

---

С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университетінің  
ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Павлодарского государственного университета имени С. Торайгырова

# ПМУ ХАБАРШЫСЫ

Физика-математикалық сериясы

1997 жылдан бастап шығады



# ВЕСТНИК ПГУ

Физико-математическая серия

Издается с 1997 года

№1 (2016)

---

Павлодар

**НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ**  
Павлодарского государственного университета имени С. Торайгырова

**Физико-математическая серия**  
выходит 4 раза в год

**СВИДЕТЕЛЬСТВО**

о постановке на учет средства массовой информации  
№ 14213-Ж

выдано

Министерством культуры, информации и общественного согласия  
Республики Казахстан

**Бас редакторы – главный редактор**

Тлеукенов С. К.

*доктор ф.-м.н., профессор*

Заместитель главного редактора

Испулов Н. А., *к.ф.-м.н., доцент*

Ответственный секретарь

Сыздыкова А. Т.

**Редакция алқасы – Редакционная коллегия**

Отелбаев М. О., *д.ф.-м.н., профессор, академик НАН РК*

Уалиев Г. У., *д.ф.-м.н., профессор, академик НАН РК*

Рахмон А. Х., *PhD (Пакистан)*

Ткаченко И. М., *д.ф.-м.н., профессор(Испания)*

Демкин В. П., *д.ф.-м.н., профессор(Россия)*

Бактыбаев К. Б., *д.ф.-м.н., профессор*

Кумеков С. Е., *д.ф.-м.н., профессор*

Куралбаев З., *д.ф.-м.н., профессор*

Оспанов К. Н., *д.ф.-м.н., профессор*

Нургожина Б. В., *технический редактор*

За достоверность материалов и рекламы ответственность несут авторы и рекламодатели

Редакция оставляет за собой право на отклонение материалов

При использовании материалов журнала ссылка на «Вестник ПГУ» обязательна

© ПГУ имени С. Торайгырова

**МАЗМҰНЫ**

**МАТЕМАТИКА**

**Дроботун Б. Н., Алимова И. А.**

Рационал сандар өрісіне байланысты  
екі мүшелі теңдеулі Галуа топтары туралы (I).....6

**Дроботун Б. Н., Алимова И. А.**

Рационал сандар өрісіне байланысты  
екі мүшелі теңдеулі Галуа топтары туралы (II).....18

**Дроботун Б. Н., Умарбекова С. Е.**

Графтар теориясындағы матрицалық әдістер (I).....26

**Дроботун Б. Н., Умарбекова С. Е.**

Графтар теориясындағы матрицалық әдістер (II).....36

**Павлюк И. И., Павлюк Ин. И.**

Тақ ретті шекті топтар және Томпсон-Фейт теоремасы туралы.....45

**ФИЗИКА**

**Дайгарди А. П., Кисиков Т., Лин Ц. Х., Ширер К. Р.,**

**Лоусон М. М., Грэйф Х.-Дж., Чу Дж.-Х., Фишер И. Р.,**

**Фернандес Р. М., Куро Н. Дж., Испулов Н. А., Жукенов М. К.**

$\text{BaFe}_2(\text{As}_{1-x}\text{P}_x)_2$  бір текті емес нематикалық  
флуктуациялардың ЯМР дәлелі.....54

**Печерицын А. А.**

Дирак бір өлшемді стационарлық теңдеудің  
Дарбу түрлендіруі: дифференциалдауды меншікті  
мәндерге көбейтумен ауыстыру.....68

**ИНФОРМАТИКА**

**Мауленов С. С., Аймешов Ж. А.**

Google Maps картасын RAD Studio XE  
қосымшасында қолданудағы негізгі мәселелер.....78

**БАҒЫТТАР БОЙЫНША ҒЫЛЫМИ-МЕТОДОЛОГИЯЛЫҚ ЗЕРТТЕУЛЕР**

**Бурзумбаева С. Қ.**

Екі белмелі пәтерлер мысалында  
Астана қаласында қайталама тұрғын үй нарығының  
регрессиялық модельді Gretl ортасында жобалау.....84

**Джарасова Г. С., Сырнай Б.**

Алгоритмдер теориясын интеллектуалды  
жүйелерде қолданылуына қатысты терминдерге шолу.....91

**Разахова Б. Ш., Скабаева Т. Н.**

Элементарлық математика пәні бойынша білім қорын нормалдау.....100

**Уалиев Н. С., Серубай А. Қ.**

Оқу үдерісінде Web 3.0 тұжырымдамасының мүмкіндіктерін зерттеу.....108

Авторларға арналған ережелер.....116

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

<b>Дроботун Б. Н., Алимова И. А.</b> О группах Галуа двучленных уравнений над полем рациональных чисел (II).....	6
<b>Дроботун Б. Н., Алимова И. А.</b> О группах Галуа двучленных уравнений над полем рациональных чисел (I).....	18
<b>Дроботун Б. Н., Умарбекова С. Е.</b> Матричные методы в теории графов (I).....	26
<b>Дроботун Б. Н., Умарбекова С. Е.</b> Матричные методы в теории графов (II).....	36
<b>Павлюк И. И., Павлюк Ин. И.</b> О конечных группах нечетного порядка и теореме Томпсона-Фейта.....	45

### ФИЗИКА

<b>Дайгарди А. П., Кисиков Т., Лин Ц. Х., Ширер К. Р., Лоусон М. М., Грэйф Х.-Дж., Чу Дж.-Х., Фишер И. Р., Фернандес Р. М., Куро Н. Дж., Испулов Н. А., Жуkenов М. К.</b> ЯМР доказательства неоднородных нематических флуктуаций в $BaFe_2(AS_{1-x}P_x)_2$ .....	54
<b>Печерицын А. А.</b> Преобразование дарбу одномерного стационарного уравнения Дирака: замена дифференцирования умножением на собственные значения.....	68

### ИНФОРМАТИКА

<b>Мауленов С. С., Аймешов Ж. А.</b> основные проблемы использования карты Google Maps в приложениях RAD Studio XE.....	78
---	----

### НАУЧНО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ОТРАСЛЯМ

<b>Бурзумбаева С. К.</b> Разработка в среде Gretl регрессионной модели рынка вторичного жилья г. Астана на примере двухкомнатных квартир.....	84
<b>Джарасова Г. С., Сырнай Б.</b> Обзор терминов теории алгоритмов, часто используемых в интеллектуальных системах.....	91
<b>Разахова Б. Ш., Скабаева Т. Н.</b> Нормирование остаточных знаний по элементарной математике.....	100
<b>Уалиев Н. С., Серубай А. К.</b> Исследование возможностей концепции Web 3.0 в образовательном процессе.....	108
Правила для авторов.....	116

## CONTENT

### MATHEMATICS

<b>Drobotun B., Alimova I.</b> On the Galois groups of two-term equations over the field of rational numbers (I).....	6
<b>Drobotun B., Alimova I.</b> On the Galois groups of two-term equations over the field of rational numbers (II).....	18
<b>Drobotun B., Umarbekova S.</b> The matrix methods in the graph theory (I).....	26
<b>Drobotun B., Umarbekova S.</b> The matrix methods in the graph theory (II).....	36
<b>Pavlyuk I., Pavlyuk In.</b> On the odd-order finite groups and the Thomson-Feit theorem.....	45

### PHYSICS

<b>Dioguardi A. P., Kissikov T., Lin C. H., Shirer K. R., Lawson M. M., Grafe H.-J., Chu J.-H., Fisher I. R., Fernandes R. M., Curro N. J., Ispulov N. A., Zhukonov M. K.</b> NMR evidence for inhomogeneous nematic fluctuations in $BaFe_2(AS_{1-x}P_x)_2$ .....	54
<b>Pecheritsyn A.</b> Darboux transformation of one-dimensional stationary Dirac equation: replacement of differentiation by multiplication on eigenvalues.....	68

### INFORMATICS

<b>Maulenov S. S., Aimeshov Zh. A.</b> The main problems of using Google Maps in RAD Studio XE applications.....	78
--	----

### SCIENTIFIC AND METHODOLOGICAL BRANCH RESEARCHES

<b>Burgumbayeva S.</b> Development of the regression model of the secondary housing market in Astana in Gretl environment on an example of two-bedroom apartments.....	84
<b>Jarassova G., Sirnay B.</b> Review of the terms of the theory of algorithms commonly used in intelligent systems.....	91
<b>Razakhova B., Skabayeva T.</b> Rationing the residual knowledge in elementary mathematics.....	100
<b>Ualiyev N. S., Serubay A. K.</b> Research of the possibilities of the concept of Web 3.0 in educational process.....	108
Rules for authors.....	116

Секция  
«МАТЕМАТИКА»

УДК 511. 238

**Б. Н. Дроботун<sup>1</sup>, И. А. Алимова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>д.п.н., профессор, <sup>2</sup>студент

Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова,  
г. Павлодар

e-mail: <sup>1</sup>drobotun.nina@mail.ru, <sup>2</sup>fc.saladin@gmail.com

**О ГРУППАХ ГАЛУА ДВУЧЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ  
НАД ПОЛЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ (I)**

