.ru

### **ДОСТУПНЫЕ АНАЛОГИ АВТОМОБИЛЬНЫХ БОРТОВЫХ КОМПЬЮТЕРОВ СВОИМИ РУКАМИ. СИСТЕМА SMART CAR.**

*Предлагаемая статья представляет собой идею создания аналога современных бортовых компьютеров для автомобилей с более низкой стоимостью и достаточной производительностью, имеющего достаточный функционал, для повседневного пользования в автомобиле. В этой статье рассказывается о том, какие комплектующие будут использоваться в данной системе и на базе какой операционной системы будет работать устройство.*

*Ключевые слова: бортовой компьютер, автомобиль, аналог, плата, устройство.*

#### **ВВЕДЕНИЕ**

В современном мире существует множество различных устройств, которые облегчают нашу жизнь, делают её более интересной, «умной». С изобретением компьютера облегчилась работа с документами, появились мультимедийно-развлекательные возможности, возникли средства для решения специфических задач. С возникновением интернета и мобильной сети стало возможным связать все устройства в одну единую сеть. Используя данные технологии, ученые шагнули вперед, создав смартфоны, планшеты, различные серверные системы и другие устройства. Плюсом большинства устройств является их портативность. Ранее, чтобы посмотреть фильм, информацию в сети, прослушать несколько песен, приходилось использовать разные специально созданные устройства. Сейчас же в каждом смартфоне есть и музыкальный плеер, и видео проигрыватель, и браузер интернет страниц.

Умная техника все больше охватывает нашу жизнь, все больше устройств мы модернизируем и изменяем. Глобальная сеть захватила все, вплоть до нашего чайника. Мы можем заказать любые предметы через сеть,

удаленно включать компьютер, заказать такси, провести консультацию у врача и многое другое. Каждый день SMART технологии внедряются в нашу жизнь, и автомобили не стали исключением. В дорогих современных автомобилях установлены бортовые компьютеры, имеющие выход в сеть, встроенную навигацию, медиа сервисы и прочее. Данные системы являются решением для конкретных моделей автомобилей. Ярким примером такого автомобиля, можно назвать Tesla Model S. Благодаря этому компьютеру возможно совершать звонки, искать какую-либо информацию в сети, вести навигацию, производить настройку и диагностику автомобиля.



Рисунок 1 – Пример современного бортового компьютера автомобиля

#### **ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ**

Как было сказано ранее, машины с встроенным бортовым компьютером имеют слишком высокие цены, было решено разработать универсальный аналог данного устройства. Созданное нами устройство должно иметь низкую стоимость, хорошую производительность, широкий спектр возможностей и возможность улучшения. Устройство должно быть универсальным, чтобы его можно было установить в любой автомобиль.

При подборе комплектующих, мы столкнулись с проблемой: стандартные комплектующие от персональных компьютеров не подходили для нашего проекта. Они имели слишком большой размер, имели высокую цену и требовали большого количества ресурсов. После долгого отбора, было решено остановиться на одноплатных компьютерах. У них имеется достаточно вычислительной мощности для выполнения поставленных

задач. В частности, мы выбрали плату Banana Pi M1. Из всех вариантов, представленных на рынке, она имеет наилучшее соотношение цена-качество-производительность.

Banana Pi M1 имеет множество портов для подключения внешних устройств как нового, так и старого формата такие как HDMI, AV video, DSI порт дисплея. Имеется порт Ethernet для подключения к сети интернет, порт SATA для подключения устройств хранения информации (HDD, SSD) либо оптических приводов (CD/DVD-ROM). Для отслеживания состояния устройства имеются различные led-индикаторы. Есть встроенный микрофон, 3,5 mini jack для вывода звука, 2 стандартных USB входа, 1 micro-USB, кнопки включения и перезагрузки платы.

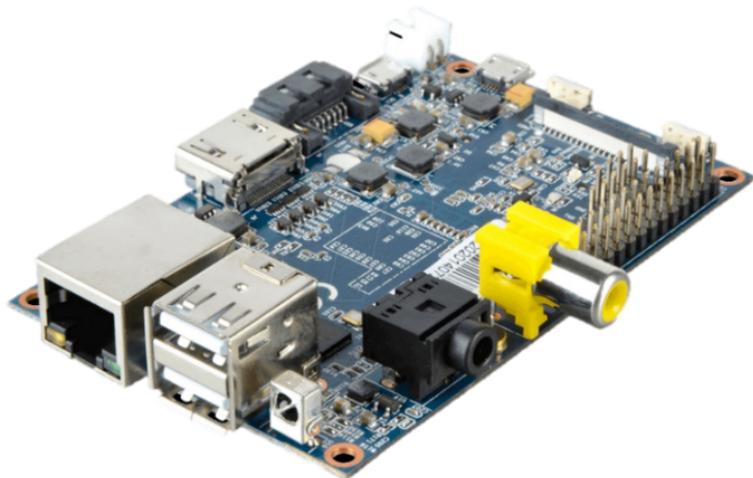


Рисунок 2 – Одноплатный компьютер Banana Pi M1

В качестве ОС используется Linux Ubuntu. Мы решили остановиться именно на ОС Linux Ubuntu, так как она является одной из самых популярных сборок системы Linux, она не потребляет много ресурсов компьютера и имеет огромное количество программного обеспечения. Banana Pi M1 поддерживает и другие операционные системы, например ОС Windows, но из-за бесплатного доступа, мы остановились на системе Ubuntu.

Всё программное обеспечение будет установлено на флеш-карту формата SD. В качестве устройств управления компьютером будут использоваться сенсорный дисплей, мышь и клавиатура. Первичная настройка устройства позволит выбрать функции, которые нужны будут пользователю, с помощью каких устройств будет осуществляться ввод/вывод информации.

Для обновления программного обеспечения нашей системы, для установки новых программ и получения информации в сети в устройство будет установлен USB 3G/4G модем. Скорость данного устройства позволяет комфортно искать информацию в сети. Выбрать мобильного провайдера, который будет предоставлять интернет трафик, предоставляется пользователю, так как у каждого пользователя свои потребности в сети.

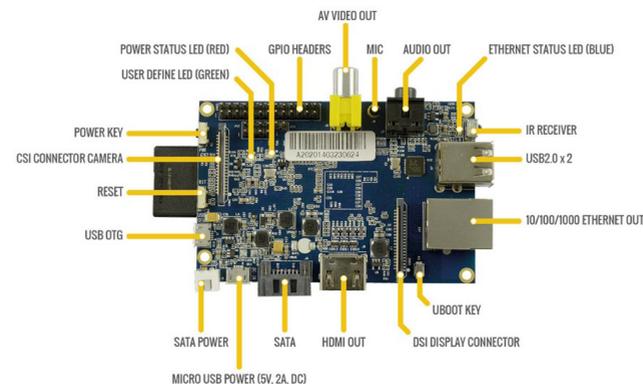


Рисунок 3 – Порты подключения на плате Banana Pi M1

Устройство будет оснащено мультимедийными функциями. Хранение контента возможно будет на встроенной памяти, либо на дополнительном HDD/SSD. Воспроизведение фото, музыки, видео будет происходить через специальные проигрыватели, заранее установленные в системе Linux Ubuntu. В саму систему также будет установлен офисный редактор, через который возможно будет создавать и изменять имеющиеся документы, презентации и электронные таблицы.

Для полноценной работы нашего устройства, необходимо следующее оборудование:

- Одноплатный компьютер Banana Pi M1
- Флеш-карта формата SD
- USB-разветвитель
- USB модем
- USB мышь\клавиатура (по желанию)
- Сенсорный дисплей
- HDD/SSD
- Блок питания на 5V

**ВЫВОДЫ**

Созданное устройство имеет необходимый пользователю функционал, хорошую производительность и низкую стоимость. На таблице 1 было проведено сравнение отечественного автомобиля с установленной системой SMART CAR.

В конечном итоге мы получили универсальное устройство, которое можно использовать как аналог иностранных компьютеров.

Таблица 1 – Сравнение двух автомобилей

Lada Granta 2016 SMART CAR		Tesla Model S
6500\$	Цена автомобиля	\$85 900
Linux Ubuntu	Операционная система	Linux Ubuntu
+	Мультимедиа	+
+	Выход в интернет	+
+	Навигация	+
+	Информация о состоянии автомобиля	+
Аппаратная и программная	Персонализация	Программная
Любое транспортное средство	Адаптация	-

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

- 1 Интернет магазин Aliexpress.com [Электронный ресурс]. – URL: www.aliexpress.com (дата обращения 10.3.2017)
- 2 Интернет ресурс Banana Pi [Электронный ресурс]. – URL: www.banana-pi.org (дата обращения 14.3.2017)
- 3 Интернет ресурс компании Tesla [Электронный ресурс]. – URL: www.tesla.com/models (дата обращения 20.3.2017)

Материал поступил в редакцию 13.06.17.

*Ю. А. Турковский, Ю. В. Улихина, Г. М. Ткач, Н. Н. Оспанова*  
**Автокөліктік борттық компьютердің қолжетімді аналогтарын өз қолдарымен құрастыру. Smart car жүйесі**

С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.  
 Материал 13.06.17 баспаға түсті.

*Y. A. Turkovskiy, Y. V. Ulihina, G. M. Tkach, N. N. Ospanova*

**Available hand made analogues of automobile on-board computers. Smart car system**

S. Toraigyrov Pavlodar State University, Pavlodar.  
 Material received on 13.06.17.

*Осы мақалада машинада күнделікті пайдалану үшін ең қажетті функциялары бар, құны төмен және өнімділігі жеткілікті көлік құралдарының заманауи борттық компьютерлер аналогын құру идеясы болып табылады. Бұл мақалада осы жүйеде қандай компоненттері қолданылатынын және қай операциялық жүйесі негізі жұмыс істейтіні жайлы баяндалған.*

*The proposed article presents an idea of creating an analogue of modern on-board computers for cars with lower cost and sufficient performance, which has enough functionality for everyday use in a car. This article describes what components will be used in this system and on the basis of which operating system the device will work.*

**О. Салыкова<sup>1</sup>, Р. Жантекин<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>к.т.н., доцент; <sup>2</sup>магистрант, Костанайский государственный университет имени А. Байтурсынова, г. Костанай  
e-mail: <sup>1</sup>solga0603@mail.ru, <sup>2</sup>ruslan.zhantekin@gmail.com

## **КОМПЬЮТЕРНОЕ ЗРЕНИЕ МОБИЛЬНЫХ РОБОТОВ В РОБОТОТЕХНИЧЕСКОМ СИМУЛЯТОРЕ V-REP**

*В данной статье автором рассмотрена проблема компьютерного зрения в робототехнических системах. В работе представлен обзор робототехнического симулятора V-REP и его взаимодействие со сторонними скриптами для управления компьютерным зрением.*

*Ключевые слова: робототехника, симулятор, V-REP, компьютерное зрение, мобильный робот.*

### ВВЕДЕНИЕ

Компьютерное зрение – это общий набор методов, позволяющих компьютеру видеть. Компьютерное зрение является одной из самых широко используемых технологий. Диапазоном применения данной технологии можно считать от промышленных роботов до вычислительных фотографий, применяемых в мобильных устройствах, что, несомненно, говорит о востребованности и актуальности исследований в данном направлении. В нашем случае, исследования проводятся на базе мобильных роботов различных типов [1].

Мобильный робот – автоматическая машина, в которой имеется движущееся шасси с автоматически управляемыми приводами.

На сегодняшний день использование мобильных роботов сопряжена с постоянным и активным перемещением в различном окружении. В связи с этим возникла необходимость создания роботов, которые могли бы не только двигаться по изначально определенным маршрутам и обнаруживать препятствия, но и классифицировать их, чтобы при необходимости гибко подстроиться под изменяющееся окружение. Тем самым обработка изображения является наиважнейшим направлением компьютерного зрения.

Однако, часто возникает потребность предварительного тестирования алгоритмов управления и конструирования виртуальной модели робота. В настоящее время, для этих целей доступно несколько сред

моделирования, например, Gazebo, Microsoft Robotics Developer Studio, а также рассматриваемый в этой статье V-REP.

### ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

V-REP представляет собой среду для симулирования различных видов роботов, при этом пользователю нет необходимости иметь физический доступ к реальному роботу, что экономит время и деньги. Его наиболее отличительными особенностями являются: бесплатность для некоммерческого использования, разные методы программирования моделируемого робота и большое разнообразие типов роботов, которые могут быть смоделированы одновременно [2].

### Архитектура мобильного робота

Как мы видим (рис. 1) – «мозг» робота получает изображение, распознаёт (посредством OpenCV) и передаёт управляющие команды на колеса. И заменив изображение с камеры на 3д изображение, а управление колесами – на управление виртуальными колесами 3д робота в виртуальном мире – мы получим стенд для отработки логики (рис. 2).

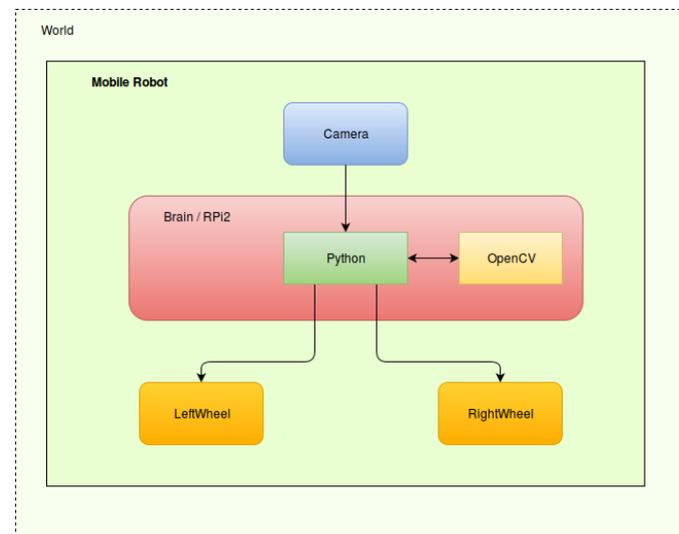


Рисунок 1 – Архитектура мобильного робота в реальном мире

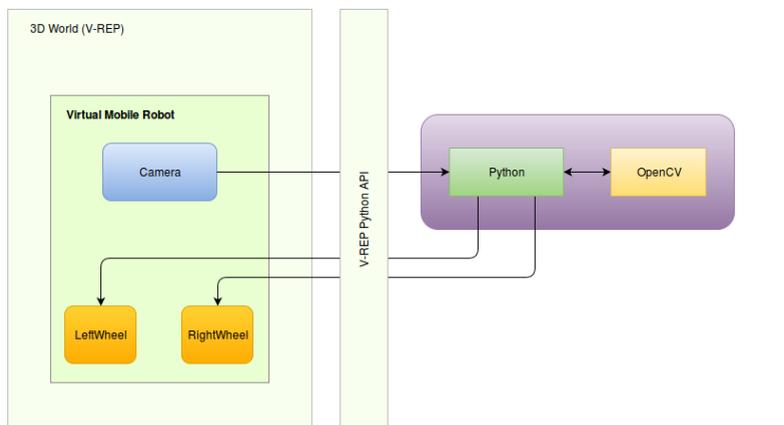


Рисунок 2 – Архитектура мобильного робота в виртуальной среде V-REP

Далее – нам необходимо решить задачу связи V-REP с внешним python скриптом, который выполняет распознавание образов с помощью OpenCV, и выводит маркер вокруг найденного объекта.

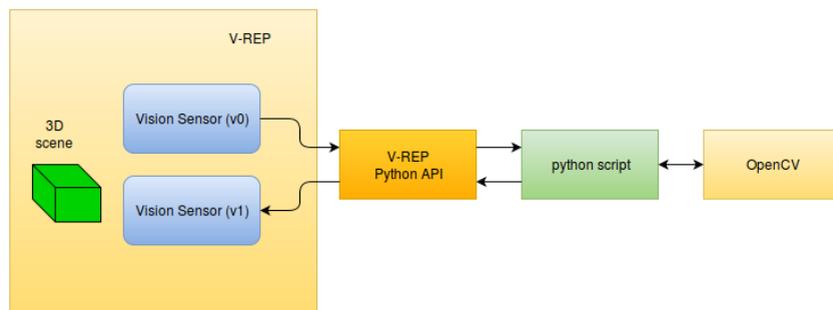


Рисунок 3 – Обработка изображения с датчиков с помощью OpenCV

### Python API

При запуске V-REP автоматически загружается плагин обеспечивающий связь Python API. Для работы с API через python скрипт необходимо наличие трёх файлов в папке:

- ✓ remoteApi.so (или remoteApi.dll)
- ✓ vrep.py
- ✓ vrepConst.py

Их можно скопировать из V-REP каталога (programming / remoteApiBindings/python/python, programming/remoteApiBindings/lib/lib/). [3] После этого можно импортировать модуль V-REP:

```
import vrep
```

На нашей сцене есть два объекта – v0 и v1 – это Visual Sensor – с первого мы считываем картинку, на второй мы должны записывать результат. Поэтому мы должны получить эти объекты в контексте нашего python скрипта, делается это с помощью API команды vrep.simxGetObjectHandle.

```
res,v0 = vrep.simxGetObjectHandle(clientID, 'v0',
vrep.simx_opmode_one-shot_wait)
res,v1 = vrep.simxGetObjectHandle(clientID, 'v1',
vrep.simx_opmode_one-shot_wait)
```

Обращаем внимание, что все функции доступные через API – так же доступны и через внутренние скрипты (Lua), единственное отличие что в названии вместо simx – sim, то есть в нашем случае вызов функции на Lua будет «simGetObjectHandle».

Для получения из Vision Sensor картинки и записи – есть две функции: vrep.simxGetVisionSensorImage и vrep.simxSetVisionSensorImage соответственно.

И в python коде это будет выглядеть так (где v0 и v1 – соответствующие объекты):

```
# получение изображения из сенсора v0
err,resolution,image=vrep.simxGetVisionSensorImage(
clientID,v0,0,vrep.simx_opmode_buffer)

# запись изображения в сенсор v1
vrep.simxSetVisionSensorImage(clientID, v1, image,
0, vrep.simx_opmode_one-shot)
```

Единственно, для Vision Sensor что получает данные из внешнего источника, в параметрах надо выставить соответствующий флаг:

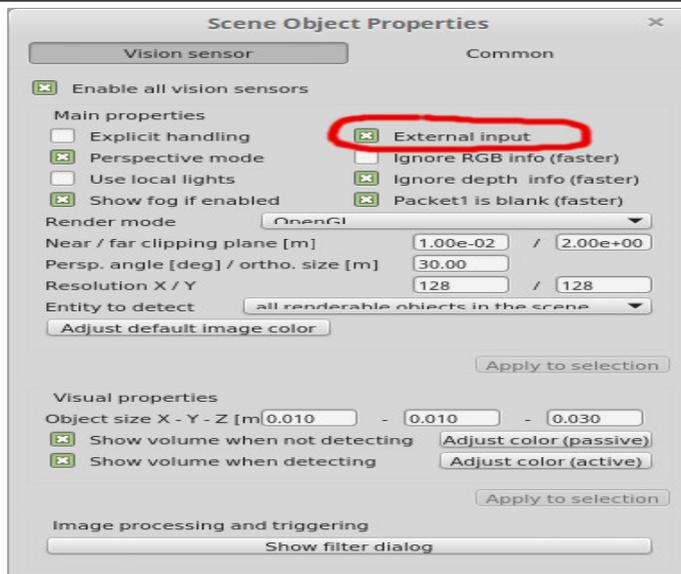


Рисунок 4 – Окно настроек объекта Vision Sensor  
Ретрансляция изображения

Для реализации ретрансляции необходимо создать python скрипт, который через V-REP API берет изображение с видео-сенсора и ретранслирует его: (рис. 12)

```

1 # simple_image_retranslate.py
2 import vrep
3 import time
4 vrep.simxFinish(-1)
5 clientID = vrep.simxStart('127.0.0.1', 19997, True, True, 5000, 5)
6 if clientID!=-1:
7     print 'Connected to remote API server'
8     res, v0 = vrep.simxGetObjectHandle(clientID, 'v0', vrep.simx_opmode_oneshot_wait)
9     res, v1 = vrep.simxGetObjectHandle(clientID, 'v1', vrep.simx_opmode_oneshot_wait)
10    err, resolution, image = vrep.simxGetVisionSensorImage(clientID, v0, 0, vrep.simx_opmode_streaming)
11    time.sleep(1)
12    while (vrep.simxGetConnectionId(clientID) != -1):
13        err, resolution, image = vrep.simxGetVisionSensorImage(clientID, v0, 0, vrep.simx_opmode_buffer)
14        if err == vrep.simx_return_ok:
15            vrep.simxSetVisionSensorImage(clientID, v1, image, 0, vrep.simx_opmode_oneshot)
16        elif err == vrep.simx_return_novalue_flag:
17            print "no image yet"
18        else:
19            print err
20    else:
21        print "Failed to connect to remote API Server"
22        vrep.simxFinish(clientID)

```

Рисунок 5 – Исходный код скрита simple\_image\_retranslate.py

Для проверки мы должны стартовать сцену (кнопка «Play» вверх), и после этого в командной строке запустить файл simple\_image\_retranslate.py. (рис. 6)

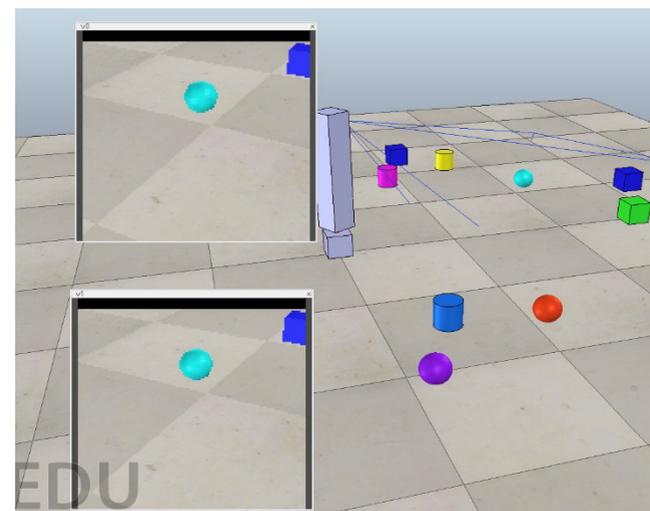


Рисунок 6 – Результат выполнения скрипта simple\_image\_retranslate.py  
Компьютерное зрение, OpenCV

OpenCV (англ. Open Source Computer Vision Library, библиотека компьютерного зрения с открытым исходным кодом) – библиотека алгоритмов компьютерного зрения, обработки изображений и численных алгоритмов общего назначения с открытым кодом. Реализована на C/C++, также разрабатывается для Python, Java, Ruby, Matlab, Lua и других языков.

После установки библиотеки появилась возможность подключить ее в python коде:

```
import cv2
```

Теперь необходимо реализовать простейшую функцию распознавания. В качестве примера была поставлена задача – поиск зелёного объекта на картинке [4].

```

1 import cv2
2 import numpy as np
3 WINDOW_NAME = 'GreenBallTracker'
4 def track_green_object(image):
5     blur = cv2.GaussianBlur(image, (5,5),0)
6     hsv = cv2.cvtColor(blur, cv2.COLOR_BGR2HSV)
7     lower_green = np.array([40,70,70])
8     upper_green = np.array([80,200,200])
9     mask = cv2.inRange(hsv, lower_green, upper_green)
10    bmask = cv2.GaussianBlur(mask, (5,5),0)
11    moments = cv2.moments(bmask)
12    m00 = moments['m00']
13    centroid_x, centroid_y = None, None
14    if m00 != 0:
15        centroid_x = int(moments['m10']/m00)
16        centroid_y = int(moments['m01']/m00)
17    ctr = (-1,-1)
18    if centroid_x != None and centroid_y != None:
19        ctr = (centroid_x, centroid_y)
20        cv2.circle(image, ctr, 4, (0,0,0))
21        cv2.imshow(WINDOW_NAME, image)
22        if cv2.waitKey(1) & 0xFF == 27:
23            ctr = None
24        return ctr
25 if __name__ == '__main__':
26    capture = cv2.VideoCapture(0)
27    while True:
28        okay, image = capture.read()
29        if okay:
30            if not track(image):
31                break
32            if cv2.waitKey(1) & 0xFF == 27:
33                break
34        else:
35            print('Capture failed')
36            break
37

```

Рисунок 7 – Исходный код функции распознавания зеленого объекта

Появилась функция def track\_green\_object(image), что возвращает координаты зелёного объекта, если найден.

И так же надо отметить маркером вокруг найденного объекта, для этого мы воспользуемся базовой OpenCV функцией для рисования прямоугольника: cv2.rectangle.

Следующий фрагмент кода, что:

- получает изображение (из v0)
- находит объект (что-то зелёное)
- добавляет маркер (желтый прямоугольник)
- возвращает изображение (в v1)

```

err, resolution, image = vrep.simxGetVisionSensorImage(clientID, v0, 0, vrep.simx_opmode_buffer)
if err == vrep.simx_return_ok:
    image_byte_array = array.array('b', image)
    image_buffer = I.frombuffer("RGB", (resolution[0],resolution[1]), image_byte_array, "raw", "RGB", 0, 1)
    img2 = numpy.asarray(image_buffer)
    ret = track_green_object(img2)
    if ret:
        cv2.rectangle(img2, (ret[0]-15,ret[1]-15), (ret[0]+15,ret[1]+15), (0xff,0xf4,0xd0), 1)
        img2 = img2.ravel()
        vrep.simxSetVisionSensorImage(clientID, v1, img2, 0, vrep.simx_opmode_oneshot)

```

Рисунок 8 – Исходный код функции рисования прямоугольника

Далее, для получения результата, необходимо запустить сцену и скрипт. В итоге у нас получился виртуальный робот, распознающий зеленый объект и выделяющий его в прямоугольник (рис. 9).

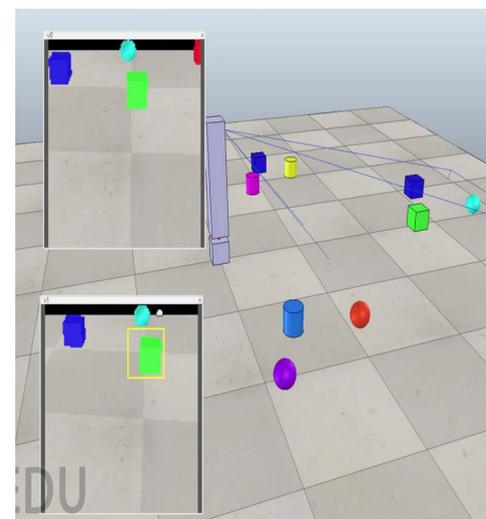


Рисунок 9 – Результат работы мобильного робота в среде V-REP

### ВЫВОДЫ

Основываясь на том, что библиотека OpenCV так же широко используется для оснащения мобильных роботов компьютерным зрением, мы можем использовать идентичный исходный код с незначительными изменениями для программирования реальных роботов.

Данный подход позволяет облегчить тестирование созданных алгоритмов управления, что в свою очередь уменьшает затраты на разработку.

1 Википедия – свободная энциклопедия [Электронный ресурс]. – <http://wikipedia.org>.

2 Официальная документация симулятора V-REP URL [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.coppeliarobotics.com/helpFiles/>

3 Rohmer Eric, Singh and Marc Freese. V-REP: a Versatile and Scalable Robot Simulation Framework / Eric Rohmer, P. N. Surya. – 2013.

4 Глория, Буэно Гарсия. Обработка изображений с помощью OpenCV / Глория Буэно Гарсия и др. – М. : ДМК Пресс, 2016. – 210 с.

Материал поступил в редакцию 13.06.17.

*О. Салыкова, Р. Жантекин*

**V-REP робототехникалық симуляторымен мобильді роботтарының компьютерлік көруі**

А. Байтұрсынов атындағы  
Қостанай мемлекеттік университеті, Қостанай қ.  
Материал 13.06.17 баспаға түсті.

*O. Salykova, R. Zhantekin*

**Computer vision of mobile robots designed in robotic simulator V-REP**

A. Baytursynov Kostanay State University, Kostanay.  
Material received on 13.06.17.

*Осы мақалада автор робототехникалық жүйелердегі компьютерлік көру мәселесін қарастырды. Жұмыста V-REP робототехникалық симуляторына шолу және оның компьютерлік көруін басқару үшін шеттегі скриптармен өзара әрекет етуі беріліп отыр.*

*In this article the authors analyzed the computer vision of robotic systems. This paper presents review of robotic simulator V-REP and its interactive process with other scripts for computer vision controller.*

УДК 372.851:510

**Б. Н. Дроботун, А. Д. Катлабуга**

<sup>1</sup>д.п.н., профессор; <sup>2</sup>магистрант, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар  
e-mail: <sup>1</sup>[drobotun.nina@mail.ru](mailto:drobotun.nina@mail.ru), <sup>2</sup>[pharrell-happy@mail.ru](mailto:pharrell-happy@mail.ru)

### **АЛГЕБРЫ МНОЖЕСТВ, КАК АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ БУЛЕВЫХ СИГНАТУР (II)**

*В данной работе рассматриваются общие технологии описания подсистем алгебраических систем применительно к булевым алгебрам подмножеств непустых множеств и на основе полученного описания определяются возможности представления элементов конечнопорожденных подалгебр этих алгебр посредством теоретико-множественных аналогов совершенных дизъюнктивных нормальных форм.*

*Ключевые слова: алгебраическая система, подсистема, булева алгебра, подалгебра, атом, диаграмма Эйлера-Венна, термальная операция, характеристика элемента.*

#### ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является непосредственным продолжением работы [1]. В ней дается характеристика инструментально-технологических средств и научно-методологических оснований, на которых базируется разработка общей концепции алгебраического уравнения.

Основное внимание в работе уделяется описанию строения элементов конечно-порожденных подалгебр булевых алгебр посредством использования понятий характеристики и атома.

С целью обеспечения удобства применения ссылок и чтения в данной работе продолжается нумерация пунктов и формул, начатая в работе [1].

#### ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

4 Описание общего метода решения теоретико-множественных уравнений.

$$\mathbf{A}(A_1; A_2; \dots; A_n; X) = \mathbf{B}(A_1; A_2; \dots; A_n; X) \quad (5)$$

от одной переменной  $X$  над алгеброй,  $A_1; A_2; \dots; A_n \in M$ , данное в [2], показывает, что границы множества решений уравнения (5), при условии его совместности, выражаются через его «коэффициенты»  $A_1; A_2; \dots; A_n$ , посредством применения к ним основных операций алгебры  $\mathbf{B}(M)$ , то есть принадлежат подалгебре этой алгебры, порожденной элементами  $A_1; A_2; \dots; A_n$ .

В работе [2] было получено «внутреннее» описание подсистемы  $\mathbf{M}(A) = \langle M(A); \overset{\varphi}{\sigma} \rangle$  алгебраической системы  $\mathbf{M} = \langle M; \overset{\varphi}{\sigma} \rangle$ , порожденной подмножеством  $A$  носителя  $M$  этой системы.

А именно, носитель  $M(A)$  подсистемы  $\mathbf{M}(A)$  есть множество всевозможных значений  $\overset{\varphi}{t}(a_1; a_2; \dots; a_n)$  термальных операций  $\overset{\varphi}{t} = \overset{\varphi}{t}(x_1; x_2; \dots; x_n)$  системы  $M$  при всевозможных значениях  $a_1; a_2; \dots; a_n \in A$  для переменных  $x_1; x_2; \dots; x_n$ , соответственно.

Пусть теперь  $M$  – произвольное непустое множество,  $\mathbf{B}(M) = \langle B(M); \cup; \cap; \bar{\phantom{x}}; \emptyset; M \rangle$  – булева алгебра подмножеств этого множества и  $A_1; A_2; \dots; A_n \in B(M)$ . Рассматривая алгебру  $\mathbf{B}(M)$  в качестве системы  $M$  и подмножество  $\{A_1; A_2; \dots; A_n\}$  ее носителя  $B(M)$  в качестве подмножества  $A$ , конкретизируем внутреннее описание подсистемы применительно к подалгебре  $\mathbf{B}_n = \mathbf{B}(\{A_1; A_2; \dots; A_n\})$ , как подсистемы системы  $\mathbf{B}(M)$ , порожденной подмножеством  $\{A_1; A_2; \dots; A_n\} \subseteq B(M)$ . Обозначим эту подалгебру алгебры  $\mathbf{B}(M)$  через  $\mathbf{B}_n(M) = \langle B_n(M); \cup; \cap; \bar{\phantom{x}}; \emptyset; M \rangle$ .

С этой целью, как это было сделано в работе [2], рассмотрим отображение  $\lambda; M \rightarrow E^n$ , определенное по правилу:

$$(\forall a \in M)(\lambda(a) = \tilde{\sigma}_a^{(n)}),$$

где  $\tilde{\sigma}_a^{(n)} = (\sigma_1^{(a)}; \sigma_2^{(a)} \dots \sigma_n^{(a)})$  и  $\tilde{\sigma}_i^{(a)} = \begin{cases} 0, & \text{если } a \notin A_i; \\ 1, & \text{если } a \in A_i; \end{cases} (i=1; 2; \dots; n)$ .

Двоичный набор  $\tilde{\sigma}_a^{(n)}$  будем называть, далее, характеристикой элемента  $a$  и обозначать через  $\chi(a)$ . Заметим, что набор  $\chi(a)$  действительно характеризует элемент  $a$  посредством его принадлежности (или не принадлежности) подмножествам  $A_1; A_2; \dots; A_n$ .

Пусть  $P_\lambda = \lambda \circ \lambda^{-1}$ , то есть  $P_\lambda$  – бинарное отношение равнообразности, заданное на множестве  $M$  по правилу:

$$(\forall a; b \in M)(aP_\lambda b \Leftrightarrow \lambda(a) = \lambda(b))$$

Так как  $P_\lambda$  – отношение эквивалентности и  $\lambda(a)$  – характеристика элемента  $a$ , то

$$[a]_{P_\lambda} = \{b / (b \in M) \& (\chi(a) = \chi(b))\},$$

то есть, для любого элемента  $a \in M$ , класс эквивалентности  $[a]_{P_\lambda}$ , порожденный этим элементом, состоит из тех и только тех элементов множества  $M$ , которые имеют одну и ту же характеристику, равную  $\chi(a)$ .

Элементы носителя  $B_n(M)$  подалгебры  $\mathbf{B}_n(M)$  как значения термальных операций  $\overset{\varphi}{t} = \overset{\varphi}{t}(x_1; x_2; \dots; x_n)$  сигнатуры  $\sigma$  от порождающих элементов  $A_1; A_2; \dots; A_n$ , где  $\varphi$  – интерпретация сигнатуры  $\sigma$  на множестве  $B(M)$ , определенная в пункте 3, будем обозначать через  $\mathbf{A}(A_1; A_2; \dots; A_n)$ .

Пусть  $\mathbf{A}(A_1; A_2; \dots; A_n) \in B_n(M)$ . Положим

$$\chi(\mathbf{A}) = \{\chi(a) / a \in \mathbf{A}(A_1; A_2; \dots; A_n)\},$$

то есть  $\chi(\mathbf{A})$  множество характеристик всех элементов, принадлежащих  $\mathbf{A}(A_1; A_2; \dots; A_n)$ , как подмножеству множества  $M$ .

Множество  $\chi(\mathbf{A})$ , по аналогии с понятием характеристики элемента  $a$  множества  $M$ , будем называть характеристикой подмножества  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(A_1; A_2; \dots; A_n)$ , как элемента множества  $B_n(M)$ .

Простейшие свойства характеристик элементов носителя  $B_n(M)$  подалгебры  $\mathbf{B}_n(M)$  даются в нижеследующем предложении В (доказательство этого предложения приводится в [3]).

Предложение 2. Пусть  $M$  – непустое множество  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(A_1; A_2; \dots; A_n)$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(A_1; A_2; \dots; A_n) \in B_n(M)$ . Тогда

- 1)  $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})\chi(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \chi(\mathbf{A}) \cup \chi(\mathbf{B})$ ;
- 2)  $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})\chi(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \chi(\mathbf{A}) \cap \chi(\mathbf{B})$ ;
- 3)  $\chi(\overline{\mathbf{A}}) = E^n \setminus \chi(\mathbf{A})$ ;
- 4)  $\chi(\emptyset) = \emptyset$ ;
- 5)  $\chi(M) = E^n$ .

Используя вышеприведенное понятие характеристики элементов  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(A_1; A_2; \dots; A_n) \in B_n(M)$ , покажем, что для получения носителя подалгебры  $\mathbf{B}_n(M)$  алгебры  $\mathbf{B}(M)$ , порожденной подмножествами  $A_1; A_2; \dots; A_n$ , достаточно брать значения  $\overset{\varphi}{t}(A_1; A_2; \dots; A_n)$  не всевозможных термальных операций  $\overset{\varphi}{t}(x_1; x_2; \dots; x_n)$ , где  $\overset{\varphi}{t}(x_1; x_2; \dots; x_n) \in \text{Term}_\sigma(X)$ , а только термальных операций специального вида:

$$\overset{\varphi}{t}(x_1; x_2; \dots; x_n) = \bigcup_{(\sigma_1; \sigma_2; \dots; \sigma_n) \in \pi; \pi \subseteq E^n} (x_1^{\sigma_1} \cap x_2^{\sigma_2} \cap \dots \cap x_n^{\sigma_n}), \quad (6)$$

где,  $x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} \bar{x}_i, & \text{если } \sigma_i = 0; \\ x_i, & \text{если } \sigma_i = 1; \end{cases} \quad (i=1;2;\dots;n)$

Предложение 3. Пусть  $a \in M$  и  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(A_1; A_2; \dots; A_n) \in \mathbf{B}_n(M)$ . Тогда:

если  $\chi(a) = (\sigma_1^{(a)}; \sigma_2^{(a)} \dots \sigma_n^{(a)})$ , то  $a \in A_1^{\sigma_1^{(a)}} \cap A_2^{\sigma_2^{(a)}} \cap \dots \cap A_n^{\sigma_n^{(a)}}$ , где

$$A_i^{\sigma_i^{(a)}} = \begin{cases} \bar{A}_i, & \text{если } \sigma_i^{(a)} = 0; \\ A_i, & \text{если } \sigma_i^{(a)} = 1, \end{cases} \quad (i=1;2;\dots;n)$$

2)  $[a]_{P_\varphi} = A_1^{\sigma_1^{(a)}} \cap A_2^{\sigma_2^{(a)}} \cap \dots \cap A_n^{\sigma_n^{(a)}}$ , где  $\sigma_i^{(a)}$  и  $A_i^{\sigma_i^{(a)}}$  определены в вышеприведенном утверждении 1),  $(i=1;2;\dots;n)$ .

3)  $(a \in \mathbf{A}(A_1; A_2; \dots; A_n)) \Leftrightarrow ([a]_{P_\varphi} \subseteq \mathbf{A}(A_1; A_2; \dots; A_n))$ ;

4)  $\mathbf{A}(A_1; A_2; \dots; A_n) = \cup_{(\sigma_1; \sigma_2; \dots; \sigma_n) \in \chi(\mathbf{A})} (A_1^{\sigma_1} \cap A_2^{\sigma_2} \cap \dots \cap A_n^{\sigma_n})$ .

Доказательство. Утверждения 1) – 4) этого предложения следуют из определения характеристики  $\chi(a)$  элемента  $a$ .

Приведем, для примера, доказательства утверждений 1) и 4).

1) Если  $\chi(a) = (\sigma_1^{(a)}; \sigma_2^{(a)} \dots \sigma_n^{(a)})$ , то, так как  $\chi(a) = \lambda(a)$ , из определения отображения  $\lambda$  непосредственно получаем, что  $a \in A_i^{\sigma_i^{(a)}} = \begin{cases} \bar{A}_i, & \text{если } \sigma_i^{(a)} = 0; \\ A_i, & \text{если } \sigma_i^{(a)} = 1, \end{cases}$  для любого  $(i=1;2;\dots;n)$ . Следовательно

$$a \in A_1^{\sigma_1^{(a)}} \cap A_2^{\sigma_2^{(a)}} \cap \dots \cap A_n^{\sigma_n^{(a)}}.$$

4) Докажем равенство (4), применяя метод включений. Пусть  $a \in \mathbf{A}(A_1; A_2; \dots; A_n)$  и  $\chi(a) = (\sigma_1^{(a)}; \sigma_2^{(a)} \dots \sigma_n^{(a)})$ . Тогда, согласно утверждению 1) получаем, что  $a \in A_1^{\sigma_1^{(a)}} \cap A_2^{\sigma_2^{(a)}} \cap \dots \cap A_n^{\sigma_n^{(a)}}$ .

Отсюда, с учетом того, что  $\chi(a) \in \chi(\mathbf{A})$ , получаем, что  $a \in \cup_{(\sigma_1; \sigma_2; \dots; \sigma_n) \in \chi(\mathbf{A})} (A_1^{\sigma_1} \cap A_2^{\sigma_2} \cap \dots \cap A_n^{\sigma_n})$ .

Таким образом,

$$\mathbf{A}(A_1; A_2; \dots; A_n) \subseteq \cup_{(\sigma_1; \sigma_2; \dots; \sigma_n) \in \chi(\mathbf{A})} (A_1^{\sigma_1} \cap A_2^{\sigma_2} \cap \dots \cap A_n^{\sigma_n}).$$

Обратное включение доказывается аналогичным образом.

Отметим, что правая часть равенства 4) есть значение термальной операции вида (6) при  $x_i = A_i, i=1;2;\dots;n$ .

5 Равенство (4) предложения 3, определяющее строение элементов булевой алгебры  $\mathbf{B}_n(\mathbf{M})$ , можно охарактеризовать также, используя понятие

атома. Определение этого понятия применительно к произвольной булевой алгебре

$$\mathbf{B} = \langle \mathbf{B}; \sqcup; \sqcap; \bar{\phantom{x}}; 0; 1 \rangle.$$

дается следующим образом.

Этот подход был реализован в работе [3] без доказательного обоснования корректности применяемых технологических процедур

Определение 3. Ненулевой элемент  $a \in B$  называется атомом булевой алгебры  $\mathbf{B}$ , если

$$(\forall b \in B)((a \sqcap b = b) \Rightarrow (b = 0)). \quad (7)$$

В случае, когда для элементов  $a; b \in B$  выполняется условие, говорят, что элемент  $b$  меньше, чем  $a$  (или элемент  $b$  лежит под элементом  $a$ ) и употребляют запись  $b \leq a$ .

Таким образом, в терминах отношения  $\leq$ , понятие (7) атома может быть определено так: элемент  $a$  булевой алгебры  $\mathbf{B}$  называется атомом, если

$$(\forall b \in B)((b \leq a) \Rightarrow ((b = 0) \vee (b = a))),$$

то есть элемент  $a$  является атомом тогда и только тогда, когда любой элемент, лежащий под этим элементом, равен 0 или совпадает с ним.

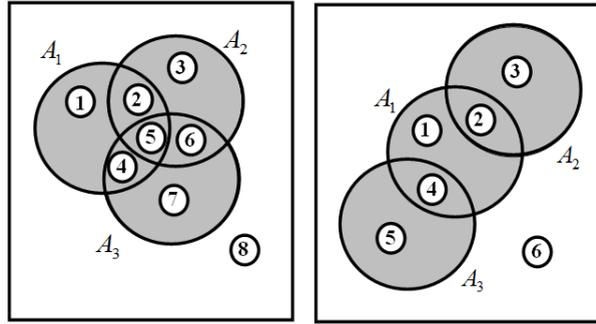
Возвращаясь вновь к подалгебре  $\mathbf{B}_n(M)$ , отметим, что из утверждений 1) – 4) предложения 3 следует:

– для любого набора  $\tilde{\sigma}^{(n)} = (\sigma_1; \sigma_2 \dots \sigma_n) \in E^n$ , непустое подмножество множества  $M$  вида  $A_1^{\sigma_1} \cap A_2^{\sigma_2} \cap \dots \cap A_n^{\sigma_n}$  является атомом подалгебры  $\mathbf{B}_n(M)$ ;

– любой элемент  $\mathbf{A}(A_1; A_2; \dots; A_n) \in \mathbf{B}_n(M)$  является объединением конечной совокупности атомов, причем число атомов этой совокупности равно числу различных характеристик, которые могут иметь элементы из  $\mathbf{A}(A_1; A_2; \dots; A_n)$ , как подмножества множества  $M$ , то есть числу  $|\chi(\mathbf{A})|$ .

Так как число различных элементов множества  $E^n = \{(\sigma_1; \sigma_2 \dots \sigma_n) / \sigma_i \in E, i=1;2;\dots;n\}$  равно  $2^n$ , то число атомов булевой алгебры  $\mathbf{B}_n(M)$  не превосходит  $2^n$ . Из того, что каждый элемент булевой алгебры  $\mathbf{B}_n(M)$  является объединением конечного числа атомов следует, что эта алгебра является конечной и число ее элементов не превосходит  $2^{2^n}$ , [4].

Наглядное представление об атомах булевой алгебры  $\mathbf{B}_n(M)$  и их возможном числе (при  $n=3$ ) дает рисунок 3. а), б)).