*Предлагаемая статья представляет собой первую часть работы, связанной с решением задачи педагогического отражения основ теории Галуа в содержание логико-алгебраического образования в высших учебных заведениях. В этой статье разрабатываются и реализуются инструментально-технологические подходы к построению групп Галуа и соответствий Галуа полей разложения двучленных уравнений вида  $x^4 - p = 0$  над полем рациональных чисел, где  $p$  – произвольное простое число.*

*Ключевые слова: двучленное уравнение, корень уравнения, автоморфизм, группа подстановки, поле, подполе, алгебраическое расширение, группа Галуа.*

**ВВЕДЕНИЕ**

Под двучленным уравнением над полем  $P$  понимается алгебраическое уравнение вида  $x^n - a = 0$ , где  $a \in P$ . Если поле  $P$  содержит корни  $n$ -ой степени из единицы и  $n$  не делится на характеристику этого поля, то группа Галуа уравнения  $x^n - a = 0$  циклична. В общем случае, эта группа (с точностью до изоморфизма) является одной из подгрупп группы всех корней  $n$ -ой степени из единицы. Если же (в частности) многочлен  $x^n - a$  неприводим над полем  $P$ , то группа Галуа уравнения  $x^n - a = 0$  изоморфна всей этой группе [1, с. 209].

Т.к. поле рациональных чисел  $Q$  не содержит корней  $n$ -ой степени из единицы при  $n > 2$ , то для уравнения  $x^n - a = 0$ ,  $a \in Q$ , вышеприведенный результат, в общем случае, не будет иметь места. В связи с этим представляет интерес выявление технологий практического построения групп Галуа полей разложения уравнения  $x^n - a = 0$  над полем  $Q$ .

В предлагаемой статье, представляющей собой первую часть работы, связанной с выявлением подходов к решению проблемы педагогического отражения основ теории Галуа в содержание логико-алгебраического образования в высших учебных заведениях, разрабатываются и реализуются технологии построения групп Галуа и соответствий Галуа применительно к полям разложения уравнения вида  $x^4 - p = 0$ , где  $p$  – произвольное простое число.

**ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ**

Далее, в рассуждениях теоретического характера, под  $p$  будет пониматься любое простое число, а практическая реализация предлагаемых технологий будет осуществляться для случая  $p = 2$  [2, стр. 229]. В качестве поля, в рамках которого производятся все построения, будет рассматриваться поле комплексных чисел  $C$ .

Многочлен  $h(x) = x^4 - p$  (по критерию Эйзенштейна) неприводим над полем  $Q$ . Корнями этого многочлена являются числа  $\pm \sqrt[4]{p}$  и  $\pm i\sqrt[4]{p}$ . Следовательно, поле его разложения можно получить путем присоединения к  $Q$  элементов  $\sqrt[4]{p}$  и  $i$ , т.е. в результате последовательного выполнения двух алгебраических расширений, образующих возрастающую цепочку подполей:

$$Q < Q(\sqrt[4]{p}) < Q(\sqrt[4]{p}; i)$$

Так как  $[Q(\sqrt[4]{p}; i) : Q] = 4$  и элементы  $1; \sqrt[4]{p}; \sqrt[4]{p^2}; \sqrt[4]{p^3}$  образуют базис поля  $Q(\sqrt[4]{p})$ , как векторного пространства, над полем  $Q$ ;  $[Q(\sqrt[4]{p}; i) : Q(\sqrt[4]{p})] = 2$  и элементы  $1; i$ , аналогичным образом, составляют базис поля  $Q(\sqrt[4]{p}; i)$  над полем  $Q(\sqrt[4]{p})$ , то, согласно теореме о степенях [1, стр. 144],  $[Q(\sqrt[4]{p}; i) : Q] = 8$  и элементы

$$1; \sqrt[4]{p}; \sqrt[4]{p^2}; \sqrt[4]{p^3}; i; i\sqrt[4]{p}; i\sqrt[4]{p^2}; i\sqrt[4]{p^3} \tag{1}$$

составляют базис поля  $Q(\sqrt[4]{p}; i)$  над полем  $Q$ .

Подобно тому, как это делалось в работах [2;3], можно показать, что элемент  $\theta = \sqrt[4]{p} - i$  является примитивным элементом расширения

$$Q(\sqrt[4]{p}; i) \text{ поля } Q \text{ и, следовательно, элементы} \\ 1; \theta; \theta^2; \theta^3; \theta^4; \theta^5; \theta^6; \theta^7 \tag{2}$$

составляют второй базис расширения  $Q(\sqrt[4]{p}; i) = Q(\theta)$  над  $Q$ .

Через  $T = \|\tau_{ij}\|$ ,  $i = 1;2;\dots;8$ ,  $j = 1;2;\dots;8$ , обозначим матрицу перехода от базиса (1) к базису (2), т.е. матрица  $S = T^{-1} = \|s_{ij}\|$ ,  $i = 1;2;\dots;8$ ,  $j = 1;2;\dots;8$ , будет матрицей перехода от базиса (2) к базису (1).

Пусть  $f(x)$  – минимальный многочлен элемента  $\theta$ . Т.к. система элементов (1) – базис  $Q(\theta)$  над  $Q$ , то  $\deg f(x)$  и группа Галуа  $G(Q(\theta)/Q)$  расширения  $Q(\theta)$  поля  $Q$  является конечной группой восьмого порядка. Через  $\theta_1; \theta_2; \theta_3; \theta_4; \theta_5; \theta_6; \theta_7; \theta_8$ , ( $\theta = \theta_1$ ), обозначим корни многочлена  $f(x)$ . При автоморфизмах поля  $Q(\theta)$  над  $Q$  примитивный элемент  $\theta = \theta_1$  переходит в сопряженные с ним над  $Q$  элементы, т.е. в корни  $\theta_i$ ,  $i = 1;2;\dots;8$  многочлена  $f(x)$  и каждый из этих автоморфизмов определяется образом элемента  $\theta$ .

Пусть  $G(Q(\theta)/Q) = \langle \{\Phi_{\theta_i} / i = 1;2;\dots;8\}; \bullet \rangle$ , где  $\Phi_1 = \varepsilon$  – тождественный автоморфизм и  $\Phi_i$  – автоморфизм, переводящий корень  $\theta = \theta_1$  в корень  $\theta_i$ ,  $i = 1;2;\dots;8$ .

Заметим, что минимальным многочленом элемента  $i$  над полем  $Q(\sqrt[4]{p})$  является многочлен  $x^2 + 1$  и присоединение к полю  $Q(\sqrt[4]{p})$  любого его корня, к примеру корня  $i$ , влечет присоединение другого его корня, т.е. корня  $(i)$ . Отметим, далее, что многочлен  $f(x) = x^4 - p$  неприводим не только над полем  $Q$ , но и над его расширением  $Q(i)$  и присоединение к полю  $Q(\sqrt[4]{p})$  любого корня этого многочлена, в частности корня  $\sqrt[4]{p}$ , влечет присоединение к  $Q(i)$  всех других его корней, т.е. корней  $\sqrt[4]{p}; -\sqrt[4]{p}; i\sqrt[4]{p}$ . Отсюда получаем следующее утверждение:

*Предложение 1.* Поле  $Q(\sqrt[4]{p}; i)$  является расширением Галуа поля  $Q(\sqrt[4]{p})$  степени 2 и расширением Галуа поля  $Q(i)$  степени 4.

Из предложения 1 следует, что среди автоморфизмов группы  $G(Q(\theta)/Q)$  имеется автоморфизм, оставляющий неподвижным поле  $Q(\sqrt[4]{p})$  и переводящий  $i$  в  $-i$  и автоморфизм, оставляющий неподвижным поле  $Q(i)$  и переводящий  $\sqrt[4]{p}$  в  $i\sqrt[4]{p}$ . Обозначим эти автоморфизмы через  $\eta$  и  $\lambda$ , т.е.

$$\eta(i); (\forall x \in Q(\sqrt[4]{p})) (\eta(x) = x) \tag{3}$$

и

$$\lambda(\sqrt[4]{p}) = i\sqrt[4]{p}; (\forall x \in Q(i)) (\lambda(x) = x) \tag{4}$$

Из соотношений (3) и (4) получаем:

$$\eta^2(i) = \eta(\eta(i)) = \eta(-i) = -\eta(i) = -(-i) = i \tag{5}$$

и

$$\lambda^2(\sqrt[4]{p}) = \lambda(\lambda(\sqrt[4]{p})) = \lambda(i\sqrt[4]{p}) = \lambda(i) \cdot \lambda(\sqrt[4]{p}) = i \cdot i\sqrt[4]{p} = -\sqrt[4]{p}$$

$$\lambda^3(\sqrt[4]{p}) = \lambda(\lambda^2(\sqrt[4]{p})) = \lambda(-\sqrt[4]{p}) = -\lambda(\sqrt[4]{p}) = -(i\sqrt[4]{p}) = -i\sqrt[4]{p}; \tag{6}$$

$$\lambda^4(\sqrt[4]{p}) = \lambda(\lambda^3(\sqrt[4]{p})) = \lambda(-i\sqrt[4]{p}) = \lambda(-i) \cdot \lambda(\sqrt[4]{p}) = (-i) \cdot (i\sqrt[4]{p}) = \sqrt[4]{p}.$$

Из цепочки равенств (5) следует, что автоморфизм  $\eta$  имеет в группе  $G(Q(\theta)/Q)$  порядок 2. Аналогичным образом, из совокупности равенств (6) получаем, что автоморфизм  $\lambda$  в этой группе имеет порядок 4.