а)  $\mathbf{B}_3(M)$  б)  $\mathbf{B}_3(M)$   
Рисунок 3 – Атомы булевой алгебры

На рисунке 3. а) посредством диаграммы Эйлера-Венна даются представления атомов  $A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$ ,  $A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3$ ,  $\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3$ ,  $A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3$ ,  $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ ,  $\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3$ ,  $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3$ ,  $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$  булевой алгебры  $\mathbf{B}_3(M)$ . Представлениями этих атомов являются области ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧, соответственно. Число атомов этой алгебры равно  $2^3 = 8$  и, следовательно, число ее элементов равно  $2^{2^3} = 256$ .

В случае другого подхода к выбору множеств  $A_1; A_2; A_3$ , который нашел наглядное отражение на рисунке 3.б), в алгебре  $\mathbf{B}_3(M)$  будет только 6 атомов:  $A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$ ,  $A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3$ ,  $A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3$ ,  $\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3$ ,  $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3$ ,  $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$ . Этим атомам соответствуют области ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥. Области, соответствующие элементам  $A_1 \cap A_2 \cap A_3$  и  $\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3$ , являются пустыми, что объясняет уменьшение числа атомов во втором случае. Число элементов алгебры  $\mathbf{B}_3(M)$ , в этом случае, будет равно  $2^6=64$ .

Для получения булевой алгебры  $\mathbf{B}_t(M)$ ,  $t \in N$ , в которой все подмножества вида

$$A_1^{\sigma_1} \cap A_2^{\sigma_2} \cap \dots \cap A_t^{\sigma_t} \tag{8}$$

для любого  $\tilde{\sigma}^{(t)} = (\sigma_1; \sigma_2 \dots \sigma_n) \in E^t$ , были бы ненулевыми, то есть являлись бы атомами этой алгебры, достаточно взять в качестве множества  $M$  любое бесконечное множество и всякий раз, предполагая, что атомам булевой алгебры  $\mathbf{B}_t(M)$  соответствуют бесконечные подмножества множества

$M$  вида (8), делить (при переходе от алгебры  $\mathbf{B}_t(M)$  к алгебре  $\mathbf{B}_{t+1}(M)$ ) каждое из этих подмножеств на две непересекающиеся бесконечные части.

Наглядное представление о подобном процессе получения атомов булевой алгебры  $\mathbf{B}_{t+1}(M)$  из атомов алгебры  $\mathbf{B}_t(M)$  (при  $t = 1; 2; \dots$ ) дает рисунок 4.

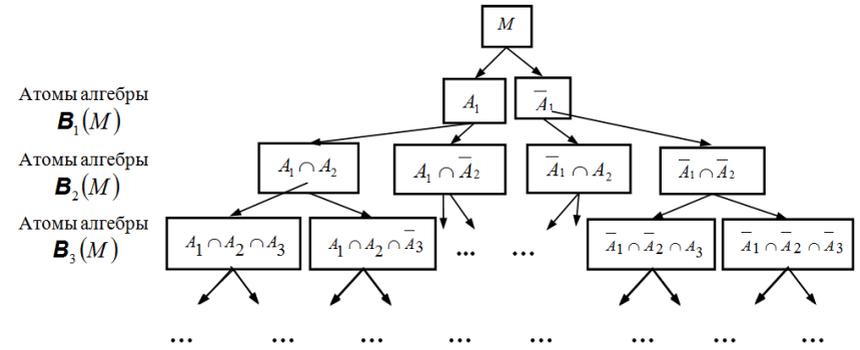


Рисунок 4 – Атомы булевых алгебр  $\mathbf{B}_t(M)$ ,  $t = 1; 2; 3; \dots$

В частности, атомы булевой алгебры  $\mathbf{B}_3(M)$  получаются из атомов булевой алгебры  $\mathbf{B}_2(M)$  делением их на две части посредством множества  $A_3$ .

Специфику деления атомов при переходе от алгебры  $\mathbf{B}_t(M)$  к алгебре  $\mathbf{B}_{t+1}(M)$ , при  $t = 1; 2; \dots$  более полно отражает рисунок 5 а), б), в),

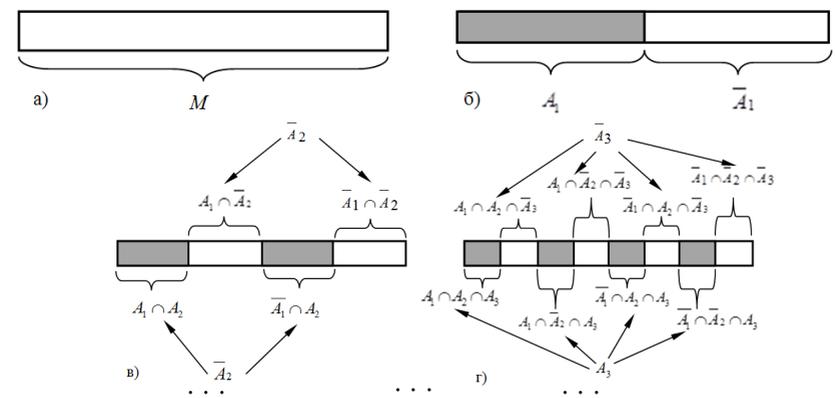


Рисунок 5 – Атомы алгебр  $\mathbf{B}_t(M)$ ,  $t = 1; 2; 3; \dots$

Заметим, что  $\mathbf{B}_0(M) = \langle \{\emptyset; M\}; \cup; \cap; \bar{\phantom{x}}; \emptyset; M \rangle$  и эта алгебра имеет единственный атом – множество  $M$ , что находит соответствующее отражение на рисунке 5.а).

На этом рисунке находит также наглядное отражение механизм деления каждого атома подалгебры  $\mathbf{B}_t(M)$  (с порождающими  $A_1; A_2; \dots; A_t$ ) на две непустые части (посредством подмножества  $A_{t+1}$ ), которые становятся атомами подалгебр  $\mathbf{B}_{t+1}(M)$ , порожденной подмножествами  $A_1; A_2; \dots; A_{t+1}$ .

В частности при  $t = 2$  (смотри рисунок 5.в), г)), будем иметь:

$$(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cap A_3; \quad (9)$$

$$(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cap \bar{A}_3. \quad (10)$$

Равенства (9) и (10) показывают, что атомы алгебры  $\mathbf{B}_3(M)$  получаются из атомов алгебры  $\mathbf{B}_2(M)$  посредством пересечения каждого из них с подмножествами  $A_3$  и  $\bar{A}_3$ , то есть действительно делятся посредством подмножества  $A_3$  на две непустые части.

### ВЫВОДЫ

Конечнопорожденная подалгебра  $\mathbf{B}_n(M)$  булевой алгебры  $\mathbf{B}(M)$  подмножеств непустого множества  $M$ , построение и описание которой было предпринято в данной статье, представляет собой своеобразное поле наглядно – демонстрационного развертывания инструментально – технологических средств и алгоритмических процедур, посредством которых обеспечиваются возможности обобщения и распространения общего понятия алгебраического уравнения над числовыми полями на уравнения над произвольными алгебраическими системами.

Выбор булевой алгебры подмножеств из широкого многообразия различных алгебраических систем в качестве основы для первого апробирования базовых положений общей концепции уравнения был обусловлен, возможностями наглядного представления процессов и результатов оперирования с теоретико-множественными объектами и их совокупностями. Тем самым, общие схемы и технологии семантической

реализации синтаксических конструкций, применительно к булевым сигнатурам и алгебрам множеств, приобретают наиболее доступные для восприятия формы.

Следует также отметить, что особенности структурного строения конечнопорожденных булевых алгебр, целенаправленная конкретизация которых, применительно к конечнопорожденным алгебрам множеств, была предпринята в предлагаемой работе, обеспечили возможность получения общего метода решения теоретико-множественных уравнений [3].

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 **Drobotun, B. N., Katlabuga, A. D.** Algebras of sets, as algebraic systems of Boolean signatures (I) – Вестник ПГУ. Серия физико-математическая, 2017.

2 **Дроботун, Б. Н., Катлабуга, А. Д.** О концепции «Уравнение» над произвольными алгебраическими системами (II). – Вестник ПГУ. Серия физико-математическая, 2016. – № 2. – С. 22-32.

3 **Дроботун, Б. Н., Катлабуга, А. Д.** О концепции «Уравнение» над произвольными алгебраическими системами (I). – Вестник ПГУ. Серия физико-математическая, 2016. – № 2. – С. 7-21.

4 **Гончаров, С. С., Дроботун, Б. Н., Никитин, А. А.** Алгебраические и алгоритмические свойства логических исчислений. Часть II. – Новосибирск: Издательство НГУ, 2009. – С. 360.

Материал поступил в редакцию 13.06.17.

*Б. Н. Дроботун, А. Д. Катлабуга*

**Булева сигнатурасының алгебралық жүйелері алгебралық жиындар ретінде (II)**

С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.  
Материал 13.06.17 баспаға түсті.

*B. N. Drobotun, A. D. Katlabuga*

**Algebras of sets, as algebraic systems of Boolean signatures (II)**

S. Toraihyrov Pavlodar State University, Pavlodar.  
Material received on 13.06.17.

*Осы жұмыста алгебралық жүйелердің ішкі жүйелерінің жалпы технологияларының сипаттамасы Булева алгебрасының бос емес жиындарының ішкі жиыны мен алынған сипаттама негізінде*

соңы жинақталған ішкі алгебра элементтерін Set-теориялық аналогтардың тамаша дизъюнктивтік қалыпты нысандары арқылы ұсыну мүмкіндіктері анықталады.

*In this paper, we consider general technologies for describing subsystems of algebraic systems with respect to Boolean algebras of subsets of non-empty sets, and on the basis of the description obtained, the possibilities of representing elements of finitely generated subalgebras of these algebras are determined by means of set-theoretic analogs of perfect disjunctive normal forms.*

УДК 517.2

**Б. Н. Дроботун<sup>1</sup>, А. К. Хасенов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>д.п.н., профессор; <sup>2</sup>магистрант, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар  
e-mail: <sup>1</sup>drobotun.nina@mail.ru, <sup>2</sup>ace.xak@gmail.ru

### **ТЕОРЕМА КОМПАКТНОСТИ ДЛЯ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫХ ИСЧИСЛЕНИЙ (I)**

*В данной работе выявляются возможности теоретико-модельной интерпретации синтаксических конструкций пропозициональных исчислений и аналоги инструментально-технологических средств теории фильтров, используемых для доказательства теоремы компактности языка исчисления предикатов произвольной сигнатуры, применительно к исчислению высказываний.*

*Ключевые слова: пропозициональное исчисление, теорема компактности, модель, ультрафильтр, локальная теорема, сигнатура, формула, локальная выполнимость.*

#### **ВВЕДЕНИЕ**

Теорема компактности (или локальная теорема Мальцева) формулируется следующим образом: множество предложений  $\Sigma$  произвольной сигнатуры  $\sigma$  имеет модель тогда и только тогда, когда каждое конечное подмножество этого множества имеет модель.

Эта теорема относится к числу наиболее фундаментальных результатов математической логики и общей теории алгебраических систем.

Для языков исчисления предикатов счетных сигнатур эта теорема вытекает из теоремы Геделя о полноте. Независимое доказательство компактности языка исчисления предикатов произвольной сигнатуры было получено академиком А. И. Мальцевым в 1936 г. в работе [1]. В этой же работе Мальцевым была впервые отмечена возможность использования общей теоремы компактности для получения конкретных алгебраических утверждений. Намеченная в работе [1] программа получила дальнейшее развитие в его трудах по теории моделей и теории алгебраических систем. В частности, в работе [2] был разработан один из общих методов получения локальных теорем теории групп.

В более общем случае, когда  $\Sigma$  является произвольным множеством формул исчисления предикатов сигнатуры  $\sigma$ , то есть формул, которые могут содержать свободные переменные, теорема компактности также имеет место. В этом случае ее формулировка приобретает следующую форму: множество  $\Sigma$  – формул произвольной сигнатуры  $\sigma$  выполнимо тогда и только тогда, когда выполнимо каждое конечное подмножество этого множества.

Эта формулировка теоремы компактности является наиболее продуктивной с позиции выявления ее аналога применительно к пропозициональным исчислениям.

В связи с этим, приведем определения понятий выполнимости и конечной выполнимости семейств формул языка  $L_\sigma$  и некоторых других сопутствующих им понятий [3; 4]:

– означиванием множества  $X = \{x_1; x_2; \dots; x_t; \dots\}$  – предметных переменных в непустом множестве  $M$  называется отображение  $\gamma : X \rightarrow M$  множества  $X$  в множестве  $M$ , посредством которого каждой переменной  $x_i$  ставится (в качестве значения) элемент  $\gamma(x_i)$  множества  $M$ ,  $i = 1; 2; \dots; t; \dots$ ;

– алгебраическая система  $M = \langle M; \sigma \rangle$  называется моделью множества  $\Sigma$  – формул сигнатуры  $\sigma$ , если существует такое означивание  $\gamma : X \rightarrow M$  множества предметных переменных  $X = \{x_1; x_2; \dots; x_t; \dots\}$ , которые могут входить в формулы из множества  $\Sigma$ , что

$${}^{\varphi}A(\gamma(x_1); \gamma(x_2); \dots; \gamma(x_n)) = u,$$

для любой формулы  $A(x_1; x_2; \dots; x_n) \in \Sigma$  (то есть, при означивании  $\gamma$ , все формулы из  $\Sigma$  превращаются на этой системе в истинные высказывания);

– множество формул  $\Sigma$  называется выполнимым, если оно имеет модель;

– множество формул  $\Sigma$  называется конечно (или локально) выполнимым, если каждое конечное подмножество этого множества имеет модель.

### ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Алфавит формального символического языка задается посредством всех его символов. Конечная последовательность записанных друг за другом символов алфавита называется словом. Слова будут обозначаться через  $A; B; C; \dots$  или с использованием индексов – через  $A_1; A_2; \dots; A_i; \dots$ .

К числу слов алфавита  $A$  относится и, так называемое, пустое слово  $\emptyset$ , в записи которого не используется ни один из символов этого алфавита.

Если  $A$  и  $B$  – произвольные слова, со слово  $AB$ , полученное приписыванием к слову  $A$  слова  $B$ , называется соединением этих слов. Если существуют такие слова  $C_1$  и  $C_2$ , что  $A = C_1BC_2$ , то слово  $B$  называется подсловом слова  $A$ . Заметим, что слово  $A$  является подсловом самого себя, так как  $A = \emptyset A \emptyset$ , то есть в качестве слов  $C_1$  и  $C_2$ , в данном случае, выступает пустое слово  $\emptyset$ .

1 К числу основных составляющих логического исчисления  $J$  относятся:

- а) алфавит  $A(J)$  и множества  $C(A(J))$  слов этого алфавита;
- б) подмножество  $\mathcal{L}(A(J))$  множества  $C(A(J))$ , элементы которого будут называться формулами этого исчисления, а множество всех формул – его языком.

Отличительной особенностью пропозициональных исчислений является то, что алфавит  $A(J)$  этого исчисления содержит лишь символы пропозициональных (логических) связей из множества  $\{\vee; \&; \rightarrow; \leftrightarrow; \neg\}$ , символы  $X_1; X_2; \dots; X_i; \dots$  – пропозициональных, то есть высказывательных, переменных и вспомогательные символы «(», «)» – левой и правой скобок.

Тем самым, каждое пропозициональное исчисление, как и традиционное исчисление высказываний, также является некоторым (нетрадиционным) исчислением высказываний.

Как было отмечено, под словом алфавита  $A(J)$  понимается любая конечная последовательность написанных друг за другом символов этого алфавита.

Множество формул пропозиционального исчисления определяется индуктивно (по шагам):

- а) Базис индукции (шаг 0). Любая пропозициональная переменная  $X_i$  является формулой,  $i = 1; 2; \dots; t; \dots$ . Такие формулы будем называть

формулами шага 0. Единственной подформулой формулы шага 0 является сама эта формула.

б) Индукционное предположение (шаг  $k$ ). Предположим, что формулы шагов  $0; 1; \dots; k$  уже определены и определены множества всех подформул каждой из этих формул.

в) Индукционный шаг (шаг  $k+1$ ). Если слова  $A$  и  $B$  алфавита  $A(J)$  являются формулами некоторых шагов  $0; 1; \dots; k$ , то слова  $(A \vee B); (A \& B); (A \rightarrow B); (A \leftrightarrow B); \neg A$  также являются формулами этого алфавита.

Подформулами формул  $(A \vee B); (A \& B); (A \rightarrow B); (A \leftrightarrow B)$  являются все такие подслова формул  $A$  и  $B$ , которые являются формулами, а также сами эти формулы. Подформулами формулы  $\neg A$  будут все подслова формулы  $A$ , которые являются формулами, а также сама эта формула.

Под сложностью формулы  $A \in \mathcal{L}(J)$  понимается наименьший из номеров шагов (вышеопределенного индуктивного процесса), на котором эта формула была получена впервые. Сложность формулы  $A$  будем обозначать через  $S(A)$ . Нетрудно видеть, что

$$S(A \vee B) = S(A \& B) = S(A \rightarrow B) = S(A \leftrightarrow B) = \max \{S(A); S(B)\} + 1; \\ S(\neg A) = S(A) + 1.$$

В качестве аксиом пропозициональных исчислений выбираются произвольные подмножества множества формул этого исчисления. Тем самым, в зависимости от выбора системы аксиом получают различные пропозициональные исчисления. В качестве правил вывода любого из таких исчислений берутся обычно правило заключения и правило подстановки.

В вышеприведенном определении языка пропозиционального исчисления, при определении формул, использовались все логические связи из множества  $\{\vee; \&; \rightarrow; \leftrightarrow; \neg\}$ . Как отмечалось ранее, некоторые из этих связей могут не входить в алфавит исчисления. В частности, в алфавит исчисления высказываний не входит связка « $\neg$ ».

2 Базовыми составляющими языка исчисления предикатов являются множества  $Term_\sigma(X)$  и  $\mathcal{L}(A_\sigma)$  – термов и формул, соответственно [3; 5; 6].

С целью выявления возможностей семантической (теоретико-модельной) интерпретации языковых конструкций пропозициональных исчислений, реализуем общие схемы построения множеств  $Term_\sigma(X)$  и  $\mathcal{L}(A_\sigma)$  применительно к сигнатуре

$$\sigma_1 = \langle P_1^0; P_2^0; \dots; P_t^0; \dots; c_1; c_2 \rangle.$$

Характеризуя сигнатуру  $\sigma_i$ , отметим, что: она не содержит функциональных символов; каждый из бесконечного множества ее предикатных символов является нульместным; множество константных символов является двухэлементным. Алфавит  $A_{\sigma_i}$  этой сигнатуры, в соответствии с этим, не будет содержать функциональных символов, символа « $\Rightarrow$ » для отношения равенства, символов для предметных переменных и кванторных символов.

То есть, в соответствии с индуктивным процессом получения множества  $Term_{\sigma}(X)$ , применительно к сигнатуре  $\sigma_i$  будем иметь:

а) Базис индукции (шаг 0). Константные символы  $c_1$  и  $c_2$  сигнатуры  $\sigma_i$  являются термами, то есть  $T_0 = \{c_1; c_2\}$ . Так как множество функциональных символов сигнатуры  $\sigma_i$  является пустым, то других термов мы не получим.

Действительно, отправляясь от шага 0 к шагам с номерами 1; 2; ...;  $k$ ;  $k+1$ ; ... получаем:

$$T_0 = T_1 = \dots = T_k = T_{k+1} = \dots = \{c_1; c_2\},$$

то есть

$$Term_{\sigma}(X) = \bigcup_{k=0}^{\infty} T_k = \{c_1; c_2\}.$$

Переходя к индуктивному построению множества  $\mathcal{L}(A_{\sigma_i})$ , заметим, что, в связи с отсутствием (в алфавите  $A_{\sigma_i}$ ) функциональных символов и символов для отношения равенства, множество формул шага 0, получаемых по правилам пункта а.1), [5, с. 168.] будет пустым. Отметим также, что возможность получения формул по правилам пункта а. 2), (смотри [5], стр.168), общей схемы, связанная с подстановками термов в предикатные символы, также исключается, так как предикатные символы сигнатуры  $\sigma_i$  являются нульместными. Отсюда следует, что формулы шага 0, получаемые по правилам пункта а.2), будут иметь вид  $P_i^0, i = 1; 2; \dots; t$ .

В связи с отсутствием у предикатных символов  $P_i^0, i = 1; 2; \dots; t$ , мест для предметных переменных, вопрос о разделении переменных на свободные и связанные для формул шага 0 не ставится. По той же причине этот вопрос не будет ставиться и при описании формул последующих шагов. С учетом того, что алфавит  $A_{\sigma_i}$  не содержит кванторных символов  $\exists$  и  $\forall$ , формулы индукционного шага в) общей схемы будут строиться только по правилу пункта в.1) [6, с. 168].

Таким образом, общая схема построения множества  $\mathcal{L}(A_{\sigma_i})$ , в случае сигнатуры  $\sigma_i$ , приобретает следующие формы:

а) Базис индукции (шаг 0). Предикатные символы,  $P_i^0, i = 1; 2; \dots; t$ , сигнатуры  $\sigma_i$  являются формулами шага 0, то есть  $L_0 = \{P_1^0; P_2^0; \dots; P_t^0; \dots\}$ .

Единственной подформулой формулы  $P_i^0$  является сама эта формула. Сложность  $S(P_i^0)$  формулы  $P_i^0$  полагается равной 0.

б) Индукционное предположение (шаг  $k$ ). Предположим, что множества  $L_0; L_1; \dots; L_k$  формул шагов 0; 1; ...;  $k$ , соответственно, уже построены, сложности всех таких формул уже определены и найдены все подформулы каждой из этих формул.

в) Индукционный шаг (шаг  $k+1$ ). Пусть  $A$  и  $B$  – формулы  $n$ -го шага сигнатуры  $\sigma_i$ .

Тогда слова  $(A \vee B); (A \& B); (A \rightarrow B); \neg A$  являются формулами сигнатуры  $\sigma_i, (k+1)$ -го шага.

Сложности этих формул, а также множества их подформул находятся точно так же, как это делается в пункте в.1) индукционного шага общей схемы индуктивного определения формулы [6, с. 168].

Таким образом, множество  $\mathcal{L}(A_{\sigma_i})$  формул сигнатуры  $\sigma_i$  представляет собой множество формул исчисления высказываний, то есть индуктивная схема построения языка  $L$  пропозиционального исчисления, примененная в пункте 1, является частным случаем общей схемы индуктивного построения формул языков исчисления предикатов произвольных сигнатур.

Возникает естественный вопрос: какие системы считать моделями сигнатуры  $\sigma_i$ ? Какие непустые множества, в частности, могли бы играть роль основных множеств этих моделей. В общем случае, для этой цели годились любые непустые множества. Напомним, что, при определении интерпретации  $\varphi$  сигнатуры  $\sigma$  общего вида на непустом множестве  $M$ , каждому предикатному символу  $P_j^{n_j}, j = 1; 2; \dots; l$  ставится в соответствие конкретный предикат  ${}^{\varphi}P_j^{n_j} = {}^{\varphi}P_j^{n_j}(x_1; x_2; \dots; x_{n_j})$ , определенный на множестве  $M$ , или, если вместо этого предиката рассматривать его область истинности  $({}^{\varphi}P_j^{n_j})^*$ , то – некоторое подмножество  $n_j$ -ой декартовой степени  $M^{n_j}$  множества  $M$ . То есть, с этих позиций, – местному тождественно истинному на множестве  $M$  предикату будет поставлено в соответствие множество  $M^{n_j}$ , а тождественно ложному – множество  $M^0$ , то есть пустое множество  $\emptyset$  [6, с. 177-182].

Таким образом, если сигнатура  $\sigma$  не содержит функциональных символов и символов выделенных элементов, то в качестве основного

множества модели  $M = \langle M; {}^\circ\sigma \rangle$ , можно было бы рассматривать не множество  $M$ , а множество  $\{P_1; P_2; \dots; P_t\}$ , элементами которого являются произвольные подмножества декартовых степеней  $M^{n_1}; M^{n_2}; \dots; M^{n_t}; \dots$  множества  $M$ , соответственно. Интерпретацию  $\varphi$ , при таком подходе, можно было бы определить тогда следующим образом:

$${}^\circ(P_j^{n_j}) = {}^\circ P_j^{n_j}(x_1; x_2; \dots; x_{n_j}),$$

Полагая

$$({}^\circ P_j^{n_j}(a_1; a_2; \dots; a_{n_j}) = u) \Leftrightarrow ((a_1; a_2; \dots; a_{n_j}) \in P_j)$$

для любых  $a_1; a_2; \dots; a_{n_j} \in M^{n_j}$ , то есть посредством этой интерпретации предикатному символу  $P_j^{n_j}$  ставится в соответствие подмножество  $P_j$ , которое становится, тем самым, областью истинности предиката  ${}^\circ P_j^{n_j}$ .

Другими словами, интерпретацию  $\varphi$  можно было бы определить так:  $(\{P_1; P_2; \dots; P_t\} | = {}^\circ P_j^{n_j}) \Leftrightarrow (({}^\circ P_j^{n_j})^* = P_j) \Leftrightarrow (({}^\circ P_j^{n_j})^* \in \{P_1; P_2; \dots; P_t\})$ . (1)

Так как по определению  $M^0 = \{\emptyset\}$ , то существует только два подмножества множества  $M^0$  – это пустое подмножество  $\emptyset$  и само множество  $M^0 = \{\emptyset\}$ . Отсюда следует, что существует только два нульместных предиката  $T_1^0$  и  $T_2^0$ , для которых  $(T_1^0)^* = \emptyset$  и  $(T_2^0)^* = \{\emptyset\}$ , то есть  $T_1^0$  – тождественно ложное высказывание ( $T_1^0 \equiv \text{л}$ ), а  $T_2^0$  – тождественно истинное высказывание ( $T_2^0 \equiv \text{и}$ ) и эти выводы, в связи с тем, что  $M^0 = \{\emptyset\}$ , не зависят от множества  $M$ .

Исходя из того, что существует только два (конкретных) нульместных предиката тождественно ложное (л) и тождественно истинное (и) высказывания, любой нульместный предикатный символ  $P_j^0$ ,  $j = 1; 2; \dots; t; \dots$  сигнатуры  $\sigma_1$  можно проинтерпретировать только двумя способами, то есть при любой интерпретации  $\varphi$ , будем иметь: или  ${}^\circ P_j^0 = \text{л}$  или  ${}^\circ P_j^0 = \text{и}$ ,  $j = 1; 2; \dots; t; \dots$ .

При таком подходе, области истинности  $({}^\circ P_j^0)^*$  нульместных предикатов  ${}^\circ P_j^0$  определяются по аналогии с определением областей истинности  $n$ -местных предикатов (при  $n \neq 0$ , то есть по правилу:

$$({}^\circ P_j^0)^* = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } {}^\circ P_j^0 = \text{л}; \\ \{\emptyset\}, & \text{если } {}^\circ P_j^0 = \text{и}; \end{cases} \quad j = 1; 2; \dots; t; \dots \quad (2)$$

Заметим, что в равенстве (2), которое является формальной версией выявленных аналогий, входят подмножества  $\emptyset$  и  $\{\emptyset\}$ , как подмножества, множества  $M^0$ , где  $M$  – любое непустое множество.

С целью обеспечения полной независимости определения областей истинности нульместных предикатов от множества  $M$ , можно полагать для дальнейшего, что

$$({}^\circ P_j^0)^* = {}^\circ P_j^0, \quad j = 1; 2; \dots; t; \dots$$

Рассматривая эквивалентность (1), применительно к сигнатуре  $\sigma_1$  и учитывая соотношение (2), опишем один из наиболее естественных подходов к построению моделей сигнатуры  $\sigma_1$ .

В качестве основного множества модели, возьмем произвольное непустое подмножество  $\{P_1^0; P_2^0; \dots; P_k^0; \dots\}$  множества предикатных символов сигнатуры  $\sigma_1$ . Интерпретацию  $\varphi$  предикатных символов  $P_j^0$ ,  $j = 1; 2; \dots; t; \dots$ , на множестве  $\{P_1^0; P_2^0; \dots; P_k^0; \dots\}$  определим по правилу:

$$({}^\circ P_j^0 = u) \Leftrightarrow (P_j^0 \in \{P_1^0; P_2^0; \dots; P_k^0; \dots\}),$$

то есть

$$(\{P_1^0; P_2^0; \dots; P_k^0; \dots\} | = {}^\circ P_j^0) \Leftrightarrow (P_j^0 \in \{P_1^0; P_2^0; \dots; P_k^0; \dots\}), \quad j = 1; 2; \dots; t; \dots$$

Полагая далее

$${}^\circ c_1 = \text{л}; \quad {}^\circ c_2 = \text{и},$$

получим модель

$$\langle \{P_1^0; P_2^0; \dots; P_k^0; \dots\}; {}^\circ P_1^0; {}^\circ P_2^0; \dots; {}^\circ P_t^0; \dots; \text{л}; \text{и} \rangle \quad (3)$$

сигнатуры  $\sigma_1$ .

Отождествляя символы  $P_j^0$  сигнатуры  $\sigma_1$  с символами пропозициональных переменных  $X_j$ ,  $j = 1; 2; \dots; t; \dots$ , получаем, что модель (3) можно рассматривать как бесконечную двоичную последовательность  $(\sigma_1; \sigma_2; \dots; \sigma_j; \dots), \sigma_i \in \{\text{л}; \text{и}\}, i = 1; 2; \dots; t; \dots$  или как означивание  $\varphi: X \rightarrow E = \{\text{л}; \text{и}\}$  множества пропозициональных переменных  $X = \{X_1; X_2; \dots; X_t; \dots\}$ . При этом индуктивная процедура вычисления истинностных значений формул сигнатуры  $\sigma$  общего вида, описанная в [6, с. 177-182], трансформируются, применительно к сигнатуре  $\sigma_1$ , в процедуру вычисления истинностных значений формул исчисления высказываний при означивании  $\varphi$ .

3 Приведем ряд понятий и результатов теории фильтров, которые используются при доказательстве теоремы компактности языка исчисления

предикатов сигнатуры общего вида и выявим их аналоги применительно к языкам пропозициональных исчислений.

Пусть  $M$  – произвольное непустое множество и  $B(M)$  – булеан этого множества (то есть – множество всех подмножеств множества  $M$ ). Фильтром над множеством  $M$  называется любая непустая совокупность  $D$  подмножеств этого множества, удовлетворяющая условиям:

Если  $A; B \in D$ , то  $A \cap B \in D$ ;

Если  $A; B \in D$  и  $A \subseteq B$ , то  $B \in D$ ;

$\emptyset \notin D$ .

Таким образом, фильтром над множеством  $M$  называется любое подмножество  $D$  множества  $B(M)$ , замкнутое относительно операции пересечения множеств, относительно взятия надмножеств и не содержащее пустого множества.

Подмножество  $D'$  множества  $B(M)$  называется центрированным, если выполняется следующее условие:

$$(\forall n \in N)(\forall X_1; X_2; \dots; X_n \in B(M))(X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n \in D') \Rightarrow (\bigcap_{i=1}^n X_i \in D').$$

Оказывается, центрированность подмножества  $D'$  множества  $B(M)$  является необходимым и достаточным условием возможности расширения этого подмножества до фильтра над  $M$ .

Предложение 1. Пусть  $M$  непустое множество и  $D' \subseteq B(M)$ . Для того, чтобы подмножество  $D'$  можно было расширить до фильтра  $D$  над  $M$  необходимо и достаточно, чтобы  $D'$  было центрированным подмножеством [3, с. 85].

Нетрудно проверить, что семейство  $D$  всех фильтров над  $M$  частично упорядочено теоретико-множественным отношением « $\subseteq$ » – включения, то есть система  $D = \langle D; \subseteq \rangle$  – частично упорядоченное множество (ч.у.м.). Максимальные элементы этого ч.у.м. называются ультрафильтрами.

Предложение 2. Пусть  $M$  – произвольное непустое множество. Каждый фильтр над множеством  $M$  содержится в некотором ультрафильтре над этим множеством.

Критерий «быть ультрафильтром» дает следующая теорема [3, с. 86].

Теорема 1. Фильтр  $D$  над множеством  $M$  тогда и только тогда является ультрафильтром, когда  $(\forall X \in B(M))(X \in D) \vee ((M \setminus X) \in D)$ .

Другими словами, для любого множества  $A \in B(M)$  или само множество  $A$  принадлежит  $D$  или его дополнение  $M \setminus A$  (в множестве  $M$ ) принадлежит  $D$ .

В связи с этой теоремой, заметим, что  $D$  не может содержать одновременно подмножества  $A$  и  $M \setminus A$  ни для одного  $A \in B(M)$ .

Действительно, если бы нашлось такое подмножество  $A \in B(M)$ , что  $A \in D$  и  $(M \setminus A) \in D$ , то имела бы место принадлежность  $(A \cap (M \setminus A)) \in D$ , согласно условию 2) определения фильтра. Но  $A \cap (M \setminus A) = \emptyset$ , а пустое множество не может принадлежать  $D$  по условию 3) этого же определения.

В дальнейшем будет применяться также следующее свойство ультрафильтров:

и) если  $D$  – ультрафильтр над  $M$ ,  $A, B \in B(M)$ , то  $A \cup B \in D$  тогда и только тогда, когда  $A \in D$  или  $B \in D$ .

Доказательство этого свойства можно получить методом от противного, основываясь на теореме 1.

## ВЫВОДЫ

В современной учебно-монографической литературе теорема компактности языка исчисления предикатов доказывается с использованием методов и технологий теории фильтров. Имеющиеся в литературе доказательства теоремы компактности применительно к языкам пропозициональных исчислений (в частности к языку исчисления высказываний [4; 5]) подобными методами не доказывались.

В данной работе были выявлены аналоги методологических средств, используемых для доказательства теоремы компактности языка исчисления предикатов сигнатуры общего вида применительно к пропозициональным исчислениям. С использованием этих аналогов общая схема доказательства теоремы компактности адаптируется до уровня особенностей более простого (по сравнению с языками исчисления предикатов сигнатуры общего вида) строения синтаксической составляющей пропозициональных исчислений и возможностей их теоретико-модельной реализации.

Представление моделей сигнатуры  $\sigma_1$  посредством означиваний множества пропозициональных переменных обеспечивает возможности достаточно естественного переноса методов и технологий теории фильтров, развитых для моделей предикатных сигнатур общего вида в область семантики пропозициональных исчислений.

1 Мальцев, А. И. *Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik.* – Матем. сб., 1936. – 1(43). – С. 323-336.

2 Мальцев, А. И. Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп // Ученые записки Ивановского гос. пед. института. Серия физико-математических наук. – 1941. – Т.1. – №1. – С.3-9.

3 Ершов, Ю. Л., Палютин, Е. А. *Математическая логика.* – М.: Наука, 1979. – 320 с.

4 Кейслер, Г., Чэн, Ч. Ч. *Теория моделей.* – М.: Мир, 1977. – 614 с.

5 Гончаров, С. С., Дроботун, Б. Н., Никитин, А. А. *Алгебраические и алгоритмические свойства логических исчислений. Часть I. Моногр.* Новосибирск: из-во НГУ. Научное издание, 2008.

6 Гончаров, С. С., Дроботун, Б. Н., Никитин, А. А. *Алгебраические и алгоритмические свойства логических исчислений. Часть II. Моногр.* Новосибирск: из-во НГУ. Научное издание. 2008. – 370 с.

Материал поступил в редакцию 13.06.17.

*B. N. Drobotun, A. K. Khassenov*

**Пропозициялық есептеулер үшін компакттік теоремасы I**

С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.  
Материал 13.06.17 баспаға түсті.

*B. N. Drobotun, A. K. Khassenov*

**A compactness theorem for propositional calculus I**

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.  
Material received on 13.06.17.

*Бұл жұмыста пропозициялық есептеулердің синтаксистік құрылымдарының теориялық-модельдік интерпретацияларының мүмкіндіктері және пікірлер есептеулеріне қолданылатын еркін сигнатураның предикаттар есептеу тілінің компакттік теоремасын дәлелдеу үшін пайдаланылатын құралдардың фильтрлер теориясының инструменталды-технологиялық құралдар аналогтары анықталады.*

*In this paper, we disclose the possibilities of a model-theoretical interpretation of the syntactic constructions of propositional refinements and analogues of the instrumental-technological means of the theory of filters used to prove the compactness of the calculus of predicates of an arbitrary signature, which apply to the calculus of propositions.*

**А. Б. Жаныс**

доктор философии PhD, профессор РАЕ №7524, и.о. профессора, кафедра «Информационные системы и информатика», Кокшетауский университет имени Абая Мырзахметова, г. Кокшетау

**ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В УПРУГОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ**

*Для приближенного решения задач математического анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, граничных задач математической физики применяются разностные и интерполяционные методы.*

*Ключевые слова: эффективность, распределение температуры, сходимость алгоритмов, эффективная оценка погрешности, граничная область, тепловая изоляция, многомерная нестационарная задача, аппроксимация искомого функция, аналитический метод, метод конечных разностей, метод конечных элементов, модель, физический процесс, обыкновенные дифференциальные уравнения, двумерная область, системы линейных уравнений.*

**ВВЕДЕНИЕ**

Для суждения об эффективности и обоснованности применения этих методов необходимо их теоретическое исследование, т.е. обязательное решение следующих вопросов:

- а) установление сходимости алгоритма;
- б) исследование скорости сходимости;
- в) эффективная оценка погрешности.

Решение этих вопросов приводилось для каждого класса уравнений и каждого из методов своим путем и часто представляло значительную трудность, в ряде случаев не преодоленную до настоящего времени.

**ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ**

Пусть распределение температуры  $T(M) = u(M)$ , зависящие от положения точки  $M(x,y) \in \Omega$  и не зависящую от времени  $t$ . Рассмотрим задачу

$$Lu \equiv -\Delta u + u|u| = f(x, y)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad (1)$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0,$$

где  $\Omega$  – открытая ограниченная область,

$$\Omega = (0,1) \times (0,1), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad f(x, y, \cdot) \in L_2((x, y) \in (0,1) \times (0,1)).$$

Граничные условия в (1) по физическому смыслу означает идеальную тепловую изоляцию поверхности тела. Граница области  $\Omega$  является гладкой

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0,$$

где  $\Omega$  – открытая ограниченная область,

$$\Omega = (0,1) \times (0,1), \quad t \in T = [0,1],$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$f(x, y, t) \in L_2(x, y) \in \Omega, t \in T).$$

Если время протекания физического процесса, описываемого многомерной нестационарной задачей, разбить на последовательность интервалов  $\Delta t_k$ ,  $k \in N$ , и провести аппроксимацию производных искомых функций по времени  $t$ , то в соответствии с методом прямых можно перейти к многомерной стационарной краевой задаче относительно распределений этих функций в момент  $t_k$  в конце  $k$ -го интервала  $\Delta t_k$ . Эту задачу можно решить приближенными аналитическими методами, а для численного решения применимы методы конечных разностей (МКР), метод конечных элементов (МКЭ) и метод граничных элементов (МГЭ).

Можно также в области решение многомерной нестационарной задачи ввести пространственную сетку и на этой сетке аппроксимировать производные искомых функций по пространственным координатам. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно изменяющихся во времени узловых значений этих функций. Такая система в сочетании с заданными начальными условиями составит математическую формулировку задачи Коши, для численного решения которой можно использовать один из вариантов метода Рунге-Кутты.

Третий подход к решению многомерных задач объединяет первые два и связан с переходом дискретной математической модели рассматриваемого физического процесса как во времени, так и в пространстве. Эта модель на каждом  $k$ -м интервале приведет к системе конечных уравнений относительно узловых значений искомых функций в момент времени  $t_k$  в конце этого интервала. Этот подход к решению многомерных задач можно привести здесь же на достаточно простом примере

$$\frac{\partial u(t, M)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, M)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(t, M)}{\partial x_2^2}, \quad t > 0, \quad M \in \Omega, \quad (3)$$

где  $u(t, M)$  – зависит от времени  $t$  и декартовых координат  $x_1, x_2$ , а точки

$M \in \Omega$  двумерной области  $\Omega$  решения задачи. Граничные и начальные условия примем в виде

$$u(t, P) = f(t, P), \quad P \in \Gamma; \quad u(0, M) = u_0(M), \quad M \in \Omega, \quad (4)$$

где  $\Gamma$  – граница области  $\Omega$ .

Введем в  $\Omega$  двумерную сетку  $\Omega_h$  с шагами  $h_i$ ,  $i = 1, 2$ , постоянными вдоль каждой из координатных осей. При этом в узлы, не принадлежащие  $\Gamma$ , но расположены наиболее близко к границе и составляющие множество  $\Gamma_h$ , перенесем из ближайшей к каждому узлу точки  $P \in \Gamma$  заданные граничные значения (3) температуры. Отметим, что возникающая при этом погрешность является основной причиной, ограничивающей применение МКР к решению задач в многомерных областях произвольной конфигурации.

Аппроксимируя производной по времени на  $k$ -м интервале, для каждого внутреннего узла сетки  $\Omega_h$  получаем

$$\frac{u^k - u^{k-1}}{\Delta t_k} = \sum_{i=1,2} \Lambda_{ii} (\eta_i u^k + (1 - \eta_i) u^{k-1}), \quad \eta_i \in [0,1] \quad (5)$$

где

$$\Lambda_{ii} u_n = \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h_i^2}, \quad i = 1, 2,$$

$n$  – номер внутреннего узла двумерной сетки  $\Omega_h$ , отсчитываемый вдоль координатной оси  $Ox_i$ .

Она является аналогом двухслойной схемы с весами, имеет при  $\eta_1 = \eta_2 = 1/2$  погрешность  $O(\Delta t_k)^2, h_1^2 + h_2^2)$  и приводит к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно значений  $u^k$  во внутренних узлах сетки  $\Omega_h$ . Для решения этой СЛАУ необходимо использовать известные значения  $u^k$  в узлах, принадлежащих множеству  $\Omega_h$ , и значения

$u^{k-1}$  во всех узлах сетки  $\Omega_h$ , вычисленных на предшествующем интервале времени. При  $k = 1$  значения  $u^{k-1}$  определены начальными условиями (3).

Решение этой СЛАУ можно получить при помощи матричной прогонки, обеспечивающего заметное снижение общего числа арифметических операций, если область  $\Omega$  является прямоугольной.

В случае произвольной области  $\Omega$  одним из экономичных по числу арифметических операций методов решения рассматриваемой СЛАУ является продольно-поперечная прогонка.

Изложенные здесь способы решения многомерных задач теплопроводности можно применять в более широком классе нестационарных краевых задач математической физики, описываемых дифференциальными уравнениями параболического типа или системами таких уравнений. Эти же способы применимы и для решения стационарных (статических) задач, описываемых дифференциальными уравнениями эллиптического типа. Искомое решение таких задач можно рассматривать как предельное, установившееся состояние в условной дискретной системе, в которой происходит нестационарный физический процесс при заданных в стационарной задаче постоянных по времени граничных условиях. Если стационарная задача имеет единственное решение, то при произвольно выбранном начальном условии решение нестационарной задачи для условной дискретной системы в пределе приводит к искомому установившемуся состоянию. Такой прием получения решения стационарной задачи называют методом установления.

В случае не единственности решения рассматриваемой стационарной задачи установившееся состояние будет связано с задаваемым начальным условием. Тогда начальное условие приобретает смысл нулевого приближения, от близости объема вычислений при использовании метода установления. Помимо этого метода для решения многомерных линейных стационарных задач математической физики при помощи МКР можно указать еще ряд способов, которые приводят к СЛАУ, вытекающей из дискретной математической модели рассматриваемого физического процесса. К ним относятся вычислительные методы линейной алгебры, связанные с последовательным исключением неизвестных или мультипликативным разложением матрицы СЛАУ, а также большая группа итерационных методов решения СЛАУ. В случае нелинейных задач дискретная модель приводит к системе конечных уравнений, решаемой также итерационными методами.

## ВЫВОДЫ

Некоторые итерационные методы в определенном смысле можно трактовать и как варианты метода установления, поскольку получаемые в процессе последовательных приближений к искомому решению стационарной задачи промежуточные состояния соответствуют условному нестационарному процессу в дискретной системе. Если решаемая задача имеет вариационную формулировку, включающую функционал с известными экстремальными свойствами, то используемый итерационный метод можно соотнести с методом локальных вариации и контролировать сходимость процесса последовательных приближений по изменению значения функционала от итерации к итерации.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 **Астраханцев, Г. П.** Итерационные методы решения вариационно-разностных схем для двумерных эллиптических уравнений второго порядка. Автореф. на соиск. уч. степ. канд. физ.-матем. н. Л., 1972. –16 с. – (ЛОМИ АН СССР).
- 2 **Ахизер, И. И., Глазман, И. М.** Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. – М. : Наука, 1966.
- 3 **Мухамбетжанов, А. Т.** Об одном приближенном методе решения задачи Стефана Воронежская весенняя математ. школа «Понтрягинские чтения XIII». «Современные методы теории краевых задач», 2002.
- 4 **Мухамбетжанов, А. Т., Аруова, А. Б.** Численный расчет поперечного прогиба балки Межд. научно-теорет. конференции «Роль физико-мат. наук в современном образовательном пространстве». – Атырау, 2005.
- 5 **Мухамбетжанов, А. Т., Жумагулов, Б. Т., Аруова, А. Б.** Итерационные формулы приближенного решения линейных краевых задач в сложных областях Межд. научно-теоретической конференции «Роль физико-мат. наук в современном образовательном пространстве», г. Атырау, 2005
- 6 **Жаныс, А. Б., Рахимов, М. М.** Метод конечных разностей. // Респуб. научно-практ. конференция для молодых ученых, студентов, магистрантов и школьников: «Информационно-коммуникационные технологии (ИКТ) и их роль в современном образовании человека». – 27 марта 2015 г.
- 7 **Жаныс, А. Б.** О приближенном решении нелинейных краевых задач. Научный журнал «Современные наукоемкие технологии». – М. : Издательский Дом «Академия Естествознания». – № 4 – 2015. 2015.