Другими словами, элементы  $\eta$  и  $\lambda$  порождают в группе  $G(Q(\theta)/Q)$  циклические подгруппы порядка 2 и порядка 4, соответственно.

Обозначая эти подгруппы, в соответствии с далее полученной нумерацией всех подгрупп группы  $G(Q(\theta)/Q)$ , через  $G_3 = \langle \{\varepsilon; \eta\}; \bullet \rangle$  и  $G_7 = \langle \{\varepsilon; \lambda; \lambda^2; \lambda^3\}; \bullet \rangle$ , получаем, что  $\eta \notin G_7$  и  $[G(Q(\theta)/Q): G_7] = 2$ .

Исходя из этого, получаем следующее описание группы  $G(Q(\theta)/Q)$ .

*Предложение 2.* Автоморфизмы  $\eta$  и  $\lambda$  являются порождающими элементами группы  $G(Q(\theta)/Q)$ .

Непосредственная проверка показывает, что  $(\eta \cdot \lambda)(i) = (\lambda^3 \cdot \eta)(i)$  и  $(\eta \cdot \lambda)(\sqrt[4]{p}) = (\lambda^3 \cdot \eta)(\sqrt[4]{p})$ , т.е. что автоморфизмы  $\eta \cdot \lambda$  и  $\lambda^3 \cdot \eta$  действуют на порождающие элементы  $\sqrt[4]{p}$  и  $i$  поля  $Q(\sqrt[4]{p}; i) = Q(\theta)$  (над полем  $Q$ ) одинаковым образом. Отсюда следует, что автоморфизмы  $\eta \cdot \lambda$  и  $\lambda^3 \cdot \eta$  поля  $Q(\sqrt[4]{p}; i)$  равны:

$$\eta \cdot \lambda = \lambda^3 \cdot \eta \tag{7}$$

С учетом соотношения (7) нетрудно проверить, что автоморфизмы  $\varepsilon; \lambda; \lambda^2; \lambda^3; \eta; \lambda\eta; \lambda^2\eta; \lambda^3\eta$ ; группы  $G(Q(\theta)/Q)$  попарно различны, т.е.  $G(Q(\theta)/Q) = \langle \{\varepsilon; \lambda; \lambda^2; \lambda^3; \eta; \lambda\eta; \lambda^2\eta; \lambda^3\eta\}; \bullet \rangle$ , при этом, бинарная операция « $\bullet$ » этой группы задается следующей таблицей Кэли (смотри таблицу 1).

Таблица 1 – Таблица Кэли группы  $G(Q(\theta)/Q)$

$\bullet$	$\varepsilon$	$\lambda$	$\lambda^2$	$\lambda^3$	$\eta$	$\lambda\eta$	$\lambda^2\eta$	$\lambda^3\eta$
$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\lambda$	$\lambda^2$	$\lambda^3$	$\eta$	$\lambda\eta$	$\lambda^2\eta$	$\lambda^3\eta$
$\lambda$	$\lambda$	$\lambda^2$	$\lambda^3$	$\varepsilon$	$\lambda\eta$	$\lambda^2\eta$	$\lambda^3\eta$	$\eta$
$\lambda^2$	$\lambda^2$	$\lambda^3$	$\varepsilon$	$\lambda$	$\lambda^2\eta$	$\lambda^3\eta$	$\eta$	$\lambda\eta$
$\lambda^3$	$\lambda^3$	$\varepsilon$	$\lambda$	$\lambda^2$	$\lambda^3\eta$	$\eta$	$\lambda\eta$	$\lambda^2\eta$
$\eta$	$\eta$	$\lambda^3\eta$	$\lambda^2\eta$	$\lambda\eta$	$\varepsilon$	$\lambda^3$	$\lambda^2$	$\lambda$
$\lambda\eta$	$\lambda\eta$	$\eta$	$\lambda^3\eta$	$\lambda^2\eta$	$\lambda$	$\varepsilon$	$\lambda^3$	$\lambda^2$
$\lambda^2\eta$	$\lambda^2\eta$	$\lambda\eta$	$\eta$	$\lambda^3\eta$	$\lambda^2$	$\lambda$	$\varepsilon$	$\lambda^3$
$\lambda^3\eta$	$\lambda^3\eta$	$\lambda^2\eta$	$\lambda\eta$	$\eta$	$\lambda^3$	$\lambda^2$	$\lambda$	$\varepsilon$

Зная строение группы  $G(Q(\theta)/Q)$  и корень  $\theta = \theta_1 = \sqrt[4]{p} + i$  минимального многочлена  $f(x)$  можно получить остальные его корни  $\theta_2; \theta_3; \theta_4; \theta_5; \theta_6; \theta_7; \theta_8$ . А именно:

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \sqrt[4]{p} - i; \quad \theta_3 = -\sqrt[4]{p} + i; \quad \theta_4 = -\sqrt[4]{p} - i; \\ \theta_5 &= i + i\sqrt[4]{p}; \quad \theta_6 = i - i\sqrt[4]{p}; \quad \theta_7 = -i + i\sqrt[4]{p}; \\ \theta_8 &= -i - i\sqrt[4]{p}. \end{aligned}$$

Действительно:

$$\begin{aligned} \lambda(\theta) &= \lambda(\theta_1) = \lambda(\sqrt[4]{p} + i) = \lambda(\sqrt[4]{p}) + \lambda(i) = i\sqrt[4]{p} + i = i + i\sqrt[4]{p} = \theta_5, \\ \lambda^2(\theta) &= \lambda(\lambda(\theta_1)) = \lambda(i\sqrt[4]{p} + i) = \lambda(i\sqrt[4]{p}) + \lambda(i) = \\ &= \lambda(i) \cdot \lambda(\sqrt[4]{p}) + i = i \cdot i\sqrt[4]{p} + i = -\sqrt[4]{p} + i = \theta_3, \\ \lambda^3(\theta) &= \lambda(\lambda^2(\theta_1)) = \lambda(-\sqrt[4]{p} + i) = -\lambda(\sqrt[4]{p}) + \lambda(i) = -i\sqrt[4]{p} + i = i - i\sqrt[4]{p} = \theta_6, \\ \eta(\theta) &= \eta(\theta_1) = \eta(\sqrt[4]{p} + i) = \eta(\sqrt[4]{p}) + \eta(i) = \sqrt[4]{p} - i = \theta_2, \\ \lambda\eta(\theta) &= \lambda(\eta(\theta_1)) = \lambda(\sqrt[4]{p} - i) = \lambda(\sqrt[4]{p}) - \lambda(i) = i\sqrt[4]{p} - i = -i + i\sqrt[4]{p} = \theta_7, \\ \lambda^2\eta(\theta) &= \lambda((\lambda\eta)(\theta)) = \lambda(i\sqrt[4]{p} - i) = \lambda(i\sqrt[4]{p}) - \lambda(i) = \\ &= \lambda(i) \cdot \lambda(\sqrt[4]{p}) - i = i \cdot i\sqrt[4]{p} - i = -\sqrt[4]{p} - i = \theta_4, \\ \lambda^3\eta(\theta) &= \lambda((\lambda^2\eta)(\theta)) = \lambda(-\sqrt[4]{p} - i) = -\lambda(\sqrt[4]{p}) - \lambda(i) = \\ &= -\lambda(\sqrt[4]{p}) - \lambda(i) = -i\sqrt[4]{p} - i = -i - i\sqrt[4]{p} = \theta_8. \end{aligned}$$

В соответствии с определениями гомоморфизмов  $\Phi_i$ ,  $i = 1; 2; \dots; 8$  получаем, что

$$\Phi_1 = \varepsilon; \quad \Phi_2 = \eta; \quad \Phi_3 = \lambda^2; \quad \Phi_4 = \lambda^2\eta; \quad \Phi_5 = \lambda; \quad \Phi_6 = \lambda^3; \quad \Phi_7 = \lambda\eta; \quad \Phi_8 = \lambda^3\eta.$$

Для построения соответствия Галуа расширения  $Q(\theta)$  поля  $Q$ , определим решетку подгрупп группы  $G(Q(\theta)/Q)$ . Через  $G_1 = \langle \{\varepsilon\}; \bullet \rangle = \langle \{\mathcal{O}_1\}; \bullet \rangle$  – обозначим единичную подгруппу этой группы. Т.к. порядок группы  $G(Q(\theta)/Q)$  равен 8, то порядками подгрупп этой группы, согласно теореме

Лагранжа [3, стр. 31], могут быть только числа 2 и 4. Подгруппы, содержащие по два элемента, должны быть циклическими и порождаться элементами группы  $G(Q(\theta)/Q)$ , имеющих порядок 2. Таблица 1 показывает, что к числу таких элементов относятся автоморфизмы  $\lambda^2; \eta; \lambda\eta; \lambda^2\eta; \lambda^3\eta$ . Исходя из этого, получаем следующие пять подгрупп:

$$\begin{aligned} G_2 &= \langle \{\varepsilon; \lambda^2\}; \bullet \rangle = \langle \{\Phi_1; \Phi_3\}; \bullet \rangle; \quad G_3 = \langle \{\varepsilon; \eta\}; \bullet \rangle = \langle \{\Phi_1; \Phi_2\}; \bullet \rangle; \\ G_4 &= \langle \{\varepsilon; \lambda\eta\}; \bullet \rangle = \langle \{\Phi_1; \Phi_7\}; \bullet \rangle; \quad G_5 = \langle \{\varepsilon; \lambda^2\eta\}; \bullet \rangle = \langle \{\Phi_1; \Phi_4\}; \bullet \rangle; \\ G_6 &= \langle \{\varepsilon; \lambda^3\eta\}; \bullet \rangle = \langle \{\Phi_1; \Phi_8\}; \bullet \rangle. \end{aligned}$$

Одна из подгрупп порядка 4 уже известна. Это циклическая подгруппа, порожденная автоморфизмом  $\lambda$ , т.е подгруппа

$$G_7 = \langle \{\varepsilon; \lambda; \lambda^2; \lambda^3\}; \bullet \rangle = \langle \{\Phi_1; \Phi_3; \Phi_5; \Phi_6\}; \bullet \rangle.$$

Т.к. автоморфизмы  $\lambda^2; \eta; \lambda^2\eta$  имеют порядок два и  $\lambda^2\eta = \eta\lambda^2$  (смотри таблицу 1), то подмножество  $\{\varepsilon; \lambda^2; \eta; \lambda^2\eta\}$  замкнуто в группе  $G(Q(\theta)/Q)$ , что дает еще одну подгруппу:

$$G_8 = \langle \{\varepsilon; \lambda^2; \eta; \lambda^2\eta\}; \bullet \rangle = \langle \{\Phi_1; \Phi_2; \Phi_3; \Phi_4\}; \bullet \rangle$$

порядка 4 группы  $G(Q(\theta)/Q)$ .

Аналогичным образом, автоморфизмы  $\lambda^2; \lambda\eta; \lambda^3\eta$  имеют порядок 2, и  $(\lambda\eta) \cdot \lambda^2 = \lambda^3\eta$ ;  $(\lambda\eta) \cdot (\lambda^3\eta) = (\lambda^3\eta) \cdot (\lambda\eta) = \lambda^2$ ; (смотри таблицу 1), т.е. подмножество  $\{\varepsilon; \lambda^2; \lambda\eta; \lambda^3\eta\}$  также замкнуто в группе  $G(Q(\theta)/Q)$ .

Исходя из этого, получаем третью подгруппу группы  $G(Q(\theta)/Q)$  порядка 4:

$$G_9 = \langle \{\varepsilon; \lambda^2; \lambda\eta; \lambda^3\eta\}; \bullet \rangle = \langle \{\Phi_1; \Phi_3; \Phi_7; \Phi_8\}; \bullet \rangle.$$

Нетрудно убедиться в том, что других подгрупп четвертого порядка группа  $G(Q(\theta)/Q)$  не имеет. Полагая  $G_{10} = G(Q(\theta)/Q)$ , получаем следующую структуру подгрупп группы  $G(Q(\theta)/Q)$  (смотри диаграмму 1):

Диаграмма 1 – Структура подгрупп группы  $G(Q(\theta)/Q)$

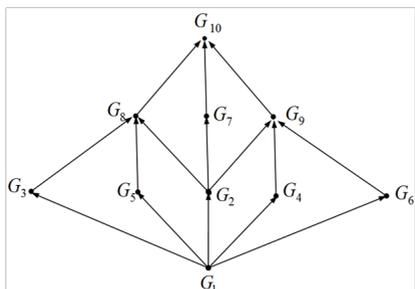


Таблица 2 – Образы элементов первого базиса поля  $Q(\sqrt[4]{p}; i)$

$\Phi_i \backslash a_i$	1	$\sqrt[4]{p}$	$\sqrt[4]{p^2}$	$\sqrt[4]{p^3}$	$i$	$i\sqrt[4]{p}$	$i\sqrt[4]{p^2}$	$i\sqrt[4]{p^3}$
$\Phi_1 = \varepsilon$	1	$\sqrt[4]{p}$	$\sqrt[4]{p^2}$	$\sqrt[4]{p^3}$	$i$	$i\sqrt[4]{p}$	$i\sqrt[4]{p^2}$	$i\sqrt[4]{p^3}$
$\Phi_2 = \eta$	1	$\sqrt[4]{p}$	$\sqrt[4]{p^2}$	$\sqrt[4]{p^3}$	$-i$	$-i\sqrt[4]{p}$	$-i\sqrt[4]{p^2}$	$-i\sqrt[4]{p^3}$
$\Phi_3 = \lambda^2$	1	$-\sqrt[4]{p}$	$\sqrt[4]{p^2}$	$-\sqrt[4]{p^3}$	$i$	$-i\sqrt[4]{p}$	$i\sqrt[4]{p^2}$	$-i\sqrt[4]{p^3}$
$\Phi_4 = \lambda^2 \eta$	1	$-\sqrt[4]{p}$	$\sqrt[4]{p^2}$	$-\sqrt[4]{p^3}$	$-i$	$i\sqrt[4]{p}$	$-i\sqrt[4]{p^2}$	$-i\sqrt[4]{p^3}$
$\Phi_5 = \lambda$	1	$i\sqrt[4]{p}$	$-\sqrt[4]{p^2}$	$-i\sqrt[4]{p^3}$	$i$	$-\sqrt[4]{p}$	$-i\sqrt[4]{p^2}$	$\sqrt[4]{p^3}$
$\Phi_6 = \lambda^3$	1	$-i\sqrt[4]{p}$	$-\sqrt[4]{p^2}$	$i\sqrt[4]{p^3}$	$i$	$\sqrt[4]{p}$	$-i\sqrt[4]{p^2}$	$-\sqrt[4]{p^3}$
$\Phi_7 = \lambda \eta$	1	$i\sqrt[4]{p}$	$-\sqrt[4]{p^2}$	$-i\sqrt[4]{p^3}$	$-i$	$\sqrt[4]{p}$	$i\sqrt[4]{p^2}$	$-\sqrt[4]{p^3}$
$\Phi_8 = \lambda^3 \eta$	1	$-i\sqrt[4]{p}$	$-\sqrt[4]{p^2}$	$i\sqrt[4]{p^3}$	$-i$	$-\sqrt[4]{p}$	$i\sqrt[4]{p^2}$	$\sqrt[4]{p^3}$

Для нахождения подполей поля  $Q(\theta)$ , сопоставляющихся (в соответствии Галуа) подгруппам группы  $G(Q(\theta)/Q)$ , найдем образы элементов базиса (1) поля  $Q(\sqrt[4]{p}; i)$  как векторного пространства над полем  $Q$ , при действии на них автоморфизмами  $\Phi_i, i = 1; 2; \dots; 8$ . Полученные результаты сведем в таблицу (смотри таблицу 2).

Введем, для дальнейшего, следующие обозначения:  $F_1 = Q(\theta)$ ;  $F_i$  – подполе поля  $Q(\theta)$ , отвечающее (в соответствии Галуа) подгруппе  $G_i, i = 1; 2; \dots; 8; 9$ ;  $F_{10} = Q$ . Тогда  $Q = F_{10} \leq F_i \leq F_1 = Q(\theta)$  и, согласно основной теореме теории Галуа [1, с. 197], порядок подгруппы  $G_i$  равен степени поля  $Q(\theta)$  над полем  $F_i$ , а индекс подгруппы  $G_i$  в группе  $Q(\theta)$  равен степени поля  $F_i$  над полем  $Q$ . Исходя из этого утверждения, заключаем, что, т.к. индексы подгрупп  $G_2; G_3; G_4; G_5; G_6$  в группе  $G_{10}$  равны 4, то степени расширений  $F_2; F_3; F_4; F_5; F_6$  поля  $Q$  равны 4.