Материал поступил в редакцию 13.06.17.

**Қатты денеде вариациялық әдістермен стационарлық жылу сызықты емес тендеулер үшін сандық есептеулер**

Абай Мырзахметов атындағы Кокшетау университеті, Кокшетау қ.  
Материал 13.06.17 баспаға түсті.

*A. B. Zhanis*

**Numerical calculation for the nonlinear equation of stationary thermal conductivity in an elastic solid by a variational method**

Kokshetau Abai Myrzahmetov University, Kokshetau.  
Material received on 13.06.17.

*Математикалық талдау тапсырмасын шешу, дифференциалдың және интегралдың теңдеулерді шешу, математикалық физика және қолданбалы және интерполяциялық әдістерді қолдану қарастырылған.*

*For an approximate solution of the problems of mathematical analysis, differential and integral equations, boundary problems of mathematical physics difference and interpolation methods are applied.*

УДК 512.54

**И. И. Павлюк<sup>1</sup>, Г. А. Сарсембаева<sup>2</sup>, С. В. Катабекова<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>к.ф.-м.н, <sup>2</sup>преподаватель, <sup>3</sup>студент; Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар  
e-mail: <sup>1</sup>ivan.pavlyuk@mail.ru, <sup>2</sup>galiya2810@mail.ru, <sup>3</sup>sauleknu@gmail.com

**ЧЕРНИКОВСКИЕ ГРУППЫ С КОНЕЧНЫМИ КЛАССАМИ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

*В работе исследуется Черниковская группа с конечными классами сопряженных элементов. Установлено, что такая группа конечна над центром (теорема 1.3), обладает конечным коммутантом (следствие 1.1) и мощности классов сопряженных элементов в ней ограничены в совокупности (следствие 1.2).*

*В общем случае из конечности классов сопряженных элементов в некоторой группе не следует, что мощности их ограничены в совокупности. Такие примеры есть даже среди абелевых групп.*

*Ключевые слова: Черниковская группа, черниковский индекс FC – группа. Факторизация абелевыми группами.*

**ВВЕДЕНИЕ**

**Определение 1.1** Пусть  $a^n$  есть наименьшая положительная степень элемента  $a$  группы  $G$ , равная нейтральному элементу  $e \in G$ , то есть: 1)  $a^n = e, n > 0$ , 2) если  $a^k = e, k > 0$ , то  $k \geq n$ , то  $k \geq n$ . В этом случае говорят, что элемент  $a$  конечного порядка, а именно порядка  $n$  [1, с. 26].

**Определение 1.2** Каждая группа, все элементы которой имеют конечный порядок, называется периодической [1, с. 27].

**Определение 1.3** С каждой подгруппой  $H$  группы  $G$  можно связать множества  $\rho H = \{\rho h / h \in H, \rho \in G\}$ , которые называются левыми смежными классами группы  $G$  по подгруппе  $H$ . Аналогично определяется  $H\rho$  – правый смежный класс [1, с. 51].

**Определение 1.4** Число смежных классов (независимо левых и правых) в каждом из разложений группы  $G$  по подгруппе  $H$  называется индексом подгруппы в группе  $G$ . Если число смежных классов, конечно, то  $H$  называется подгруппой конечного индекса [2, с. 53].

Определение 1.5 Подгруппы, относительно которых левые и правые смежные классы совпадают, называются нормальными делителями группы  $G$  [2, с. 29].

Определение 1.6 Говорят, что группа удовлетворяет условию минимальности (для подгрупп), если каждая убывающая цепочка ее подгрупп  $H_1 \geq H_2 \geq \dots$  обрывается на конечном шаге, то есть  $H_n = H_{n+1} = \dots$  при некотором  $n$ . Очевидно, всякая группа с условием минимальности – периодическая, поскольку бесконечная циклическая группа не удовлетворяет этому условию [2, с. 172].

Определение 1.7 Подгруппа, порожденная одним элементом  $a$ , называется циклической [1, с. 26].

Пусть дано простое число  $p$ . Как следует из теоремы Лагранжа для конечных групп, подгруппа порядка  $p$  циклическая в произвольной группе. Отсюда следует, что циклическая группа порядка  $p^n$  ( $n$ -натуральное число) содержит единственную циклическую подгруппу порядка  $p^{n-1}$ . Таким образом, для каждого  $n$  существует изоморфное отображение циклической группы порядка  $p^{n-1}$  в циклическую группу порядка  $p^n$ . Фиксирую такое отображение для некоторого числа, и получим возрастающую последовательность циклических групп порядка

$$p^n, n = 1, 2, \dots, \\ C_p < C_p^2 < C_p^3 \dots$$

Рассмотрим  $\bigcup_p C_p^n = C_p^\infty$

Очевидно  $C_p^\infty$  является объединением комплексных корней из степени  $p$  из единицы. Группы типа  $p^\infty$  абелевы и не содержат подгрупп конечного индекса. Такие группы называются квазициклическими.

Определение 1.8 Всякое конечное расширение прямого произведения квазициклических групп, взятых в конечном числе, будем называть черниковской группой [3, с. 173].

Определение 1.9 Множество тех элементов из  $H$ , которые перестановочны с  $M$  поэлементно, то  $C_H(M) = \{x/x \in H, m^x = m, \forall m \in M\}$  называется централизатором множества  $M$  в подгруппе  $H$  и является нормальной подгруппой централизатора  $N_H(M)$ . Если  $M$  состоит из одного элемента, то его централизатор и централизатор в  $H$  совпадают [3, с. 33].

Определение 1.10 Централизатор  $g$  всей  $g$  группы  $G$  называется ее центром  $g$  и  $g$  обозначается  $Z(G)$  [2, с. 33].

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Теорема (ПУАНКАРЕ) 1.1 Пересечение конечного числа подгрупп конечного индекса само имеет конечный индекс [1, с. 53].

Теорема 1.2 Пусть  $A, B$  – подгруппы группы  $G$ , причем  $A \leq B$ , индексы  $|G : B|, |B : A|$  оба конечны тогда и только тогда, когда конечен индекс  $|G : A|$ , то есть, если  $|G : A| < \infty$ , то  $|G : B| < \infty$  [3, с. 28].

Теорема 1.3 Черниковская группа с конечными классами сопряженных  $x$  элементов конечна над центром.

Доказательство. Пусть  $G$  – черниковская группа. По определению черниковской группы [1.2]  $G$  обладает абелевой подгруппой  $A$  конечного индекса в  $G$  такой что:  $A = Ap_1 \times Ap_2 \times \dots \times Ap_n$ , где  $A_{p_i}$  – силовские примарные подгруппы из  $A$ , а  $A$  – квазиполная абелева группа с условием минимальности (то есть, всякая ее цепочка подгрупп обрывается на конечном шаге). Так как в  $G$  классы сопряженных элементов конечны, то для любого элемента  $\rho \in G$  индекс его централизатора  $C_G(\rho)$  в  $G$  конечен, то есть  $|G : C_G(\rho)| < \infty$ .

Очевидно, центр  $Z(G)$  группы  $G$  содержится в  $C_G(\rho)$ , и группа  $A$  так же содержится в  $C_G(\rho)$  (так как не имеет подгрупп конечного индекса), то  $|G : A| < \infty$ .

Пусть  $G = Ax_1 \cup Ax_2 \cup \dots \cup Ax_n = \bigcup_{i=1}^n Ax_i$  (так как  $A$  имеет конечный индекс в  $G$ ). Так как  $C_G(\rho)$  имеет конечный индекс в  $G$ , то для каждого  $x_i \in G$  имеем:  $|G : C_G(x_i)| < \infty$ .

Очевидно, индекс  $|G : \bigcap C_G(x_i)| < \infty$  (теорема 1.1). Отсюда следует,

что и индекс  $|G : \bigcap C_G(x_i) \cap A|$  конечен, но  $|G : \bigcap C_G(x_i) \cap A| \leq |Z(G)|$ .

Отсюда следует, что индекс  $|G : Z(G)|$  конечен (теорема 1.2). Таким образом, группа  $G$  конечна над центром.

Теорема доказана.

Следствие 1.1 В черниковской группе с конечными классами сопряженных элементов коммутант конечен.

Доказательство. По теореме 1.3 группа  $G$ , удовлетворяющая условию следствия, конечна над центром. Отсюда в силу теоремы Шура [2, с. 49] коммутант группы  $G$  конечен.

Следствие доказано.

Следствие 1.2 В черниковской группе с конечными классами сопряженных элементов мощности классов сопряженных элементов ограничены в совокупности.

Доказательство следствия непосредственно вытекает из теоремы 1.3, следствия 1.2 и теоремы Неймана [2, с. 52].

2 Группы факторизуемые двумя абелевыми подгруппами имеющие черниковский с индекс

В пункте 1 дано описание черниковских групп с конечными классами сопряженных элементов. Такие группы конечны над центром. Возник вопрос: может ли в группе с центром центр иметь индекс два? В этом случае факторгруппа по центру будет обладать элементами порядка два (инволюциями). В теории групп группы с инволюциями занимают особое положение (это, в частности, простые группы). Группы с инволюциями требуют особого рассмотрения. В работе установлено, что в группе с нетривиальным центром центр может иметь индекс превосходящий число два.

Лемма 2.1 Группы  $G$  с центром  $Z(G)$  индекс два не существует.

Доказательство. Очевидно группа  $G$  имеет представление  $G = Z(G) \cup aZ(G)$  и будем полагать она нетривиальна, где элемент  $a \in G \setminus Z(G)$ . Так как факторгруппа  $G/Z(G)$  имеет порядок два, то она циклическая. Отсюда следует, что коммутант  $G' = \langle [a, b] \rangle$ , порожденный всевозможными коммутаторами  $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ , где  $a, b \in G$ , содержится в центре, т.е.  $G' \leq Z(G)$  [3].

Докажем, что  $G = Z(G)$ . Предположим, что существует элемент  $x \in Z(G) \setminus G'$ . Поскольку  $(\forall g \in G)(aZ(G))^g = aZ(G)$ , что следует из разложения  $G = Z(G) \cup aZ(G)$ , то  $(\forall z \in Z(G)) (a^2 g^z = az_1)$ . Отсюда  $a^g = az_1 z^{-1} = az_2$ , где  $z_2 = z_1 z^{-1}$ . Отсюда следует, что элементы смежного класса  $aZ(G)$  группы  $G$  по центру сопряжены между собой. Поскольку для элемента  $a \in G \setminus Z(G)$  выполнено соотношение  $a \notin G'$ , то элемент  $a$  сопряжен с элементом  $ax$ , т.е. в  $G$  существует элемент  $g \in G$  такой что  $a^g x^g = a$ . Отсюда  $a^{-1} a^g = (x^{-1})^g$  и  $(x^{-1})^g \in G'$ . Поскольку коммутант группы  $G$  является ее нормальным делителем, то  $(x^{-1})^{g g^{-1}} \in G'$  и  $x^{-1} \in G'$ ,  $x \in G'$ . Мы предполагали что  $x \notin G'$ . Противоречие. Таким образом,  $Z(G) = G'$ .

Отсюда следует, что коммутант  $G'$  собственная подгруппа индекса два: С другой стороны фактор группы  $\bar{G} = G/Z(G)$  циклическая группа порядка

два, порожденная элементом смежным классом  $aZ(G)$ . Возьмем  $x, y \in G$ . Эти элементы лежат в некоторых смежных классах  $(aZ(G))^k (aZ(G))^e$ , значит  $x = a^k z_1$ ,  $y = a^e z_2$ , где  $z, z \in Z(G)$ . Рассмотрим произведение  $xy = a^k z_1 a^e z_2 = a^k a^e z_1 z_2 = a^{k+e} z_1 z_2 = a^{e+k} z_2 z_1 = a^e a^k z_2 z_1 = a^e z_2 a^k z_1 = yx$ .

Таким образом,  $xy = yx$  и группа  $G$  абелева. Отсюда коммутант  $G'$  группы  $G$  равен  $G' = \{e\}$ . Так как  $Z(G) = G'$ , то  $Z(G) = \{e\}$ . Таким образом, группа  $G$  тривиальна. Противоречие. Такой группы не существует.

Лемма доказана.

Очевидным является следующие следствие полученной теоремы.

Следствие 2.1 В группе обладающей нетривиальным центром его индекс в самой группе  $|G : Z(G)| > 2$ .

Примером групп с нетривиальным центром могут служить 2-группа порядка 8:  $G_8 = \{e, a, a^2, a^3, b, aba^2b, a^3b\}$  с генетическим кодом  $a^4 = b^4 = e; ba = a^3b$ . У этой группы  $G' = Z(G)$ , но  $|G : Z(G)| = 4$ . Он, естественно, больше двух.

3 Группа  $G = A \cdot B$  (факторизуемая) двумя нормальными подгруппами черниковского индекса и черниковскими коммутантами

В дипломной работе исследуются группы факторизуемые двумя нормальными подгруппами с черниковскими коммутантами. Такие группы обладают черниковским коммутантом. Этот результат обобщает исследования факторизуемых групп из [4]. Для реализации этого обобщения используется понятие черниковского индекса. Это понятие принадлежит С. Н. Черникову. Оно обобщает понятие конечного индекса. Результаты, связанные с черниковским индексом, обогащают теорию сравнений относительно черниковского индекса.

Определение 3.1 [1] Подгруппа  $A$  группы  $G$  имеет черниковский индекс в группе  $G (A \equiv_{\leq} G)$ , если  $A$  обладает подгруппой  $A_1$ , являющейся нормальным делителем в самой группе  $G$ , такой что факторгруппа  $G/A_1$  – черниковская группа.

Лемма 3.1 Пусть группа  $G = A \cdot B$ , где  $A, B$  – абелевы подгруппы  $G$  такие, что  $(A \equiv_{\leq} G)$ ,  $(B \equiv_{\leq} G)$ . Тогда коммутант группы  $G$  черниковский.

Доказательство. Так как индексы  $|G : A|$ ,  $|G : B|$  подгрупп  $A, B$  в группе  $G$  черниковские, то пересечение  $A \cap B$  имеет черниковский индекс (лемма 2.10 [3]), рассмотрим элемент  $a \in A \cap B$  и его централизатор  $C(a)$  в группе  $G$ . Очевидно элемент  $a$  централизует подгруппы  $A$  и  $B$ . Таким образом  $A, B < C(a)$  и группа  $G = A \cdot B$  содержится в централизаторе

$C(a)$ ,  $G=C(a)$ . Поскольку  $G=C(a)$  и пересечение  $A \cap B$  содержится в центре  $Z(G)$  группы  $G$ . Так как  $Z(G)$  содержит подгруппу  $A \cap B$ , которая имеет черниковский индекс в группе  $G$ , то по предложению 2.5 [1] центр  $Z(G)$  имеет черниковский индекс в группе  $G$ . Таким образом, группа  $G$  – черниковская над своим центром или черниковски соизмерима со своим центром. По теореме 2.12 [1] в такой группе коммутант черниковский.

Лемма доказана.

Теорема 3.1 Пусть группа  $G = A \cdot B$ , где  $A, B$  нормальные подгруппы черниковского индекса в  $G$  и  $A', B'$  – черниковские коммутанты соответственно подгрупп  $A$  и  $B$ . Тогда коммутант  $G'$  группы  $G$  черниковский.

Доказательство. Докажем, что  $G' = A' \cdot B'$ . Так как  $G = A \cdot B$ , то  $(\forall g \in G)(g = ab$ , где  $a \in A, b \in B)$ . Пусть  $g, x \in G$ . Тогда коммутатор

$$[g, x] = g^{-1} g^x = (ab)^{-1} (ab)^x = b^{-1} a^{-1} a^x b^x = b^{-1} [a, x] b b^{-1} b^x = [a, x]^b \cdot [b, x]$$

Так как  $A, B$  – инвариантные подгруппы  $G$ , то  $[a, x]^b \in A'$ , а  $[b, x] \in B'$  и коммутант  $G' = A' \cdot B'$ . Очевидно, подгруппа  $A' \cdot B'$  – инвариантна в  $G$ , а коммутант  $G' / A' \cdot B'$  факторгруппы  $G / A' \cdot B'$  по лемме черниковский. Так как  $A'$  и  $B'$  черниковские нормальные делители группы  $G$ , то и  $A' \cdot B'$  – будет черниковской подгруппой группы  $G$  как расширение черниковской группы  $A' \cap B'$ , то  $A' \cdot B' / A' \cong A' / A' \cap B'$  [40]. Отсюда следует, что  $G' = A' \cdot B'$  – черниковская группа.

Теорема доказана.

Следствие 3.1 Пусть в группе  $G$  существуют такие нормальные подгруппы  $A$  и  $B$  конечного индекса, что  $G = A \cdot B$  и  $A'$  и  $B'$  конечна. Тогда  $G'$  также конечен.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 **Павлюк, И. И.** Сравнения и проблема Черникова в теории групп. – Павлодар: ПГУ им. С. Торайгырова, 2002. – 222 с.

2 **Горчаков, Ю. М.** Группы с конечными классами сопряженных элементов // М. : Наука, 1978. – С. 212.

3 **Каргополов, К. И., Мерзляков, Ю. И.** Основы теории групп. – М. : Наука, 1982. – 288 с.

Материал поступил в редакцию 13.06.17.

*И. И. Павлюк, Г. А. Сарсембаева, С. В. Каттабекова*

#### **Түйендес элементтердің және факторизацияның шекті класстары бар Черников топтары**

С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.  
Материал 13.06.17 баспаға түсті.

*I. I. Pavlyuk, G. A. Sarsembayeva, S. V. Kattabekova*

#### **Chernikov's groups with finite classes of conjugate elements and factorizations**

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.  
Material received on 13.06.17.

*Жұмыста келесі нәтижелер алынды: түйіндес элементтердің шекті класстары бар Черников тобы центрдің үстінде шектеулі;  $A', B'$  екі нормаль ішкі топпен  $G$  тобы факторизацияланады ( $G=AB$ ),  $G'$  черников коммутанты бар.*

*Chernikov groups with finite classes of conjugate elements is finite over center; Group  $G$  factorable ( $G = AB$ ) by two normal subgroups  $A, B$  with Chernikov commutators –  $A', B'$ , has Chernikov commutator  $G'$ .*

**V. I. Senashov<sup>1</sup>, A. M. Gerasimova<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute of Computational Modelling SB RAS, SFU, Krasnoyarsk, Russia; <sup>2</sup>student, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

e-mail: <sup>1</sup>sen1112home@mail.ru, <sup>2</sup>nastyatka94@mail.ru

**RESTORATION OF LAYERED GRAPHS OF GROUPS**

*In this article we will consider Cayley graphs and layer graphs of groups. Consider the question of restoring a group graph from its fragment, or restoring the missing information about this graph: the direction of the arrows, the signatures of the elements, the layer signatures, and the restoration of the graph itself.*

*Keywords: graph, Cayley graph, layered graph, layer, dihedral group.*

INTRODUCTION

Start of graph theory was laid by L. Euler in his famous argument on Koenigsberg bridges. However, this topic is not developed for nearly hundred years.

Interest to the problems of graph theory was revived in the early 19th century and was concentrated mainly in England. Graphs have been used in the construction of schemes of electric circuits and molecular circuits. As a separate mathematical discipline of graph theory was first introduced in [1] by the hungarian mathematician D. Koenig in the beginning of the twentieth century.

Graphs occur naturally in mathematics and, in particular, as derivatives of some objects of mathematical structures.

Cayley graph initially viewed as an object that is associated with the group. The idea of using of graphs in the presentation of groups suggested by english mathematician A. Cayley (1821-1895). It is possible to get acquainted with the Cayley graphs of groups on the book [2]. In the original of book «Generators and relations in discrete groups» H. S. M. Coxeter and W.O.J. Moser for graph groups use the term «diagram Cayley» [3].

First we give the definitions of the considering graphs.

**Definition.** *Cayley graphs* of a group is a set of vertices (one-to-one corresponding to elements of the group), and a set of color-oriented arcs (to each generating elements corresponds an oriented arc of the same color). Each vertex

corresponding to an element  $x$ , connected with the vertex, the corresponding to the element  $xa$  by means of the arc, the color of which corresponds to a multiplication at the generating element  $a$ .

**Definition.** *Layered graph* called a Cayley graph, which elements of each order placed on own layer.

Recall that a *layer* is the set of all elements of the same order. A dihedral group is a group generated by two elements of order 2.

First we give examples of Cayley graphs and layered graphs of dihedral groups. Next, consider the task of reconstructing a graph of group from its fragment or reconstructing of missing information of this graph.

EXAMPLES OF CAYLEY GRAPHS AND LAYERED GRAPHS OF DIHEDRAL GROUP

We give examples of Cayley graphs and layered graphs of groups.

**Example 1.** We construct the Cayley graph of the dihedral group  $D_{2,3}$ . It consists of elements  $\{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$  (fig.1).

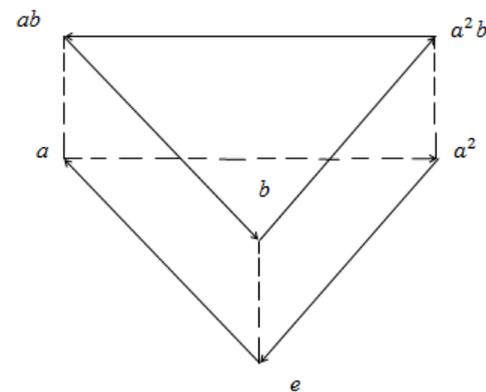


Figure 1 – Cayley graph of the dihedral group  $D_{2,3}$

Now we consider the Cayley graph of the dihedral group  $D_{2*9}D_{2*9}$ . The graph consists of elements  $\{e, a, a^2, \dots, a^8, eb, ab, a^2b, \dots, a^8b\}$   $\{e, a, a^2, \dots, a^8, eb, ab, a^2b, \dots, a^8b\}$  (fig.2).

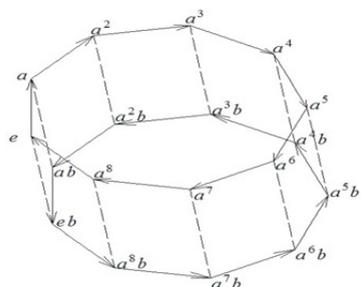


Figure 2 – Cayley graph of the dihedral group  $D_{2*9}$

Having constructed the Cayley graphs of the dihedral group  $D_{2*3}D_{2*3}$  and  $D_{2*9}D_{2*9}$  we can see that the bypass of the lower edge of the graphs goes clockwise from the element  $e$ , and on the upper edge the bypass goes in the opposite direction.