Из таблицы 2 следует, что:

– автоморфизмы подгруппы  $G_2$  оставляют на месте элементы  $\sqrt[4]{p^2} = \sqrt{p}; i; i\sqrt[4]{p^2}$  базиса (1) поля  $Q(\theta) = Q(\sqrt[4]{p}; i)$  как векторного пространства над полем  $Q$ . Т.е. этой подгруппе соответствует подполе  $Q(\sqrt[4]{p}; i) = Q(\sqrt{p}; i)$ . Т.к.  $\sqrt{p}$  и  $i$  – алгебраические над полем  $Q$  элементы порядка 2, то степень расширения  $Q(\sqrt[4]{p}; i)$  над  $Q$  равна 4. Таким образом,  $F_2 = Q(\sqrt[4]{p}; i) = Q(\sqrt{p}; i)$ ;

– автоморфизмы подгруппы  $G_3$  оставляют на месте элементы  $1; \sqrt[4]{p}; \sqrt[4]{p^2}; \sqrt[4]{p^3}$  базиса (1), т.е. этой подгруппе соответствует подполе  $Q(\sqrt[4]{p})$ , степень которого над полем  $Q$  также равна 4. Следовательно,  $F_3 = Q(\sqrt[4]{p})$ . Аналогичным образом, получаем, что  $F_5 = Q(i\sqrt[4]{p})$ .

Определяя поле, соответствующее подгруппе  $G_4$ , отметим, что автоморфизм  $\lambda \eta$  этой подгруппы оставляет на месте элемент  $\sqrt[4]{p} + i\sqrt[4]{p}$ . Действительно:

$$\begin{aligned}
 (\lambda \eta)(\sqrt[4]{p} + i\sqrt[4]{p}) &= (\lambda \eta)(\sqrt[4]{p}) + (\lambda \eta)(i\sqrt[4]{p}) = 2^\circ \\
 &= i\sqrt[4]{p} + \sqrt[4]{p} = 3^\circ \sqrt[4]{p} + i\sqrt[4]{p}.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Отметим, что в цепочке равенств (8):

– переход  $1^\circ$  – осуществлен на основании того, что  $\lambda \eta$  – автоморфизм поля  $Q(\sqrt[4]{p}; i)$ ;  
 – переход  $2^\circ$  – на основании результатов таблицы 2;

– переход  $3^\circ$  – на основании коммутативности операции «+» поля  $Q(\sqrt[4]{p}; i)$ .

Нетрудно проверить, что многочлен  $g(x) = x^4 + 4p$  является минимальным многочленом элемента  $\sqrt[4]{p} + i\sqrt[4]{p}$ . Действительно, многочлен  $g(x)$ , при  $p \neq 2$ , неприводим над полем  $Q$  по критерию Эйзенштейна, а при  $p = 2$  получается многочлен  $x^4 + 8$ , также неприводим над полем  $Q$ . Кроме того, непосредственная проверка показывает, что элемент  $\sqrt[4]{p} + i\sqrt[4]{p}$  является корнем многочлен  $g(x)$ . Таким образом,  $F_4 = Q(\sqrt[4]{p} + i\sqrt[4]{p})$ .

Таблица 3 – Соответствие Галуа

$G_1 = \langle \{\varepsilon\}; \bullet \rangle$	$F_1 = Q(\{ \sqrt[4]{p}; i \})$
$G_2 = \langle \{\varepsilon; \lambda^2\}; \bullet \rangle$	$F_2 = Q(\{ \sqrt{p}; i \})$
$G_3 = \langle \{\varepsilon; \eta\}; \bullet \rangle$	$F_3 = Q(\{ \sqrt[4]{p} \})$
$G_4 = \langle \{\varepsilon; \lambda\eta\}; \bullet \rangle$	$F_4 = Q(\{ \sqrt[4]{p} + i\sqrt[4]{p} \})$
$G_5 = \langle \{\varepsilon; \lambda^2\eta\}; \bullet \rangle$	$F_5 = Q(\{ i\sqrt[4]{p} \})$
$G_6 = \langle \{\varepsilon; \lambda^3\eta\}; \bullet \rangle$	$F_6 = Q(\{ \sqrt[4]{p^3} + i\sqrt[4]{p^3} \})$
$G_7 = \langle \{\varepsilon; \lambda; \lambda^2; \lambda^3\}; \bullet \rangle$	$F_7 = Q(\{ i \})$
$G_8 = \langle \{\varepsilon; \lambda^2; \eta; \lambda^2\eta\}; \bullet \rangle$	$F_8 = Q(\{ \sqrt{p} \})$
$G_9 = \langle \{\varepsilon; \lambda^2; \lambda\eta; \lambda^3\eta\}; \bullet \rangle$	$F_9 = Q(\{ i\sqrt{p} \})$
$G_{10} = G(Q(\theta)/Q)$	$F_{10} = Q(\{ 1 \})$

Аналогичным образом устанавливается, что  $F_6 = Q(\sqrt[4]{p^3} + i\sqrt[4]{p^3})$ .

Т.к. оставшиеся промежуточные подгруппы  $G_7, G_8, G_9$  имеют порядки 4, т.е. их индексы в группе  $G(Q(\theta)/Q)$  равны 2, то соответствующие им подполя  $F_7, F_8, F_9$  должны иметь над полем  $Q$  размерность 2.

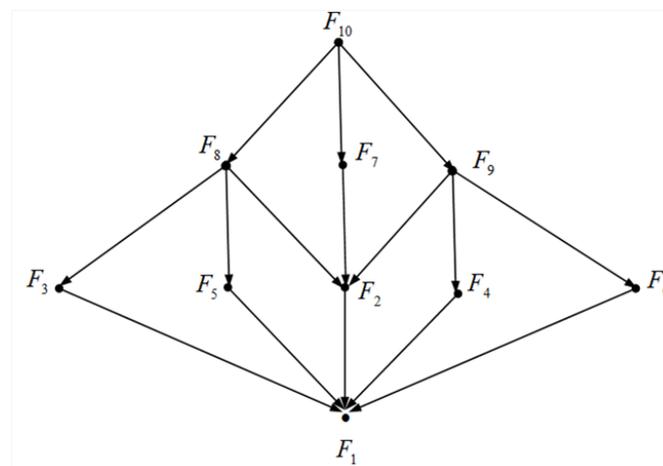
Как и ранее, выделяя из таблицы 2 элементы базиса (1), неподвижные относительно автоморфизмов подгрупп  $G_7, G_8, G_9$  получаем, что:

$$F_7 = Q(i); F_8 = Q(\sqrt[4]{p^2}) = Q(\sqrt{p}); F_9 = Q(i\sqrt[4]{p^2}) = Q(i\sqrt{p})$$

Сводя полученные результаты в таблицу, будем иметь (смотри таблицу 3) искомое соответствие.

Т.к. посредством соответствия Галуа устанавливается антиизоморфное отображение решетки подгрупп группы  $G(Q(\theta)/Q)$  на решетку промежуточных (т.е. заключенных между полями  $Q$  и  $Q(\theta)$ ) подполей поля  $Q(\theta)$ , то диаграмма, отражающая строение решетки подполей будет иметь следующий вид (смотри диаграмму 2).

Диаграмма 2 – Структура подполей поля  $Q(\sqrt[4]{p}; i)$



ВЫВОДЫ

Разработанные в данной статье подходы к построению группы Галуа и соответствия Галуа для поля разложения многочлена  $h(x) = x^4 - p$  над полем  $Q$  – рациональных чисел, применимы и для построения групп и соответствий Галуа полей разложения многочленов вида  $x^{2^k} - p$ , где  $p$  – произвольное простое число и  $k > 2$ , над этим полем.

В частности, если  $k \geq 3$ , то к полю  $\mathcal{Q}$  нужно будет присоединить корни восьмой степени из 1, т.е. числа:

$$\pm 1; \pm i; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}i}{2}.$$

Для присоединения всех этих корней достаточно присоединить к этому полю только числа  $i$  и  $\sqrt{2}$ . Таким образом, поле разложения многочлена  $x^8 - p$  будет расширение  $\mathcal{Q}(\sqrt[8]{p}; \sqrt{2}; i)$ . При  $p \neq 2$  степень этого расширения над полем  $\mathcal{Q}$  равна 32. Если же  $p = 2$ , то эта степень равна 16. Прimitивным элементом этого расширения будет число  $\theta = \sqrt[8]{p} + \sqrt{2} + i$ , при  $p \neq 2$  и число  $\theta' = \sqrt[8]{p} + i$ , при  $p = 2$ .

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что в группе  $G(\mathcal{Q}(\theta)/\mathcal{Q})$  существуют автоморфизмы:

1)  $\eta$  – автоморфизм поля  $\mathcal{Q}(\sqrt[8]{p}; \sqrt{2}; i)$  над полем  $\mathcal{Q}(\sqrt[8]{p}; \sqrt{2})$ , переводящий  $i$  в  $-i$ , который порождает циклическую подгруппу группы  $G(\mathcal{Q}(\theta)/\mathcal{Q})$  порядка 2;

2)  $\lambda$  – автоморфизм поля  $\mathcal{Q}(\sqrt[8]{p}; \sqrt{2}; i)$  над полем  $\mathcal{Q}(\sqrt{2}; i)$ , переводящий  $\sqrt[8]{p}$  в  $i\sqrt[8]{p}$ , который порождает циклическую подгруппу группы  $G(\mathcal{Q}(\theta)/\mathcal{Q})$  порядка 4;

3)  $\mu$  – автоморфизм поля  $\mathcal{Q}(\sqrt[8]{p}; \sqrt{2}; i)$  над полем  $\mathcal{Q}(\sqrt[8]{p}; i)$ , переводящий  $\sqrt{2}$  в  $i\sqrt{2}$ , который порождает циклическую подгруппу группы  $G(\mathcal{Q}(\theta)/\mathcal{Q})$  порядка 4.