Now we construct a layered graph of the dihedral group  $D_{2*3}$ . It consists of elements  $\{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}\{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$  (fig.3).

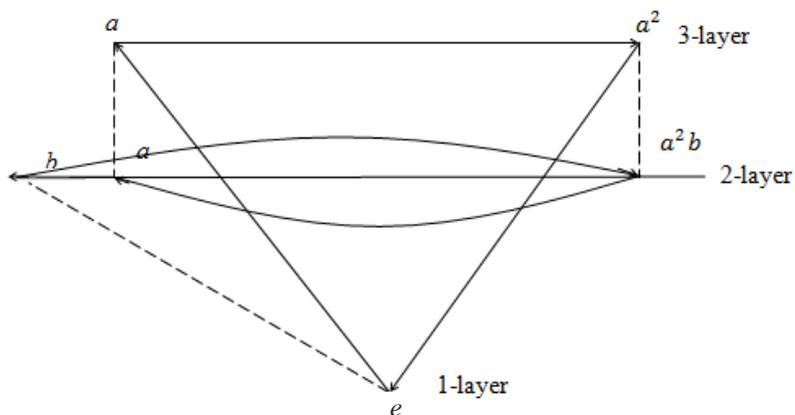


Figure 3 – Layered graph of the dihedral group  $D_{2*3}$

From the figure we can see that the elements are divided into three layers of the first second and third order. The figure shows the order of the element of the group it also shows what structure the group has.

We consider the layered graph of the dihedral group  $D_{2*10}$ . It consists of elements  $\{e, a, a^2, \dots, a^9, ab, a^2b, \dots, a^9b\}$ , located on four layers (fig.4).

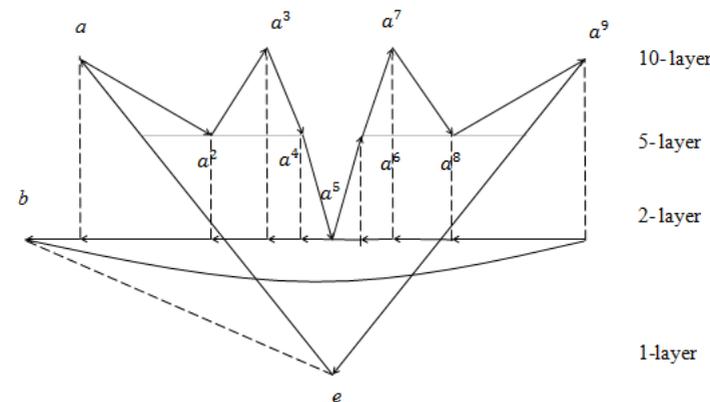


Figure 4 – Layered graph of the dihedral group  $D_{2*10}$

By constructing above layered graphs of dihedral groups, we can conclude that layered graphs of dihedral groups are obtained by adding to the layered graph of the cyclic group of a layer of elements of order 2; from the graphs one can see what order each element of the group has. In the construction, one can note that the layered graph of a dihedral group differs from the layered graph of a cyclic group only by adding a layer of elements of order 2. It is also seen how the elements of a given order are arranged in a group. There is always a single element on 1-layer. Layered graphs of cyclic groups are described in the paper «On layered graphs of groups» [4].

#### RECOVERY OF THE GRAPH OF GROUPS BY ITS FRAGMENT OR INSUFFICIENT INFORMATION ON THIS GRAPH

We are considering the classical task: restoring the missing information about the object.

We'll see how much information can be removed from the graph so that this graph can be restored?

Information about the graph consists of arcs, directions, signatures of elements, signatures of layers.

We set the task: Restore the graph of group by its fragment, or the missing information about this graph: the direction of the arrows, the signatures of the elements, the layer signatures and the restoration of the graph itself.

We will reconstruct the layered graph using the example of a cyclic group.

Consider the layered graph of a cyclic group  $C_{2*5}C_{2*5}$  (fig.5). This graph has 10 vertices corresponding to the elements  $\{e, a, a^2, \dots, a^9\}\{e, a, a^2, \dots, a^9\}$ , located on 4 layers: 1, 2, 5 and 10-layers. There is always one element of order

1 on 1-layer, and this element  $e$ . On 2-layer there is one element of order 2, this element  $a$ . On the 5-layer there are four elements of order 5. These elements  $\{a^2, a^4, a^6, a^8\}$ . Finally, on the last 10-layer there are four elements of order 10. These elements  $\{a, a^3, a^7, a^9\}$ .

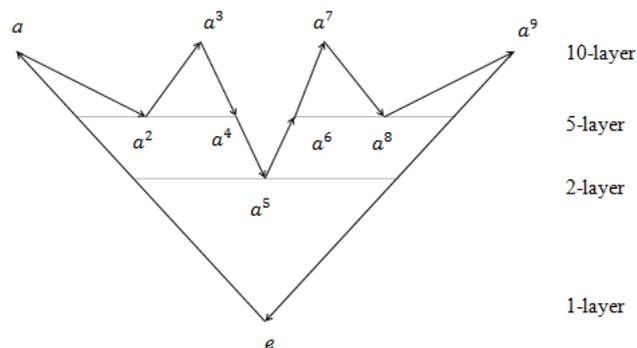


Figure 5 – Layered graph of a cyclic group  $C_{2*5}$

If we remove all the signatures and the direction of the arrows, the graph will look like this (fig. 6):

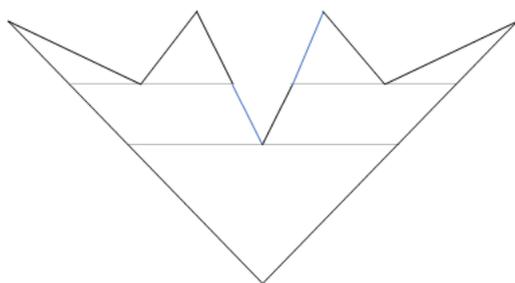


Figure 6 – Layered graph of a cyclic group  $C_{2*5}$

To begin, we restore the direction of the arrows on the layered graph. The arrows on this graph can be restored only in two ways: clockwise and counterclockwise (both variants are equivalent).

Next we define the signatures of the layers: from (fig. 6) we see that the graph consists of 4 layers. Since the graph of the group contains 10 vertices, then by the Sylow theorem on the given graph these layers are 1, 2, 5, and 10-layer.

It remains to determine where each layer. The layers are arranged in ascending order from 1 to 10. The 1-layer will be located at the very bottom, the 2-layer is higher, etc. up to the 10-layer – this will be the last layer (fig. 7):

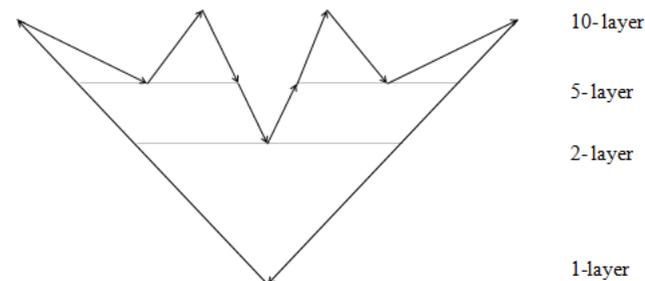


Figure 7 – Layered graph of a cyclic group  $C_{2*5}$

If the layer is not the first and not the second, then one element can not be located on it. If  $a$  is an element of this layer, then there is a degree of this element that will be on the same layer.

We can restore the signatures of the elements in two ways: One element can be on 1-layer or 2-layer. Since the 1-layer is the lowest, the signatures of the elements begin with this layer. Knowing where it is, there will be an element  $e$ . Next, we will sign the elements in the direction of the arrows on the graph.

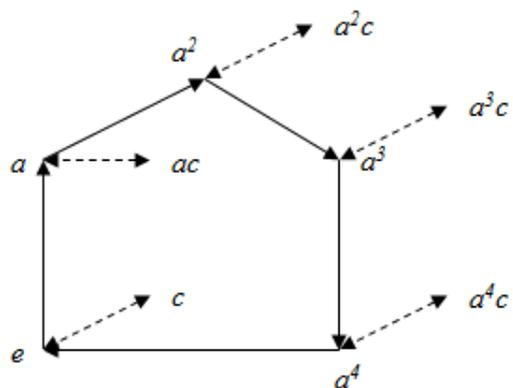
Since at any point two arcs are connected, it means that this is a cyclic group.

You can not always restore a group graph. It is necessary that there remains a fragment of the graph that contains the complete set of defining relations. In the general case, the Cayley graph (including the layered graph) is recovered ambiguously.

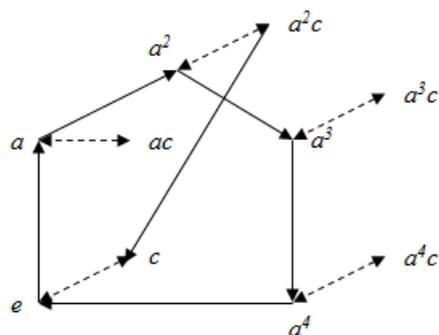
Example [2]: Restore an arbitrary graph from its fragment, without having a complete set of defining relations.

Consider the graph generated by the elements  $a$  and  $c$ . The solid arrow denotes multiplication by the generator  $a$ .

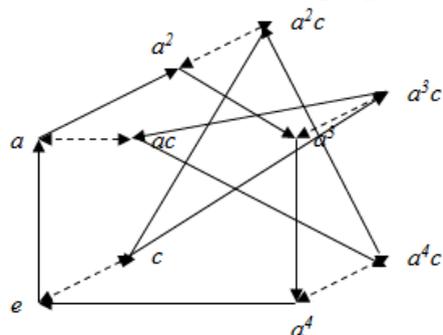
We take a fragment of the graph.



We try to draw the graph with a solid arrow from the element  $a^2c$  in  $c$ . Then an additional defining relation appears  $a^2cac=1$ .



Using this relation, we complete the missing edges:



We have obtained a completely constructed graph, i.e. from any vertex arrows are constructed, which correspond to multiplication by each generating element.

But now the question arises: will the graph, reconstructed in this way, be a graph of the group?

We will check whether the given graph is a graph of the group.

a) We check for the presence of inverse elements. We are looking for the inverse of the element  $a^2c$ , we can see from the graph that this is the element  $ac$ . By the definition of the inverse:  $(ac)(a^2c)=e$ . But the graph, this leads to the  $a^2$  element. That is,  $a^2c$  does not have an inverse element.

b) We verify associativity. Let's take the elements  $ac, a^3c, a^4$ .  $(a^3cac) a^4 = a^3c(aca^4)$ ;  $(a^3cac) = a$ ;  $(aca^4) = a^3c$ , proceeding from these relations, we arrive at the fact that the left side of the equality leads to the element  $e$ , and the right-hand side to the element  $a^2$  ( $e \neq a^2$ ). That is, associativity is not fulfilled!

### CONCLUSION

It is necessary that there remains a fragment of the graph that contains a complete set of defining relations. In another way, the graph is reconstructed ambiguously.

### REFERENCES

- 1 **Dénes König**. Theory of finite and infinite graphs. – Birkhäuser, 1990.
- 2 **Grossman, Magnus B.** Groups and their graphs. – M. : Mir, 1971.
- 3 **Coxeter H. S. M., Moser W. O. J.** Generators and relations in discrete groups, 3-ed. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1972.
- 4 **Senashov, V. I., Gerasimova, A. M.** On layered graphs of groups // Vestnik PGU. – 2016. № 3. P. 23-28.

Material received on 13.06.17.

*В. И. Сенашов<sup>1</sup>, А. М. Герасимова<sup>2</sup>*

#### Қабатты графтар топтарын қалпына келтіру

<sup>1</sup>СБ РАФ есептеу модердеу институты, Красноярск қ, Ресей;

<sup>2</sup>Сібір Федеральдык университеті, г. Красноярск, Ресей.

Материал 13.06.17 баспаға түсті.

*В. И. Сенашов<sup>1</sup>, А. М. Герасимова<sup>2</sup>*

#### Восстановление слойных графов групп

<sup>1</sup>Институт вычислительного моделирования СО РАН, СФУ,

г. Красноярск, Россия;

*Мақалада біз Кэли графтары мен қабатты графтар топтарын қарастырамыз. Онда граф топтарын оның фрагменттері арқылы қайта қалпына келтіру және осы граф туралы жетіспеген ақпаратты толықтыру: бағыт көрсету, қолтаңба элементтері, сол графты қайта қалпына келтіру қабатының қолтаңбасы.*

*В статье мы будем рассматривать графы Кэли и слойные графы групп. Рассмотрим вопрос о восстановлении графа группы по его фрагменту, или восстановлении недостающей информации об этом графе: направление стрелок, подписи элементов, подписи слоев и восстановление самого графа.*

УДК 539.3 + 528.22

**Е. Аринов**

д.ф.-м.н., профессор, кафедра «Естествознания» Жезказганский университет имени О. А. Байконурова, г. Жезказган  
e-mail: arinov91@mail.ru

**О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ  
ЦИЛИНРИЧЕСКОЙ ГОРНОЙ ВЫРАБОТКИ  
БЕЗ ПОДКРЕПЛЕНИЯ**

*В статье рассматривается напряженное состояние вертикальной горной выработки круговой цилиндрической формы. Решение проводится в цилиндрической системе координат для случая меридиональной деформации.*

*Ключевые слова: горная выработка, цилиндрическая форма, система координат, напряженное состояние, материалы.*

**ВВЕДЕНИЕ**

Строительные материалы, горные породы при испытаниях в камерах трехосного сжатия выдерживают давления, многократно превышающие величины их пределов прочности на осевое сжатие. Таким образом, прочность таких материалов во многом зависит от их напряженных состояний.

Какова закономерность между прочностью и напряженными состояниями? В теории напряжений в начале XX века было установлено, что любые напряженные состояния можно изобразить на плоскости нормального и касательного напряжений. Это явилось большим подспорьем для исследования поставленного выше вопроса.

**ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ**

Рассмотрим вертикальную горную выработку круговой цилиндрической формы глубиной  $h$ . Решение проводим в цилиндрической системе координат для случая меридиональной деформации. Начало координат поместим на оси цилиндрической выработки на дневной поверхности. При этом положения точек характеризуем цилиндрическими координатами: полярным радиусом  $r$  и координатой  $z$ , отсчитываемой от дневной поверхности в глубину, в выбранном положительном направлении (рисунок 1).

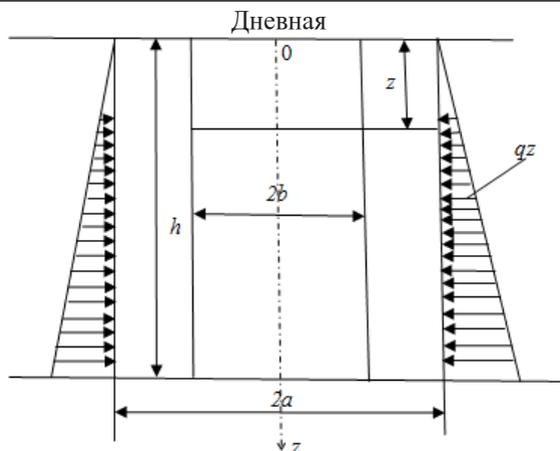


Рисунок 1

Введем вместо  $r, z$  безразмерные переменные  $x, \xi$ :

$$x = \frac{r}{a}, \quad (1)$$

Где  $a$  – наружный радиус цилиндра, за пределами которого не учитывается влияние концентрации напряжений, т.е. 5-6 радиусов выработки, как это принято в механике горных пород [1]. На уровне глубины  $z$  на внешнюю границу  $r = a$  цилиндра действует равномерное давление, равное  $\gamma z$ , где  $\gamma$  – удельный вес материала среды,  $z$  – произвольная глубина. Для полного цилиндра длины  $h$ , т.е. глубины выработки с внутренним радиусом  $b$  – радиусом выработки:

$$\frac{b}{a} = x_1 \leq x < 1, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{h}{a}. \quad (2)$$

Для рассматриваемой меридиональной деформации решение задачи может быть выражено через две гармонические функции Папковича-Нейбера  $b_0$  и  $b_3$  [2], т.е.:

$$\nabla^2 b_0 = 0, \quad \nabla^2 b_3 = 0. \quad (3)$$

Здесь оператор Лапласа

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}. \quad (4)$$

Перемещение через функцию  $b_0, b_3$  выражаются формулами:

$$u = a \left[ -\frac{\partial b_0}{\partial x} + \xi \frac{\partial b_3}{\partial x} \right],$$

$$w = a \left[ (3 - 4\nu) b_3 - \frac{\partial b_0}{\partial x} + \xi \frac{\partial b_3}{\partial x} \right], \quad (5)$$

а напряжения –

$$\sigma_r = 2G \left[ 2\nu \frac{\partial b_3}{\partial \xi} - \left( \frac{\partial^2 b_0}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial^2 b_3}{\partial x^2} \right) \right],$$

$$\sigma_z = 2G \left[ 2(1 - \nu) \frac{\partial b_3}{\partial \xi} - \left( \frac{\partial^2 b_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_3}{\partial x^2} \right) \right],$$

$$\sigma_\varphi = 2G \left[ 2\nu \frac{\partial b_3}{\partial \xi} - \frac{1}{x} \left( \frac{\partial b_0}{\partial x} + \xi \frac{\partial b_3}{\partial x} \right) \right],$$

$$\tau_{rz} = 2G \left[ (1 - 2\nu) \frac{\partial b_3}{\partial x} - \left( \frac{\partial^2 b_0}{\partial x \partial \xi} + \xi \frac{\partial^2 b_3}{\partial x \partial \xi} \right) \right]. \quad (6)$$

Функции  $b_0, b_3$  имеют вид:

$$b_0 = A \frac{1}{2} (2\xi^3 - 3\xi x^2) + B \xi \ln x.$$

$$b_3 = C \frac{1}{2} (2\xi^2 - x^2) + D \ln x. \quad (7)$$

Где  $A, B, C, D$  – производные постоянные интегрирования. Итак, пользуясь выражениями (7), определим перемещения (5):

$$u = a \left[ 3A \xi x - B \frac{\xi}{x} - C \xi x + \frac{D \xi}{x} \right],$$

$$w = a \left\{ -A \left( 3\xi^2 - \frac{3}{2} x^2 \right) - B \ln x + C \left[ 2\xi^2 + (3 - 4\nu) \frac{1}{2} (2\xi^2 - x^2) \right] + (3 - 4\nu) D \ln x \right\} \quad (8)$$

и компоненты напряжений –

$$\sigma_r = 2G \xi \left[ 3A + \frac{B}{x^2} + C(4\nu + 1) + \frac{D}{x^2} \right],$$

$$\sigma_r = 2G \xi [-6A + 2C(1 - 2\nu)],$$

$$\sigma_\varphi = 2G \xi \left[ 3A + \frac{B}{x^2} + C(4\nu + 1) - \frac{D}{x^2} \right], \quad (9)$$

$$\tau_{rz} = 2G \left[ 3Ax - \frac{B}{x} - C(1 - 2\nu)x + \frac{D(1 - 2\nu)}{x} \right].$$

Граничные условия имеют вид:

$$\text{При } x = 1: \sigma_r = -\gamma a\xi, \tau_{rz} = 0,$$

$$\text{При } x = x_1: \sigma_r = 0, \tau_{rz} = 0. \quad (10)$$

Подставляя выражения для напряжений из (9) в граничные условия (10), получаем систему алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных интегрирования A, B, C, D:

$$3A + B + C(4v + 1) + D = \frac{\gamma a}{2G},$$

$$3A - B - C(1 - 2v) + D(1 - 2v) = 0,$$

$$3A + \frac{B}{x_1^2} - C(4v + 1) + \frac{D}{x_1^2} = 0, \quad (11)$$

$$3Ax_1 + \frac{B}{x_1^2} - C(1 - 2v)x_1 + \frac{D(1 - 2v)}{x_1} = 0.$$

Решив эту систему уравнений, найдем значения произвольных постоянных:

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta}, B = \frac{\Delta_2}{\Delta}, C = \frac{\Delta_3}{\Delta}, D = \frac{\Delta_4}{\Delta}, A = \frac{\Delta_1}{\Delta}, B = \frac{\Delta_2}{\Delta}, C = \frac{\Delta_3}{\Delta}, D = \frac{\Delta_4}{\Delta}, \quad (12)$$

где

$$\Delta = |a_{ij}|, \quad (13)$$

причем

$$a_{11} = 3, a_{12} = 1, a_{13} = 4v + 1, a_{14} = 1,$$

$$a_{21} = 3, a_{22} = -1, a_{23} = -(1 - 2v), a_{24} = 1 - 2v,$$

$$a_{41} = 3x_1, a_{42} = \frac{1}{x_1},$$

$$a_{43} = -(1 - 2v)x_1, a_{44} = \frac{1 - 2v}{x_1}, \quad (14)$$

$$\Delta_1 = -\frac{\gamma a}{2G} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (15)$$

$$\Delta_2 = \frac{\gamma a}{2G} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (16)$$

$$\Delta_3 = -\frac{\gamma a}{2G} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (17)$$

$$\Delta_4 = \frac{\gamma a}{2G} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}, \quad (18)$$

Таким образом, найдено решение сформулированной задачи.

Просчитаем концентрацию напряжений на поверхности вертикальной цилиндрической полости в упругой среде горных пород по формулам (9), (12)-(18) при следующих значениях входных данных: удельный вес материала горных пород  $\gamma = 2,7 \frac{\Gamma}{\text{см}^3}$ ; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ; модуль Юнга  $E = 0,62 \cdot 10^5 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$ ;  $a = 12$  м;  $b = 2$  м и глубина  $z = 50$  м.