Отсюда, как и ранее, следует, что группа  $G(\mathcal{Q}(\theta)/\mathcal{Q})$  порождается автоморфизмами  $\eta$ ,  $\lambda$  и  $\mu$ , что позволяет описать строение этой группы, структуру ее подгрупп и построить, далее, соответствие Галуа.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Ван дер Варден, Б. Л. Алгебра. – 2-е издание – М. : Наука, 1979. – 623 с.
- 2 Ленг, С. Алгебра. – М. : Мир, 1968. – 564 с.
- 3 Каргаполов, М. И. Основы теории групп / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков // М. : Наука, 1982. – 3-е издание. – 288 с.

Материал поступил в редакцию 06.01.16.

*Б. Н. Дроботун, И. А. Алимova*

**Рационал сандар өрісіне байланысты екі мүшелі тендеулі Галуа топтары туралы (I)**

С. Торайғыров атындағы  
Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.  
06.01.16 баспаға түсті.

*B. Drobotun, I. Alimova*

**On the Galois groups of two-term equations over the field of rational numbers (I)**

S. Toraihyrov Pavlodar State University, Pavlodar.

Material received on 06.01.16.

*Ұсынылған мақалада жоғары оқу орындарында логикалық-алгебралық білім беру мазмұнында Галуа теориясы негіздерінің педагогикалық көрініс тапсырмаларын шешуге байланысты жұмыстың бірінші бөлігі көзделген. Осы мақалада Галуа топтарын құрастыруға және  $x^4 - p = 0$  түрлі екі мүшелі теңдеу бөлінудің,  $p$  – еркін қарапайым сан, Галуа өрісінің рационал сандар өрісіне сәйкестіліктің инструменталдық-технологиялық тәсілдері әзірленіп іске асырылған.*

*This article is considered as the first part of the work connected with a solution of the problem of pedagogical reflection of the Galois theory foundations in the contents of logical-algebraic education in higher educational institutions. In this article there are developed and implemented the instrumental-technological approaches to the construction of the Galois group and the Galois field corresponds of expansion of two-term equations  $x^4 - p = 0$  over the field of rational numbers, where  $p$  – is an arbitrary prime number.*

**Б. Н. Дроботун<sup>1</sup>, И. А. Алимова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>д.п.н., профессор, <sup>2</sup>студент

Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова,

г. Павлодар

e-mail: <sup>1</sup>drobotun.nina@mail.ru, <sup>2</sup>fc.saladin@gmail.com

## О ГРУППАХ ГАЛУА ДВУЧЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ НАД ПОЛЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ (II)

*Данная статья является второй частью работы, связанной с решением задачи педагогического отражения основ теории Галуа в содержании логико-алгебраического образования в высших учебных заведениях. В этой статье разрабатываются и реализуются инструментально-технологические подходы к представлению групп Галуа двучленным уравнением вида  $x^4 - p = 0$ , где  $p$  – произвольное простое число, посредством групп подстановок.*

*Ключевые слова: двучленное уравнение, корень уравнения, автоморфизм, группа подстановок, поле, подполе, алгебраическое расширение, группа Галуа.*

### ВВЕДЕНИЕ

Возможность представления групп Галуа уравнений  $f(x) = 0$ , где  $f(x)$  – некоторый многочлен над полем  $K$ , не имеющий кратных корней, посредством групп подстановок, обусловлена следующими положениями, приведенными в книге [1]: «Под группой уравнения  $f(x) = 0$  или многочлена  $f(x)$  подразумевается группа Галуа поля разложения  $K(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m)$  этого многочлена. Каждый автоморфизм над полем  $K$  переводит систему корней в себя, т.е. переставляет корни.... Следовательно, группу Галуа уравнения можно рассматривать как группу некоторых подстановок корней» [1, с. 195]. В этой же книге отмечается, что при выполнении некоторых условий, автоморфизмы группы  $G(K(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m)/K)$  могут быть найдены посредством технологий, базирующихся или на отыскании примитивного элемента поля  $K$  [1, стр. 166] или на применении теоремы о продолжении автоморфизмов [1, с. 147].

В работах [3, 4] эти технологии были доказательно обоснованы и реализованы применительно к расширениям  $Q(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$  поля рациональных чисел  $Q$ , где  $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$  – алгебраические над  $Q$  элементы степени 2. В этих же работах были отмечены возможности обобщения

полученных результатов на поля  $Q(\sqrt{p_1}; \sqrt{p_2}; \dots; \sqrt{p_m})$ ,  $m > 3$ , где  $p_1; p_2; \dots; p_m$  – произвольные попарно различные простые числа.

Предлагаемая статья является непосредственным продолжением статьи [2]. В этой статье разрабатываются и реализуются инструментально-технологические подходы к представлению подстановками группы Галуа  $G(Q(\theta)/Q)$ , построенной в статье [2], как группы уравнения  $x^4 - p = 0$ , где  $p$  – произвольное простое число.

Инструментально-технологические подходы, предлагаемые в этой статье, базируются на тех же теоретических предпосылках, т.е. на теоремах о примитивном элементе и продолжении изоморфизмов, но их практическая реализация приобретает при этом, определенное своеобразие, связанное с необходимостью предварительного присоединения корней четвертой степени из единицы к полю  $Q$ .

С целью обеспечения преемственности, нумерация формул и нумерация таблиц, данной статьи продолжает соответствующие нумерации статьи [2].

### ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В статье [2] было получено описание группы Галуа  $G(Q(\theta)/Q)$  уравнения  $x^4 - p = 0$ .

Зная строение этой группы, как группы, порожденной циклическими подгруппами  $G_3$  и  $G_7$  порядков 2 и 4, соответственно, представление этой группы подстановками 8-ой степени можно найти следующим образом. Заметим, что теоретические предпосылки, применяемых, при этом, технологий базируются на теореме о продолжении изоморфизмов.

Т.к.  $\Phi_i$  – тождественный автоморфизм группы  $G(Q(\theta)/Q)$ , то этому автоморфизму будет соответствовать подстановка

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения подстановки  $\pi_i$ , соответствующей изоморфизму  $\Phi_i$ , нужно найти образцы корней  $\theta_1; \theta_2; \theta_3; \theta_4; \theta_5; \theta_6; \theta_7; \theta_8$  при действии на каждый из них этим автоморфизмом  $\Phi_i$ ,  $i = 1; 2; \dots; 8$ .

Найдем, к примеру, подстановку  $\pi_i$ , которая представляет автоморфизм  $\Phi_5$ . Т.к.  $\Phi_i = \lambda$ , то:

$$\Phi_5(\theta_1) = \lambda(\theta_1) = \lambda(\sqrt[4]{p} + i) = \lambda(\sqrt[4]{p}) + \lambda(i) = i\sqrt[4]{p} + i = i + i\sqrt[4]{p} = \theta_5;$$

$$\Phi_5(\theta_2) = \lambda(\theta_2) = \lambda(\sqrt[4]{p} - i) = \lambda(\sqrt[4]{p}) - \lambda(i) = i\sqrt[4]{p} - i = \theta_7;$$

$$\begin{aligned} \Phi_5(\theta_3) &= \lambda(\theta_3) = \lambda(-\sqrt[4]{p} + i) = -\lambda(\sqrt[4]{p}) + \lambda(i) = -i\sqrt[4]{p} + i = i - i\sqrt[4]{p} = \theta_6; \\ \Phi_5(\theta_4) &= \lambda(\theta_4) = \lambda(-\sqrt[4]{p} - i) = -\lambda(\sqrt[4]{p}) - \lambda(i) = -i\sqrt[4]{p} - i = -i - \sqrt[4]{p} = \theta_8; \\ \Phi_5(\theta_5) &= \lambda(\theta_5) = \lambda(i\sqrt[4]{p} + i) = \lambda(i\sqrt[4]{p}) + \lambda(i) = \lambda(i) \cdot \lambda(\sqrt[4]{p}) + i = \\ &= i \cdot i\sqrt[4]{p} + i = -\sqrt[4]{p} + i = \theta_3; \\ \Phi_5(\theta_6) &= \lambda(\theta_6) = \lambda(i - i\sqrt[4]{p}) = \lambda(i) - \lambda(i) \cdot \lambda(\sqrt[4]{p}) = \\ &= i - i \cdot i\sqrt[4]{p} = i + \sqrt[4]{p} = \sqrt[4]{p} + i = \theta_1; \\ \Phi_5(\theta_7) &= \lambda(\theta_7) = \lambda(i\sqrt[4]{p} - i) = \lambda(i\sqrt[4]{p}) - \lambda(i) = \\ &= \lambda(i) \cdot \lambda(\sqrt[4]{p}) - i = i \cdot i\sqrt[4]{p} - i = -\sqrt[4]{p} - i = \theta_4; \\ \Phi_5(\theta_8) &= \lambda(\theta_8) = \lambda(-i - i\sqrt[4]{p}) = \lambda(-i) - \lambda(i) \cdot \lambda(\sqrt[4]{p}) = \\ &= -i - i \cdot i\sqrt[4]{p} = \sqrt[4]{p} - i = \theta_2. \end{aligned}$$

В вышеприведенных цепочках равенств корни  $\theta_i$  и их образы при автоморфизме  $\Phi_5$  выделены, т.е.

$$\pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 8 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находя (подобным же образом) остальные подстановки, сведем полученные результаты в единую таблицу (смотри таблицу 4).

Таблица 4 – Представление группы  $G(Q(\theta)/Q)$  подстановками

$\Phi_i$	Подстановка $\pi_i$	Разложение $\pi_i$ в произведение независимых циклов
$\Phi_1 = \varepsilon$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$	(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8)
$\Phi_2 = \eta$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$	(12) (34) (58)
$\Phi_3 = \lambda^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$	(13) (24) (56) (78)
$\Phi_4 = \lambda^2 \eta$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	(14) (23) (57) (68)

$\Phi_5 = \lambda$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 8 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	(1536) (2748)
$\Phi_6 = \lambda^3$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 7 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	(1635) (2847)
$\Phi_7 = \lambda\eta$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 8 & 6 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	(1738) (2546)
$\Phi_8 = \lambda^3\eta$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	(18) (26) (37) (45)

Другой способ представления группы  $G(Q(\theta)/Q)$  подстановками, основывающийся на теореме о примитивном элементе, состоит в следующем [2; 3]:

- находим минимальный многочлен  $f(x)$  расширения  $Q(\theta)$  поля  $Q$ ;
- вычисляем корни многочлена  $f(x)$  (во многих случаях эти корни можно получить не решая уравнения  $f(x) = 0$ , а применяя теорему о сопряженности корней многочлена  $f(x)$  относительно поля  $Q$  [1, с. 141];
- выражаем корни многочлена  $f(x)$  через корень  $\theta_1 = \theta$ ;
- полагая, что автоморфизм  $\Phi_i$  переводит корень  $\theta_1$  в корень  $\theta_i$ , находим подстановку  $\pi_i$ , представляющую этот автоморфизм.

Реализуем вышеприведенные предписания применительно к представлению подстановками группы Галуа поля разложения многочлена  $x^4 - p$  над полем рациональных чисел при  $p = 2$ .

В этом случае:  $\theta = \theta_1 = \sqrt[4]{2} + i$ ; базис (1) принимает вид

$$1; \sqrt[4]{2}; \sqrt[4]{4}; \sqrt[4]{8}; i; i\sqrt[4]{2}; i\sqrt[4]{4}; i\sqrt[4]{8}, \quad (13)$$

а базис (2) и матрица T, как матрица перехода от базиса (13) к базису (14), будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta^0 &= 1; \\ \theta^1 &= \sqrt[4]{2} + i; \\ \theta^2 &= \sqrt[4]{4} + 2\sqrt[4]{2}i + 1; \\ \theta^3 &= \sqrt[4]{8} + 3\sqrt[4]{4}i - 3\sqrt[4]{2} - i; \\ \theta^4 &= 3 + 4\sqrt[4]{8}i - 6\sqrt[4]{4} - 4\sqrt[4]{2}i; \\ \theta^5 &= 7\sqrt[4]{2} + 11i - 10\sqrt[4]{8} - 10\sqrt[4]{4}i; \\ \theta^6 &= -31 + 17\sqrt[4]{4} + 18\sqrt[4]{2}i - 20\sqrt[4]{8}i; \\ \theta^7 &= -49\sqrt[4]{2} + 37\sqrt[4]{8} - 71i + 35\sqrt[4]{4}i. \end{aligned} \quad (14)$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 & 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & -10 & 11 & 0 & -10 & 0 \\ -31 & 0 & 17 & 0 & 0 & 18 & 0 & -20 \\ 0 & -49 & 0 & 37 & -71 & 0 & 35 & 0 \end{pmatrix}$$

Для нахождения минимального многочлена для элемента  $\theta$

Полагаем  $x = \sqrt[4]{2} + i$ , и далее последовательно получаем:

$$x - i = \sqrt[4]{2};$$

$$(x - i)^4 = 2;$$

$$x^4 - 4x^3i - 6x^2 - 4xi + 1 = 2;$$

$$x^4 - 6x^2 - 1 = 4xi(x^2 + 1);$$

$$x^8 + 36x^4 + 1 - 12x^6 - 2x^4 + 12x^2 = -16x^6(x^4 + 2x^2 + 1);$$

$$x^8 + 4x^6 + 2x^4 + 28x^2 + 1 = 0.$$

Т.е. элемент  $\theta = \sqrt[4]{2} + i$  является корнем многочлена:

$$f(x) = x^8 + 4x^6 + 2x^4 + 28x^2 + 1.$$

Т.к.  $\deg f(x) = 8$  и степень корня  $\theta$ , как алгебраического элемента над полем  $\mathcal{Q}$  равна 8, то  $f(x)$  неприводим над полем  $\mathcal{Q}$ , т.е.  $f(x)$  будет являться минимальным многочленом для элемента  $\theta$ . Т.к.  $\mathcal{Q}(\theta) = \mathcal{Q}(\sqrt[4]{2} + i)$ , то, в соответствии с теоремой о сопряженности корней, сопряженными с корнем  $\theta = \sqrt[4]{2} + i$  над полем  $\mathcal{Q}$  являются числа  $\pm \sqrt[4]{2} \pm i$ , а также числа  $\pm \sqrt[4]{2}i \pm i$ . Оставляя нумерацию корней прежней, будем иметь:

$$\theta_1 = \theta = \sqrt[4]{2} + i; \theta_2 = \sqrt[4]{2} - i; \theta_3 = -\sqrt[4]{2} + i; \theta_4 = -\sqrt[4]{2} - i;$$

$$\theta_5 = i + i\sqrt[4]{2}; \theta_6 = i - i\sqrt[4]{2}; \theta_7 = -i + i\sqrt[4]{2}; \theta_8 = -i - i\sqrt[4]{2}.$$

Строками координат элементов  $\theta_i$ ,  $i = 1; 2; \dots; 8$ . в базисе (13) будут, соответственно, векторы:

$$\alpha(\theta_1) = (0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 0);$$

$$\alpha(\theta_2) = (0; 1; 0; 0; -1; 0; 0; 0);$$

$$\alpha(\theta_3) = (0; -1; 0; 0; 1; 0; 0; 0);$$

$$\alpha(\theta_4) = (0; -1; 0; 0; -1; 0; 0; 0);$$

$$\alpha(\theta_5) = (0; 0; 0; 0; 1; 1; 0; 0);$$

$$\alpha(\theta_6) = (0; 0; 0; 0; 1; -1; 0; 0);$$

$$\alpha(\theta_7) = (0; 0; 0; 0; -1; 1; 0; 0);$$

$$\alpha(\theta_8) = (0; 0; 0; 0; -1; -1; 0; 0).$$

Т.к.  $S = T^{-1}$  – матрица перехода от базиса (14) к базису (13), то строками координат элементов  $\theta_i$ , в базисе (14) будут, соответственно, векторы:

$$\alpha'(\theta_i) = \alpha(\theta_i) \cdot S, \quad i = 1; 2; \dots; 8. \quad (15)$$