Расчеты проведены на компьютере. Их результаты приведены ниже:

$$\nu = 0,3, \gamma = 2,7 \cdot 10^{-3}; E = 0,62 \cdot 10^5;$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}; b = 200; a_1 = 1200; x_1 = \frac{b}{a_1}.$$

$$a_{11} = 3, a_{12} = 1, a_{13} = 4v + 1, a_{14} = 1,$$

$$a_{21} = 3, a_{22} = -1, a_{23} = -(1 - 2v), a_{24} = 1 - 2v,$$

$$a_{31} = 3, a_{32} = \frac{1}{(x_1)^2}, a_{33} = 4v + 1, a_{34} = \frac{1}{(x_1)^2},$$

$$a_{41} = 3x_1, a_{42} = \frac{1}{x_1}, a_{43} = -(1 - 2v)x_1, a_{44} = \frac{1 - 2v}{x_1},$$

$$\Delta_1 = -\frac{\gamma \cdot 1200}{2G} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \frac{\gamma \cdot 1200}{2G} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = -\frac{\gamma \cdot 1200}{2G} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \frac{\gamma \cdot 1200}{2G} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = -6,848 \cdot 1, \quad \Delta_2 = 3,655 \cdot 10^{-3}, \Delta_3 = -0,06, \Delta_4 = 5,775 \cdot 10^{-4}.$$

$$\det = 2,181 \cdot 10^3.$$

$$\det = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A = \frac{\Delta_1}{\det}, B = \frac{\Delta_2}{\det}, C = \frac{\Delta_3}{\det}, D = \frac{\Delta_4}{\det},$$

$$A = -3,141 \cdot 10^{-6}, B = 1,676 \cdot 10^{-6}$$

$$C = -2,748 \cdot 10^{-5}, D = 2,648 \cdot 10^{-7}, \xi = \frac{z}{a_1}$$

$$\sigma_r = 2G\xi \left[ 3A + \frac{B}{(x_1)^2} + C(4\nu + 1) + \frac{D}{(x_1)^2} \right],$$

$$\sigma_z = 2G\xi [-6A + 2C(1 - 2\nu)],$$

$$\sigma_\varphi = 2G\xi \left[ 3A + \frac{B}{(x_1)^2} + C(4\nu + 1) - \frac{D}{(x_1)^2} \right],$$

$$\tau_{rz} = 2G \left[ 3Ax_1 - \frac{B}{x_1} - C(1 - 2\nu)x_1 + \frac{D(1-2\nu)}{x_1} \right].$$

$$k = 1, z = k \cdot 5000, \nu = 0,3.$$

$$\sigma_r = 0, \sigma_z = -0,472, \sigma_\varphi = -27,771, \tau_{rz} = 0.$$

$$\text{При } \nu = 0,5; \sigma_r = \sigma_z = \tau_{rz} = \sigma_\varphi = \tau_{rz} = 0, \sigma_\varphi = -27,771 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}.$$

Напряжения согласно формулам (9) пропорциональны глубине.

#### ВЫВОДЫ

В работе рассмотрена вертикальная горная выработка круговой цилиндрической формы глубиной  $h$ . Решение проводится в цилиндрической системе координат для случая меридиональной деформации.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 **Ержанов, Ж. С.** Механика горных пород и её приложения. – Алма-Ата : Наука, 1964. – 138 с.

2 **Лурье, А. И.** Теория упругости. – М., 1970. – 939 с.

Материал поступил в редакцию 13.06.17.

*E. Arinov*

**Цилиндр пішінді вертикаль қуыс тау-кен жынысын қосымша күшсіз байыту кернеуі туралы**

Ө. А. Байқоныров атындағы Жезқазған университеті, Жезқазған қ. Материал 13.06.17 баспаға түсті.

*E. Arinov*

**About the stressed state of the vertical cylindrical excavation without reinforcement**

O. A. Baykonurov Zhezkazgan University, Zhezkazgan. Material received on 13.06.17.

*Мақалада цилиндр пішінді вертикаль қуыс тау-кен жынысының маңайындағы кернеуі қалты зерттелген. Қуыс тау-кен жынысы тірелмеген жағдайы қарастырылған.*

*The article reveals tense condition around vertical mining pit in the form of a round cylinder. The mine without support has been considered.*

ӘОЖ 316:314.3

**Қ. Ж. Жаппар**

магистрант, А. Байтұрсынов атындағы Қостанай мемлекеттік университеті,  
Қостанай қ.

e-mail: kukaktl94.com@gmail.com

**ҚҰПИЯ АҚПАРАТТЫҢ ЖАЙЫЛЫП КЕТУІН  
АЛДЫН АЛУ ЖҮЙЕСІН ЗЕРТТЕУ**

*Бұл мақалада автор кәсіпорынның ақпараттық қауіпсіздік тиімді жүйесін жасау және оны енгізу бойынша ұсыныстарды дайындау мәселесін қарастырады.*

*Кілтті сөздер: құпия ақпарат, ақпараттық қауіпсіздік*

**КІРІСПЕ**

Ақпараттық технологиялардың серпінді дамытуын және кәсіпорындардың қызметінде әр түрлі сәулет пен күрделіліктің ақпараттық жүйесін кеңінен қолдану тұрғысынан қазіргі уақытта компанияның ақпараттық қауіпсіздігінің қамтамасыз етудің тиімді жүйесін құруына үлкен көңіл бөлу қажет.

АҚ тиімді жүйесін арттыру қажеттілігі ақпараттық қорғау проблемалардың шиеленісуімен байланысты. Осында, біріншіден, деректердің құпиялылығының өсіп жатқан қамтамасыз етуінің қажеттілігі. Қазақстандық компаниялар бедел тәуекелдерді, өз клиенттердің, қосалқы мердігерлердің, партнерлердің деректерінің құпиялылығын қамтамасыз ету бойынша жауапкершілікті есепке алу қажеттілігіне келеді. Сонымен бірге, қазақстандық компаниялардың көбісі АҚ жүйесінің құрамдас бөлігі нашар жұмыс істеуде. Осылар өзінің сонынан ақпаратты қорғау жөніндегі шаралардың барабарлығын дәлелдеуде қиыншылықтардан бастап және оқиға пайда болған кезінде оларды тексерудің құқықтық тәсілдерді қолданудың мүмкіндігінің жоқтығымен аяқталатын проблемалардың қатарын тартады.

**НЕГІЗГІ БӨЛІМ**

Кәсіпорынның ақпараттық қауіпсіздігін қамтамасыз ету кешенді тәсілді талап етеді, оның негізінде ұйымдастырушылық (дайын қызметкерлер ұжымы және нормативтік құжаттар) және техникалық (ақпаратты қорғау тәсілдер) құрамдас бөлікті қамтитын ақпараттық қауіпсіздікті қамтамасыз ету жүйесі болу керек.

Қазақстан Республикасында ақпараттық қорғау және ақпараттық қауіпсіздікті қамтамасыз ету мәселесі бір қатар нормативтік, әдістемелік және нормативтік-әдістемелік құжаттарда қозғалады.

Алайда, негізінде, кәсіпорынның ақпараттық қауіпсіздік жүйесіне талаптар қазіргі реалияларда салалық реттеушімен (мысалы, Қаржы қадағалау агенттігі, Ұлттық банк, бейінді министрліктер) немесе ұйымның ішкі нормативтік құжаттармен бекітіледі.

Дегенмен, жақын арада шығарылған басшылық және әдістемелік құжаттарда АҚ басқару жүйесіне, мониторинг және аудитке елеулі талаптарды қоймайды. Олар ақпаратты қорғау бойынша шаралардың тиімділігінің тұрақты бақылауын (тек қана уәкілетті органдардың тұрақты бақылауы көзделген) және қолданыстағы және автоматтандырылған жүйеде әрекет ететін құпия ақпаратты қорғау жүйесін құру әдістемесін көздемейді.

Ішкі ақпараттық қауіпсіздікті қамтамасыз ету тек қазақстандық ғана емес және де әлемдік проблема болып табылады. Егер, корпоративтік жергілікті желілерді енгізудің бірінші жылдары компаниялардың басын ауыртатын сыртқы бұзу (хакер шабуылы) арқылы коммерциялық ақпаратқа рұқсат етілмеген қол жеткізу болып табылса, ал бүгін оны жеңіп шығаруды үйренді. Өз-өзінді құрметтейтін компанияның ІТ-бөлімінде, әдеттегідей, вирусқа қарсы, желілік арасындағы экрандар (файрволдар) және сыртқы шабуылдармен күрес жүргізудің басқа да құралдардың инструментарийлердің кең таңдауы бар.

Ақпараттық қауіпсіздіктің көз қарасымен көптеген компаниялар күшті дауалдың бір қатар периметрлермен қоршаған бекіністерге ұқсайды. Алайда, тәжірибеде, ақпарат оған қарамастан жайылып кетеді: бекіністерде тесіктер бар. Атап айтқанда, тесіктер емес, есікшелер, өйткені, ақпараттың жайылып кетуінің негізгі жолы компаниялардың қызметкерлері болып табылады.

InfoWatch компанияның бас директоры Евгений Преображенский былай деп айтты: «Көптеген жылдар бойы компаниялар вирустық эпидемиялармен аянбай күрес жасады, периметрлерге желілердің арасындағы экрандарды және басып кіруді алдын алу жүйесін орнатты, авторизацияланбаған рұқсатқа қарсы күшті инструменттерді енгізді. Дұшпандық қамаудан қорғау ғаламат биіктерге жетті – ірі компанияның ақпараттық жүйесіне кіру қазір ең жоғары дәрежелі кәсіпқой қана кіре алады, бірақ әрдайым емес».

Алайда, компаниялар басты қауіпті ұмытып кетті, оны ішкі бұзушы, авторизацияның барлық шегін өткен және өз құзыреті шегінде корпоративтік ақпаратына шексіз рұқсат алған өз қызметкері көрсете алады. Мысалы, Deloitte Touche зерттеулері барлық ірі батыс банктер өткен жылда ақпараттың жайылып кетуін айқындағанынды көрсетті, бұдан қоса респонденттердің 72 % оның нәтижесінде \$1 млн. жоғалтты [1].

Ақпараттың жайылып кетуінің көбісі компаниялардың қызметкерлерімен әдейі жасалатыны туралы сендіруге болмайды. Жиі барлығы ұқыпсыздық және жұмыс бастылығы туралы көрсетеді. Күрделі проблеманы тыныштық жағдайда ойлауды қалайтын көптеген қызметкерлер жұмысты үйге әкелетіні құпия емес. Алайда, олар әдеттегідей қағаздардың бумасын алмайды. Қажетті ақпарат сыртқы бұзудан нашар қорғалған жеке электрондық жәшігіне жіберіледі. Бұдан басқа, оған отбасы мүшелері, достар және де компаниямен байланысты емес тұлғалардың рұқсаттары болу мүмкін. Олардың арасында еріксіз инсайдер болудан ешкім кепіл бере алмайды. Компаниямен байланысты емес әлдеқалай рұқсат алған адам ақпараттың коммерциялық құндылығын түсіне алмау мүмкін.

Екінші маңызды проблема компанияның менеджментте ақпараттық бақылаудың жоқтығы болып табылады. Қарапайым қызметкерлерден менеджердің айырмашылығы ақпаратты аударуға ауызша нұсқауды бере алады. Осындай нұсқауларды әдеттегідей, қадағалау өте ауыр, өйткені олар туралы тез ұмытылады. Сол арада осындай жайылып кетудің залалы қарапайым қызметкерлердің салғырт қараудан әлде қайда артығырақ. Өйткені, менеджердің рұқсаты бар стратегиялық ақпарат үлкен коммерциялық құндылығын ұсынады.

Қызметкерлердің және менеджменттің қателіктерінен басқа рұқсат етілмеген жайылып кету арам ниетті іс-қимылдың нәтижесі болу мүмкін. Әр түрлі ірі компанияда өкпелі және «әдеттілік үшін күресуші» болады. Компаниядан шығып, өзімен бірге клиенттердің деректер қорын ала кетіп, қазір Қазақстанда жақсы мінез және айбын сияқты болып саналады. Содан кейін ол қор жұмыстан шығып кеткен қызметкер немесе менеджер жұмысқа келген бәсекелестерде қалқып бетке шығады [2].

Едәуір жиі клиенттік қорларды миноритарлық акционерлер немесе осы салада өз істі ашуды қалайтын компанияның кіші әріптестер ұрлайды.

Жол полицияның, салық инспекцияның, жазып алынған және мобильді байланыс операторлардың деректер қоры бүгінгі таңда ресми емес сатып алуға болады. Бірақ осы ақпарат анықтама бойынша құпия болып саналады [3].

Осы проблема «Дербес деректер және оларды қорғау туралы» Қазақстан Республикасы Заңының шығуымен аса өзектілігін алды. Заңның басты мақсаты адамның және азаматтың дербес деректерін жинау және өңдеу

кезінде оның құқықтары мен бостандықтарын қорғауды қамтамасыз ету болып табылады.

«Дербес деректер және оларды қорғау туралы» Қазақстан Республикасының Заңы Қазақстан Республикасының Парламентімен қабылданды және Ел басы қол қойды, 2013 жылғы 25 мамырда ресми жарияланды.

«Дербес деректер және оларды қорғау туралы» Қазақстан Республикасының Заңы меншік иесіне және операторға рұқсат етілмеген бұзу немесе рұқсаттан дербес деректерді қамтитын қорларды тиісті қорғау бойынша белгіленген талаптарды бұзғаны үшін жауапкершілікті артады. Заңды қабылдағаннан кейін дербес деректер операторлары (яғни барлық мемлекеттік және коммерциялық ұйымдар) өз дербес деректердің ақпараттық жүйелерін қойылған талаптарына сәйкес келтіруге міндетті болды.

Заңның 27-бабына сәйкес мемлекеттік органдар өз құзыреті шегінде дербес деректер және оларды қорғау саласындағы нормативтік құқықтық актілерді әзірдейді және (немесе) бекітеді.

Осылайша, мемлекеттік реттеуші дербес деректерді қорғау бөлігінде талаптарды күшейту мүмкін, ал ол өз кезегінде кәсіпорындардың ақпараттық қауіпсіздікті қамтамасыз ету жүйесін дамытудың катализаторы болып табылу мүмкін.

Сонымен бірге, осы заңды қабылдау Қазақстандағы ақпаратты қорғау саласында бір қатар проблемаларды айқындады және нормативтік және әдістемелік құжаттардың жетілмегенділік осы проблемалардың ірі болып шықты. Кәсіпорынның ақпараттық жүйесінің техникалық құралдарын енгізудің практикалық әдістемесінің жоқтығына байланысты операторлардың көбісімен Заң талаптарын орындамаудың нақты мүмкіндігін белгілеу мүмкін [4].

Бұдан бұрын екін жылда IT-қызметтер сыртқы қауіп-қатерден қорғауға жауап берген болатын, ал ішкі қауіп-қатерлермен қауіпсіздік қызмет жұмыс істеді. Бүгін ол электрондық желілер арқылы және тасымал тасымалдаушы көмегімен аударылатын ақпаратты бақылау мүмкін емес. Оған арнайы әзірленген регламенттер, қызметкерлерді оқыту, арнайы дайындалған қауіпсіздік офицерлер және ақпараттың сыртында ауысу әрекетін айқындау үшін техникалық құралдар қажет [5].

## ҚОРЫТЫНДЫ

Осылайша, менің осы жобандағы жұмысымның негізгі мақсаты кәсіпорынның ақпараттық қауіпсіздік тиімді жүйесін жасау және оны енгізу бойынша ұсыныстарды дайындау мәселені қарастыру болып табылады. Зерделеудің мәні ақпараттық қауіпсіздік жүйесін қамтамасыз етудің техникалық

әдістемесі және құралдары болып табылады. Қазіргі уақытта кәсіпорын желісінің периметрін қорғауды ұйымдастырудың жеткілікті үлкен тәжірибе бар болғанына байланысты зерделеудің көбісі құпия деректердің жайылып кетуін алдын алудың тиімді жүйесін жасау мәселесіне көңіл аударылады.

Бұл жобаны орындау нәтижесінде әзірленген ақпараттық қорғаудың кешенді жүйесі Қазақстан Республикасында қабылданған заңнамалық актілерге және бастамашылық жасайтын құжаттарға сәйкес келеді. Осы жұмыс кәсіпорынның ақпараттық қауіпсіздігін қамтамасыз ету бойынша практикалық шаралардың әдістемелік негізі болып табылады.

Осы жұмыста ұсынылған жобалау және бағдарламалық-аппараттық құралдар Қазақстан Республикасының банк жүйесінің ұйымдарында және өзге де кәсіпорындарда пайдалану мүмкін.

#### ПАЙДАЛАНҒАН ДЕРЕКТЕР ТІЗІМІ

1 **Вендров, А. М.** CASE-технологии. Современные методы и средства проектирования информационных систем. – М. : Финансы и статистика, 2010. – 176 б.

2 **Гольдштейн, Б. С.** Сигнализация в сетях связи. Т. 1. М. : Радио и связь, 2012. – 428 б.

3 **Кузнецов, С. Д.** Проектирование и разработка корпоративных информационных систем. Центр информационных технологий. – М. : МГУ, 2011. – 380 б.

4 **Гольдштейн, Б. С., Ехриель, И. М., Рерле, Р. Д.** Интеллектуальные сети. М. : Радио и связь, 2012. – 580 б.

5 **Кульгин, М.** Технологии корпоративных сетей. – Изд. «Питер», 2010. – 561 с.

Материал 13.06.17 баспаға түсті.

*Қ. Ж. Жаппар*

**Исследование систем противодействия утечек конфиденциальной информации**

Костанайский государственный университет имени А. Байтурсынова, г. Костанай.

Материал поступил в редакцию 13.06.17.

*K. Zh. Zhappar*

**Research of the systems of counteraction to leaks of the confidential information**

A. Baitursynov Kostanay State University, Kostanay.

Material received on 13.06.17.

*В статье автор рассматривает вопросы построения эффективной системы информационной безопасности предприятия и выработка рекомендаций по ее внедрению.*

*In the article the author considers the issues of building an effective system of information security of the enterprise and development of recommendations for its implementation.*

УДК 004.89

**А. Н. Исмуканова<sup>1</sup>, Д. Н. Лаэров<sup>1</sup>,  
А. Т. Кубигенова<sup>2</sup>, З. М. Ожибаева<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>аспирант, <sup>2</sup>к.т.н., доцент, Омский государственный университет имени Ф. М. Достоевского, г. Омск, Россия; <sup>3</sup>преподаватели, магистры информационных систем, Кокшетауский государственный университет имени Ш. Уалиханова, г. Кокшетау, Казахстан  
e-mail: [aigera\\_ismukan@mail.ru](mailto:aigera_ismukan@mail.ru)

#### **КЛАССИФИКАЦИЯ НАУЧНОГО ТЕКСТА С ПОМОЩЬЮ ЛАТЕНТНО-СЕМАНТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

*В статье описаны исследования в области компьютерных технологий, способных к точной оценке классификации научного текста. Рассмотрены вопросы, связанные с применением методов машинного обучения к задаче автоматической классификации текстов. Представлена модель LSA, которая может использоваться для разного ряда задач при обобщении или расширении смысла поискового запроса.*

*Ключевые слова: латентный семантический анализ (ЛСА), искусственные нейронные сети (ANNs), машинное обучение (МА), мешок слов,*

#### **ВВЕДЕНИЕ**

Цель работы состоит в том, чтобы проанализировать, как новые алгоритмы могут улучшить с помощью латентно семантического анализа и оценки кратких изложений. Метод латентного анализа, несмотря на трудоемкость и непрозрачность, может использоваться для разного ряда задач при расширении смысла поискового запроса.

Латентный семантический анализ (ЛСА) – вычислительная лингвистическая модель, которая предлагает математическое представление семантической области. Она также может быть задумана как автоматический статистический метод для представления значения слов и отрывков текста. Этот инструмент способен анализировать огромную, размерную матрицу, где каждая строка представляет собой оцифрованное слово (термин) и столбец имеет один абзац (документ) [1, С. 25-82].

Несмотря на то, что за последние 30 лет исследования в области Искусственного интеллекта (ИИ) достигли значительных успехов, конечная цель этих исследований – создание машин, понимающих человеческий язык, все еще не достигнута.

Исторически так сложилось, что исследования в области ИИ сосредоточены на задачах, которые считались интеллектуально сложными, и поэтому впечатляющими для человека оказались: быстрые вычисления, дословное запоминание, игра в шахматы на гроссмейстерском уровне, автоматическое доказательство теорем и т.д.

Интересно, что для персональных компьютеров все это довольно просто освоить. Ранние триумфы в этих областях внушали оптимизм, который не распространился на другие области, например такие как распознавание объектов или понимание естественного языка, что в свою очередь, привело к многократным периодам пессимизма (известный как « AI winters»).

Не правильное вероятностное распределение слов в любом естественном языке является определенным недостатком. Но эту задачу возможно решить сглаживанием выборки. Например, применение фонетических словосочетаний: распределение становится более «нормальным». Либо используют вероятностный ЛСА (латентно- семантический анализ), так называемый PLSA (Probabilistic latent semantic analysis), сконструированный на мультиномиальном распределении.

Также недостатком метода ЛСА является «туманность» самого метода в частности, выбора количества сингулярных значений диагональной матрицы и интерпретации результата примененных к обработке неструктурированной информации.

Фундаментальный характер в области Искусственного интеллекта проявляется и отражается множеством подходов к пониманию роли науки и техники в разработке создании интеллектуальных машин.

Источники, которого могут быть прослежены от философских работ Канта и Хайдеггера, называется гипотезой воплощенного познания: познание может прийти только из машин, оборудованных сенсорными и моторными навыками (Ручь, 1990; Лакофф и Джонсон, 1999). Эта точка зрения особенно популярна в области робототехники и нейробиологии и

находится в прямом противоречии к высокоуровневому «символическому ИИ» подходу. Хьюберт Дрейфус решительно утверждал, в начале 1960-х, что человеческий разум глубоко зависит от бессознательных инстинктов и рефлексов, что эти навыки не могут быть получены с помощью формальных правил (Дрейфус, 1967).

Расширения этой модели включают лингвистическую модальность, логик высшего порядка, пропозициональные отношения (Крессуэлл, 1985) и т.д. Особенно обоснованной теорией является – Transparent Intensional Logic (TIL), введенной впервые в (Tichý, 1969). TIL основывается на различии между значением, ссылкой и обозначением, позволяет принципиально выводить над предложениями обобщенных в логических построений произвольные высшего порядка. Текущую работу можно посмотреть также из материалов Матерна и (1989); Матерна (2004). Спецификация правила происходит на более низком уровне, и семантические свойства надеются стать (то есть, проявляются в поведении машины) не будучи явно запрограммированными (Чалмерс, 1992) [3, С. 68]. К примерным исследованиям можно включать Искусственные Нейронные сети (ANNs), статистическое моделирование и другие разделы науки машинного обучения. Благодаря доказанной математической основе и использованию математики как базового языка, этот подход позволил «сотрудничать» через многие ранее разъединенные области информатики, такие как обработка изображений, речевая обработка или обработка естественного языка, а также экономика, биология и сама математика (Russell и Norvig, 2009) [2, С. 28].

В 1979 г. в Борке состоялась I Всесоюзная школа-семинар по теории и методологии классификации, в 1981 г. в Новосибирске прошла Всесоюзная конференция по теории классификаций и анализу данных, в 1982 г. в Пушано работал семинар по арифмологическим аспектам классификации, в 1984 г. там же состоялось рабочее совещание по теории классификации. Существенный вклад в это движение внесла деятельность московского междисциплинарного семинара по теории и методологии классификации в МОИП, ленинградского семинара по семиодинамике при совете молодых ученых ЛГУ и других региональных семинаров.

Национальные классификационные общества во многих странах существовали уже в 60-е гг. Международный журнал по классификации издается в ФРГ с 1974 г. В 1982 г. в Аугсбурге состоялась 4-я Международная конференция по исследованию классификаций.

Общая теория классификации строится не на пустом месте. Камни в ее фундамент закладывались такими классиками систематики, как К. Линней, Д. И. Менделеев, А. А. Любищев. Их труды в этом направлении отличаются большим дальностью действия. Критикуя проявления узости в

долгосрочном планировании науки, А. А. Любищев подчеркивал важность поиска и выделял необходимость упорядочения, рассматривая в триединстве план, поиск и порядок. Откликаясь на статью академика Н. Н. Семенова «Наука сегодня и завтра» в газете «Известия» за 9 августа 1959 г., он писал: «На ближайшие 50-100 лет с полной уверенностью можно сказать, что огромная работа должна быть проделана каталогизации и упорядочению колоссального количества отдельных факторов». Наступило время, когда эта работа стала насущной необходимостью.

### ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Задачей машинного обучения относится процесс выполнения переработки информации с помощью интеллектуальной структуры. Этот метод был разработан с появлением ИИ.

Машинное обучение – используется в распознавании текстов во входном потоке. Математический анализ применяется в машинных алгоритмах при изучении разделов теоретической информатики, и известна как вычислительная теория обучения (англ. Computational learning theory).

К области машинного обучения относится большой класс задач на распознавание образов – это исследование рукописного текста, символики, знаков, речи, анализ текстов.

ИИ фокусируется на построении компьютерных программ, которые учатся на опыте (относительно некоторого полезного, но ограниченного класса задач и показатели производительности (Mitchell, 1997)), называют Машинное обучение (МА). Его цель состоит в том, чтобы произвести методы, которые обнаруживают образцы и регулярность в полуструктурированных или неструктурированных данных. Много небольших разделов МА включают классификацию, кластеризацию, вероятностное обоснование или теорию решений.

Несмотря на его успешные приложения, текущие современные методы МА содержат многое из того, что можно было вызвать «достоинством при необходимости» – математические модели, которые управляют ими позади сцены, выбраны для их вычислительного удобного манипулирования, и обычно содержат упрощенные предположения; их часто трудно интерпретировать для человеческих экспертов. С небольшим количеством творческой лицензии это можно было также вызвать «немой, но полезной» парадигмой: даже самые усовершенствованные и современные методы NLP, как варианты Скрытого Выделения Дирихле, описанного в работе, отмечены наивными предположениями, в котором базовая модель явно не соответствует в моделировании естественного языка.

Работа, описанная в этой статье полностью подпадает под эту парадигму. Речь идет о конкретном подполе машинного обучения называется «обучение без учителя», где данные поступают в таком низком качестве и в таких больших количествах, что человеческий «контроль», а также любые проверки человека при ее обработке, является неосуществимым.

Эта начальная глава представляет информацию для последующей части, которая опишет в «безнадзорных» областях определенные методы семантического анализа [4, С. 199-200].

В первой части рассматривается задача масштабируемости при применении этих методов к обширным, современным наборам данных. Затем вторая часть применяет эти общие семантические методы для конкретных, реальных проблем. В нем представлены некоторые связанные семантические алгоритмы, например как тема и сегментация языка.

Цель их состоит в том, чтобы удостовериться, что мы сравниваем «груши с грушами» при рассмотрении семантического сходства в неоднородных текстах.

Семантическая статистика. В данной ситуации определенная актуальность работы по разработке систем преобразования текстовой информации, испытывают трудности даже высококвалифицированные специалисты, в поиске документов и распределение полученных текстовых данных по темам.

Чтобы получить информацию или документ часто используют отдельные абзацы, отрывки, предложения, фразы или даже просто последовательности символов. Идеальная детализация, что представляет собой «документ» зависит от предполагаемого применения состава.

В этих обобщенных настройках документы также иногда используют контексты или блоки. Может быть выгодно просмотреть и хранить документы как «семантически когерентные блоки текста», где каждый блок имеет дело с единственной идеей или темой.

Было доказано, что слова, которые происходят в контекстах, семантически связаны (Harris, 1954; Фурнас и др., 1984); посмотрите (Turney и Pantel, 2010) этот материал для полного обзора. Это часто формулируется более широко как статистическая гипотеза семантики: «Статистические образцы человеческого использования слова могут использоваться, чтобы выяснить то, что имеют в виду люди».

(Ферт, 1957) постулируется, что «Вы должны узнать слово по его окружению». Давно замечено, что слова, которые встречаются в схожих контекстах семантически связаны (Харрис, 1954; Фурнаш с соавт., 1984); для более полного представления ознакомьтесь с трудами (Турней и Пантел, 2010).

Очевидно, что формулировка здесь является достаточно широкая и гипотеза более философская, чем практический характер. Она наиболее тесно связана с лексической семантикой в рамках традиционной иерархии NLP семантики (Аллен, 1995), или отношения слово-слово (Гриффитс и др. 2007).

Тем не менее, статистическая гипотеза семантики служила важной ступенькой к более конкретным, расчетно-ориентированным экземплярам, таким как основанное на расстоянии представление о гипотезе «мешок» слов.

*Bag of words* или мешок слов. Мешок слов или Bag of Words – данная модель не редко рассматривается при обработке документов и текстов, использующий беспорядочный комплекс слов, входящих в обрабатываемый текст. Модель рассматривают в виде матрицы, в которой строка совпадает с отдельным текстом, а столбец – входящим в него словам. Числом вхождения данного слова в определенный документ относятся ячейки. Эта модель преобразовывает человеческий язык слов в понятный для компьютера кодового языка двоичных цифр.

В Информационном поиске гипотеза «мешка слов» предусматривает, что такие частотности слова могут использоваться, чтобы оценить семантическую уместность документов. Другими словами, это утверждает, что частоты отдельных слов достаточно показательны из семантической ассоциации между двумя документами (или документом и запросом).

Само собой разумеется, гипотеза «мешок слов» крайне наивна с лингвистической точки зрения. Игнорируя порядок слов, а также любую синтаксическую структуру, может обязательно подвергнуться серьезной потере информации.

По этой причине в данной работе рассматриваются, в основном, вопросы, связанные с применением методов машинного обучения к задаче автоматической классификации текстов. Отметим некоторые характерные особенности этой задачи:

1 Тексты являются текстами на естественном языке, не имеют четкой формализации, не структурированы, не являются техническими.

2 Количество классов в задачах классификации текстов, как правило, достаточно велико, а сами классы имеют мало общего. Впрочем, в более сложных случаях, не рассмотренных в настоящей работе, классы могут образовывать иерархию.

3 Как правило, большой важностью обладают вопросы производительности, т.к. в приложениях тексты необходимо обрабатывать в реальном масштабе времени.

4 Сама задача достаточно хорошо исследована, имеется большое количество публикаций, посвященных этой теме и содержащих оценки качества работы различных алгоритмов на стандартных наборах данных.

Повышение качества классификации новостных текстов на основе использования современных методов машинного обучения.

Для достижения этой цели в научной работе решаются следующие задачи:

1 Разработка способов признакового описания текстовых документов.

2 Анализ существующих методов решения традиционных задач машинного обучения и модификация этих методов с целью повышения показателей качества моделей, получаемых с их помощью.

3 Разработка модифицированных версий классических алгоритмов машинного обучения.

4 Разработка методов построения модельных деревьев, решений алгоритмических композиций на их основе для решения задач восстановления регрессии и классификации.

5 Сравнительный анализ известных и предложенных автором методов машинного обучения применительно к задачам восстановления регрессии и классификации.

## ВЫВОДЫ

Проанализировав вышеизложенный материал можно сделать вывод, что исследование научных текстов фокусировалось на факторах, влияющих на понимание метода с помощью анализа. В этом исследовании использован изученный материал учеными, а также определены методы и анализы в классификации текста с помощью латентно-семантического анализа.

На базе теоретического конструирования моделей всех возможных форм исследуемой действительности, развитие научных теорий выявило и реализовало возможность построения классификаций [2, 36-38].

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 **Аббаси, Ахмед и Синьчунь Чен.** Визуализация авторства для идентификации // В материалах конференции по информатике и безопасности Информатика ISI 2006, том 3975 лекций в области компьютерных наук, 60-71. – Сан-Диего, Калифорния, США : Springer, 2006. – С. 25-82.

2 **Airoidi, E., D. Blei, S. Fienberg и E. Xing.** Объединение стохастических блочных моделей и смешанного членства для статистического сетевого анализа. Статистический сетевой анализ: модели, проблемы и новые направления 57-74. – 2007. – С. 28.

3 **Ньюман, Д., Асунсьон, А., Смит, П. и Веллинг, М.** Распределенный вывод для скрытого распределения Дирихле. Достижения в системах обработки нейронной информации 20 : 17-24. – 2007. – С. 68.

4 **Розова, С. С.** Классификационная проблема в современной науке. Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1986. – С. 199-200.

Материал поступил в редакцию 13.06.17.

*A. N. Ismukanova<sup>1</sup>, D. N. Lavrov<sup>1</sup>, A. T. Kubigenova<sup>2</sup>, Z. M. Ozhibayeva<sup>2</sup>*

**Латент-семантикалық талдау көмегімен ғылыми жіктеу мәтінін зерттеу**

<sup>1</sup>Ф. М. Достоевский атындағы мемлекеттік университеті, Омск қ.

<sup>2</sup>Ш. Уалиханов атындағы

Көкшетау мемлекеттік университеті, Көкшетау қ.

Материал 13.06.17 баспаға түсті.

*A. N. Ismukanova<sup>1</sup>, D. N. Lavrov<sup>1</sup>, A. T. Kubigenova<sup>2</sup>, Z. M. Ozhibayeva<sup>2</sup>*

**Classification of scientific text using latent-semantic analysis**

<sup>1</sup>F. M. Dostoyevsky Omsk State University, Omsk, Russia;

<sup>2</sup>Sh. Ualikhanov Kokshetau State University, Kokshetau, Kazakhstan.

Material received on 13.06.17.

*Мақалада компьютерлік технологиялар зерттеу саласындағы ғылыми жіктеу мәтін қабілеттілігі нақты бағалау жүргізілген. Автоматты мәтіндерді жіктеу есептеріне машиналық оқыту әдістерін қолдану туралы мәселелері қарастырылды. Ұсынылған LSA модель – бірқатар әр түрлі есептерге міндеттерді қорыту кезінде немесе кеңейту, мағынасын іздеу сұранысы үшін пайдаланылуы мүмкін.*

*The article describes research in the field of computer technology, capable of precision classification of scientific text. New technologies for the LSA model could represent an important advance of the assessment of scientific texts. LSA model despite the complexity of the opacity and can be used for a number of different tasks with a generalization or extension of the meaning of the search query.*

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

### НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ПГУ ИМЕНИ С. ТОРАЙГЫРОВА

#### «ВЕСТНИК ПГУ. Серия физико-математическая»

Редакционная коллегия просит авторов при подготовке статей для опубликования в журнале руководствоваться следующими правилами.

Научные статьи, представляемые в редакцию журнала, должны быть оформлены согласно базовым издательским стандартам по оформлению статей в соответствии с ГОСТ 7.5-98 «Журналы, сборники, информационные издания. Издательское оформление публикуемых материалов», пристатейных библиографических списков в соответствии с ГОСТ 7.1-2003 «Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления».

Статьи должны быть поданы для опубликования в строгом соответствии со следующими правилами:

#### 1. ПО СТРУКТУРЕ САМОЙ СТАТЬИ:

В журнал принимаются статьи набранные на компьютере, напечатанные на одной стороне листа с межстрочным интервалом 1,5, с полями 30 мм со всех сторон листа, электронный носитель со всеми материалами в текстовом редакторе «Microsoft Office Word (97, 2000, 2007, 2010) для WINDOWS».

Статья должна содержать:

**УДК** по таблицам универсальной десятичной классификации (шрифт 14 кегль, не жирными заглавными буквами)

**Сведения об авторах** статьи должны содержать И. О. Фамилия

– на следующей строке ученую степень, ученое звание, место работы (учебы), город (страна для зарубежных авторов)

– на следующей строке e-mail:

(ФИО прописными буквами жирным шрифтом, абзац 1 см по левому краю, шрифт 14 кегль; остальное не жирным шрифтом)

**Заголовок статьи** должен отражать содержание статьи, тематику и результаты проведенного научного исследования. В заголовок статьи необходимо вложить информативность, привлекательность и уникальность научного творчества автора (не более 12 слов, заглавными буквами, жирным шрифтом, абзац 1 см по центру, шрифт 14 кегль, на трех языках: русский, казахский, английский)

**Аннотация** – краткая характеристика назначения, содержания, вида, формы и других особенностей статьи. Должна отражать основные и ценные, по мнению автора, этапы, объекты, их признаки и выводы проведенного исследования. (рекомендуемый объем аннотации – 30-60 слов, прописными буквами, нежирным шрифтом 12 кегль, абзацный отступ слева и справа 1 см, на трех языках: русский, казахский, английский)

**Ключевые слова** – набор слов, отражающих содержание текста в терминах объекта, научной отрасли и методов исследования. (Рекомендуемое количество ключевых слов – 5-7, количество слов внутри ключевой фразы – не более 3, оформляется как аннотация, на одном языке – языке статьи).

**Основной текст статьи** излагается в определенной последовательности его частей, включает в себя:

– слово ВВЕДЕНИЕ / КІРІСПЕ / INTRODUCTION (нежирными заглавными буквами, шрифт 14 кегль, в центре)

Необходимо отразить результаты предшествующих работ уче-ных, что им удалось, что требует дальнейшего изучения, какие есть альтернативы (если нет предшествующих работ – указать приоритеты или смежные исследования). Освещение библиографии позволит отгородиться от признаков заимствования и присвоения чужих трудов. Любое научное изыскание опирается на предыдущие (смежные) открытия ученых, поэтому обязательно ссылаться на источники, из которых берется информация. Также можно описать методы исследования, процедуры, оборудование, параметры измерения, и т.д. (нежирными прописными буквами, шрифт 14 кегль, не более 1 страницы)

– слова ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ / НЕГІЗГІ БӨЛІМ / MAIN PART (нежирными заглавными буквами, шрифт 14 кегль, в центре)

Это отражение процесса исследования или последовательность рассуждений, в результате которых получены теоретические выводы. В научно-практической статье описываются стадии и этапы экспериментов или опытов, промежуточные результаты и обоснование общего вывода в виде математического, физического или статистического объяснения.

При необходимости можно изложить данные об опытах с отрицательным результатом. Затраченные усилия исключают проведение аналогичных испытаний в дальнейшем и сокращают путь для следующих ученых. Следует описать все виды и количество отрицательных результатов, условия их получения и методы его устранения при необходимости.

Проводимые исследования предоставляются в наглядной форме, не только экспериментальные, но и теоретические. Это могут быть таблицы,

схемы, графические модели, графики, диаграммы и т.п. Формулы, уравнения, рисунки, фотографии и таблицы должны иметь подписи или заголовки. (нежирными прописными буквами, шрифт 14 кегль, не более 3-8 страниц, формулы следует набирать в Microsoft Equation Editor; иллюстрации, перечень рисунков представляются в формате TIF или JPG с разрешением не менее 300 dpi.)

– слово ВЫВОДЫ / ҚОРЫТЫНДЫ / CONCLUSION (нежирными заглавными буквами, шрифт 14 кегль, в центре)

Собираются тезисы основных достижений проведенного исследования. Они могут быть представлены как в письменной форме, так и в виде таблиц, графиков, чисел и статистических показателей, характеризующих основные выявленные закономерности. Выводы должны быть представлены без интерпретации авторами, что дает другим ученым возможность оценить качество самих данных и позволит дать свою интерпретацию результатов (нежирными прописными буквами, шрифт 14 кегль, не более 1 страницы).

– слова СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ / ПАЙДАЛАНҒАН ДЕРЕКТЕР ТІЗІМІ / REFERENCES (Нежирными заглавными буквами, шрифт 14 кегль, в центре, не более 5-20 ссылок: книг, статей, интернет-сайтов используемых в статье. Очередность источников определяется следующим образом: сначала последовательные ссылки, т.е. источники на которые вы ссылаетесь по очередности в самой статье, затем дополнительные источники, на которых нет ссылок – т.е. источники, которые не имели место в статье, но рекомендованы вами для кругозора читателям, как смежные работы, проводимые параллельно.)

## 2. ПО СЕКЦИЯМ:

СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИКА» – принимаются статьи теоретического и прикладного характера узкой направленности. К ним, например, относятся статьи следующего характера: доказательства полученных новых утверждений или новые способы доказательств известных утверждений, обобщение результатов, их сравнение и анализ; получение новых решений известных задач математики или формулировка (постановка) новых задач и способов их решения; приложение известных теоретических и практических математических исследований в смежных отраслях как физика, информатика, биология, химия и т.д.

СЕКЦИЯ «ФИЗИКА» – принимаются статьи теоретического и при-кладного характера. К ним, например, относятся статьи следующего характера: построение математической и компьютерной модели физических процессов, новых методов решения; обобщение известных результатов, их

сравнение и анализ; физическое описание или сравнение явлений природы, встречающихся в астрономии, биологии, химии, инженерии и т.д.

СЕКЦИЯ «ИНФОРМАТИКА». К ним, например, относятся статьи следующего характера: компьютерная реализация математических задач, физических, экономических, химических, биологических и т.п. процессов; составление программных продуктов для реализации социальных, экологических, демографических и других проектов.

СЕКЦИЯ «НАУЧНО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ОТРАСЛЯМ» (не путать с методикой преподавания). К ним относятся статьи следующего характера: отслеживание, анализ, сравнение теоретических и прикладных исследований в области математики, физики, информатики; обзор и разработка программных средств, форм организации обучения для развития и стимулирования научной деятельности в образовательных учреждениях и т.п.

### ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

Все статьи должны сопровождаться двумя рецензиями доктора или кандидата наук.

Редакция не занимается литературной и стилистической обработкой статьи. При необходимости статья возвращается автору на доработку. За содержание статьи несет ответственность Автор. Статьи, оформленные с нарушением требований, к публикации не принимаются. Датой поступления статьи считается дата получения редакцией ее окончательного варианта.

Статьи публикуются по мере поступления.

Периодичность издания журналов – четыре раза в год (ежеквартально).

Статью (бумажная, электронная версии, оригинал квитанции об оплате) следует направлять по адресу: 140008, Казахстан, г. Павлодар, ул. Ломова, 64, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, Издательство «Кереку», каб. 137.

Тел. 8 (7182) 67-36-69, (внутр. 1147), факс: 8 (7182) 67-37-05.

E-mail: kereku@psu.kz

Оплата за публикацию в научном журнале составляет 5000 (Пять тысяч) тенге.

### Наши реквизиты:

РГП на ПХВ Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова РНН 451800030073 БИН 990140004654	РГП на ПХВ Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова РНН 451800030073 БИН 990140004654
АО «Цеснабанк» ИИК KZ57998FTB00 00003310 БИК TSESKZK A Кбе 16 Код 16 КНП 861	АО «Народный Банк Казахстана» ИИК KZ156010241000003308 БИК HSBKZZKX Кбе 16 Код 16 КНП 861

### ОБРАЗЦЫ ОФОРМЛЕНИЯ БИБЛИОГРАФИИ

#### ОПИСАНИЕ КНИГ

К-во авторов	Примеры
1	1 <b>Эльсгольц, Л. Э.</b> Дифференциальные уравнения и вариацион-ные исчисление: [учебник]. – М. : Наука, 1965. – 424 с. 2 <b>Фихтенгольц, Г. М.</b> Курс дифференциального и интегрального исчисления: [учебник]. В 3-х томах. Т. 1. – 7-е изд. стер. – М. : Наука, 1970. – 607 с.
2 и более	1 <b>Луговая, Г. Д.</b> Функциональный анализ. Специальные курсы: [учебное пособие] / Г. Д. Луговая, А. Н. Шерстнев. – М. : ЛКИ, 2008. – 255 с. 2 <b>Канторович, Л. В.</b> Функциональный анализ: [учебник] / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – 2-е изд., перераб. – М. : Наука, 1977. – 741 с. 3 <b>Виленкин, Н. Я.</b> Дифференциальные уравнения: [учебное пособие] / Н. Я. Виленкин, М. А. Доброхотова, А. Н. Сафонов. – М. : Просвещение, 1984. – 176 с.

ОПИСАНИЕ СТАТЬИ ИЗ НАУЧНОГО ЖУРНАЛА

К-во авторов	Примеры
1	1 <b>Рахимжанова, А. К.</b> О политике безопасности компьютерных сетей в корпоративных инфраструктурах // Вестник ПГУ. Серия физико-математическая. – 2013. – №2. – С. 98-103.
2 и более	1 <b>Зацепин, П. М.</b> Комплексная безопасность потребителей экс-плуатационных характеристик строений / П. М. Зацепин, Н. Н. Теодорович, А. И. Мохов // Промышленное и гражданское строительство. – 2009. – № 3. – С. 42.

ОПИСАНИЕ СТАТЬИ ИЗ  
СБОРНИКА НАУЧНЫХ ТРУДОВ КОНФЕРЕНЦИЙ

К-во авторов	Примеры
1	1 <b>Тургумбаев, М. Ж.</b> О коэффициентах двойных рядов Фурье по мультипликативным системам // Материалы III Республиканской научной конференции по теории приближения и вложения функциональных пространств. – Караганда, 1998. – С. 140-144.
2 и более	1 <b>Данилова, Н. Е.</b> Моделирование процессов в следящем приводе с исполнительным двигателем постоянного тока при независимом возбуждении / Н. Е. Данилова, С. Н. Ниссенбаум // Инновации в образовательном процессе: сб. тр. науч.-практич. конф. – Чебоксары: ЧПИ (ф) МГОУ, 2013. – Вып. 11. – С. 158-160.

Теруге 15.06.2017 ж. жіберілді. Басуға 26.06.2017 ж. қол қойылды.  
 Форматы 70x100 1/16. Кітап-журнал қағазы.  
 Көлемі шартты 5,7 б.т. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.  
 Компьютерде беттеген М. А. Шрейдер  
 Корректорлар: А. Р. Омарова, Б. Б. Ракишева  
 Тапсырыс № 3077

Сдано в набор 15.06.2017 г. Подписано в печать 26.06.2017 г.  
 Формат 70x100 1/16. Бумага книжно-журнальная.  
 Объем 5,7 ч.-изд. л. Тираж 300 экз. Цена договорная.  
 Компьютерная верстка М. А. Шрейдер  
 Корректоры: А. Р. Омарова, Б. Б. Ракишева  
 Заказ № 3077

«Кереку баспасынан басылып шығарылған  
 С. Торайғыров атындағы  
 Павлодар мемлекеттік университеті  
 140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

«КЕРЕКУ» баспасы  
 С. Торайғыров атындағы  
 Павлодар мемлекеттік университеті  
 140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.  
 67-36-69  
 e-mail: kereku@psu.kz