Находя матрицу  $S = T^{-1}$ , получаем:

$$S = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{151}{24} & 0 & \frac{5}{24} & 0 & \frac{19}{24} & 0 & \frac{5}{24} \\ -\frac{17}{12} & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & -\frac{5}{12} & 0 & -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & -\frac{107}{12} & 0 & -\frac{5}{6} & 0 & -\frac{17}{12} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{127}{24} & 0 & -\frac{5}{24} & 0 & -\frac{19}{24} & 0 & -\frac{5}{24} \\ \frac{29}{24} & 0 & \frac{13}{24} & 0 & \frac{5}{24} & 0 & \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & \frac{15}{2} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{3} & 0 & \frac{5}{12} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя соотношения (15), получаем искомые выражения корней  $\theta_i$ ,  $i = 1; 2; \dots; 8$  через корень  $\theta_1 = \theta$ :

$$\theta_1 = \theta;$$

$$\theta_2 = \frac{278}{24}\theta_1 + \frac{10}{24}\theta_1^3 + \frac{38}{24}\theta_1^5 + \frac{10}{24}\theta_1^7;$$

$$\theta_3 = -\frac{278}{24}\theta_1 - \frac{10}{24}\theta_1^3 - \frac{38}{24}\theta_1^5 - \frac{10}{24}\theta_1^7; \quad (16)$$

$$\theta_4 = -\theta_1;$$

$$\theta_5 = \frac{29}{24} - \frac{127}{24}\theta_1 + \frac{13}{24}\theta_1^2 - \frac{5}{24}\theta_1^3 + \frac{5}{24}\theta_1^4 - \frac{19}{24}\theta_1^5 + \frac{1}{24}\theta_1^6 - \frac{5}{24}\theta_1^7;$$

$$\theta_6 = -\frac{29}{24} - \frac{127}{24}\theta_1 - \frac{13}{24}\theta_1^2 - \frac{5}{24}\theta_1^3 - \frac{5}{24}\theta_1^4 - \frac{19}{24}\theta_1^5 - \frac{1}{24}\theta_1^6 - \frac{5}{24}\theta_1^7;$$

$$\theta_7 = \frac{29}{24} + \frac{127}{24}\theta_1 + \frac{13}{24}\theta_1^2 + \frac{5}{24}\theta_1^3 + \frac{5}{24}\theta_1^4 + \frac{19}{24}\theta_1^5 + \frac{1}{24}\theta_1^6 + \frac{5}{24}\theta_1^7;$$

Т.к. через  $\Phi_j$  обозначен автоморфизм поля  $Q(\theta)$ , переводящий корень  $\theta = \theta_1$  в  $\theta_j$ , т.е.  $\Phi_j(\theta_1) = \theta_j$ , то  $\Phi_j$  – образы корней  $\theta_j$ ,  $j = 2;3;\dots;8$ , а, следовательно, и подстановку  $\pi_j$ , представляющую автоморфизм  $\Phi_j$ , можно найти, используя выражения (16) этих корней через  $\theta_1$ . К примеру,

$$\begin{aligned} \Phi_5(\theta_2) &= \Phi_5\left(\frac{278}{24}\theta_1 + \frac{10}{24}\theta_1^3 + \frac{38}{24}\theta_1^5 + \frac{10}{24}\theta_1^7\right) = \frac{278}{24}\Phi_5(\theta_1) + \frac{10}{24}\Phi_5(\theta_1^3) + \\ &+ \frac{38}{24}\Phi_5(\theta_1^5) + \frac{10}{24}\Phi_5(\theta_1^7) = \frac{278}{24}\Phi_5(\theta_1) + \frac{10}{24}(\Phi_5(\theta_1))^3 + \\ &+ \frac{38}{24}(\Phi_5(\theta_1))^5 + \frac{10}{24}(\Phi_5(\theta_1))^7 = \frac{278}{24}\theta_5 + \frac{10}{24}\theta_5^3 + \frac{38}{24}\theta_5^5 + \frac{10}{24}\theta_5^7 = \\ &= \frac{278}{24}(i + i^4\sqrt{2}) + \frac{10}{24}(i + i^4\sqrt{2})^3 + \frac{38}{24}(i + i^4\sqrt{2})^5 + \frac{10}{24}(i + i^4\sqrt{2})^7 \end{aligned}$$

Аналогичным образом, находим:

$$\Phi_5(\theta_3) = \theta_6; \quad \Phi_5(\theta_4) = \theta_8; \quad \Phi_5(\theta_5) = \theta_3;$$

$$\Phi_5(\theta_6) = \theta_1; \quad \Phi_5(\theta_7) = \theta_4; \quad \Phi_5(\theta_8) = \theta_2.$$

С учетом того, что  $\Phi_5(\theta_1) = \theta_5$ , получаем, что

$$\pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 8 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

По этой же схеме вычисляются подстановки  $\pi_2; \pi_3; \pi_4; \pi_6; \pi_7; \pi_8$ , представляющие, соответственно, автоморфизмы  $\Phi_2; \Phi_3; \Phi_4; \Phi_6; \Phi_7; \Phi_8$ .

### ВЫВОДЫ

Сравнивая между собой два, приведенных в данной работе, подхода к построению группы Галуа  $G(Q(\sqrt[4]{p}; i) / Q)$  и представлению ее посредством группы подстановок, следует отметить, что первый из них в значительно

большей степени отражает особенности функционирования знаний в образующих механизмов идейно-методологического потенциала теории Галуа.

В своих работах Э. Галуа неоднократно подчеркивал, что: «Красота и вместе с тем трудность... теории состоит в том, что нужно постоянно предвидеть результаты и указывать ход вычислений, практически не воспроизводя их» [4, с. 60].

Тем не менее, хотя второй подход зачастую сопряжен с необходимостью выполнения вычислительной работы значительного объема, он представляет собой (как бы) материальное воплощение реализации предписаний первого подхода.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 **Ван дер Варден, Б. Л.** Алгебра. – 2-е издание. – М. : Наука, 1979. – 623 с.
- 2 **Дроботун, Б. Н.** О группах Галуа двучленных уравнений над полем рациональных чисел (I) / Б. Н. Дроботун, И. А. Алимова // Вестник ПГУ. Серия физико-математическая. – 2016. – № 1.
- 3 **Дроботун, Б. Н.** Группы Галуа и соответствия Галуа конечных расширений полей рациональных чисел (I) / Б. Н. Дроботун, О. И. Панасенко // Вестник ПГУ. Серия физико-математическая. – 2013. – № 1. – С. 47-65.
- 4 **Дроботун, Б. Н.** Группы Галуа и соответствия Галуа конечных расширений полей рациональных чисел (I) / Б. Н. Дроботун, О. И. Панасенко // Вестник ПГУ. Серия физико-математическая. – 2013. – № 1. – С. 65-79.
- 5 **Дальма, А.** Эварист Галуа, революционер и математик. – М. : Наука, 1984. – 112 с.

Материал поступил в редакцию 06.01.16.

*Б. Н. Дроботун, И. А. Алимова*

**Рационал сандар өрісіне байланысты екі мүшелі тендеулі Галуа топтары туралы (II)**

С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.

Материал 06.01.16 баспаға түсті.

*B. Drobotun, I. Alimova*

**On the Galois groups of two-term equations over the field of rational numbers (II)**

S. Toraihyrov Pavlodar State University, Pavlodar.

Material received on 06.01.16.

Бұл мақала - жоғары оқу орындарындағы логика-алгебралық білім беру мазмұны бойынша Галуа теориясының педагогикалық шағылуы есебінің шығарылуына байланысты жұмыстың екінші бөлігі. Мақалада Галуа топтарының алмастырулар көмегімен екі мүшелі  $x^4 - p = 0$  түріндегі теңдеуі арқылы қарастыру (бұл жерде  $p$  – кез келген жай сан) аспапты-техникалық тәсілдер әзірленіп жүзеге асты.

*This article is the second part of the work connected with a solution of the problem of pedagogical reflection of the Galois theory foundations in the contents of logical-algebraic education in higher educational institutions. In this article instrumental-technological approaches to the construction of the Galois group and the Galois field corresponds of expansion of two-term equations  $x^4 - p = 0$  over the field of rational numbers, where  $p$  – is an arbitrary prime number, are developed and implemented by permutation groups.*

УДК 511. 238

**Б. Н. Дроботун<sup>1</sup>, С. Е. Умарбекова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>д.п.н., профессор, <sup>2</sup>студент

Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова,

г. Павлодар

e-mail: drobotun.nina@mail.ru

## МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ГРАФОВ (I)

*В данной работе «на языке» теории матриц формулируются критерии изоморфизма конечных графов, даются доказательства обоснования этих критериев и на конкретных примерах демонстрируются их прикладные возможности.*

*Ключевые слова: концепция изоморфизма, алгебраическая система, конечный граф, вершина, дуга, теория матриц, матрица смежности, матрица инцидентности, подстановка.*

### ВВЕДЕНИЕ

Одной из основополагающих концепций современной математики является концепция изучения алгебраических систем с точностью до изоморфизма. Как отмечается в [1]: «Теория алгебраических систем изучает

преимущественно лишь те свойства алгебраических систем, которые сохраняются при изоморфизме и которые, таким образом, одинаковы у всех изоморфных систем. Эти свойства часто называют абстрактными свойствами систем. Считается, что абстрактные свойства системы - это свойства главных операций и предикатов системы, не зависящие от природы элементов, слагающих систему» [1, с.51].

Граф (точнее, мультиграф) можно рассматривать как двухосновную алгебраическую систему, т.к. он определяется двумя множествами  $M$  и  $U$  – вершин и дуг, соответственно, а также отображением  $\Phi: U \rightarrow M^2$ , посредством которого каждой дуге  $g \in U$  ставится в соответствие упорядоченная пара  $(a; b)$  вершин  $a; b \in M$ .

Из многообразия различных способов задания конечных графов наиболее приемлемыми, в прикладном аспекте, являются их представления посредством матриц смежности и матриц инцидентности [2-4]. Это связано, прежде всего, с тем, что матричные представления дают «чистую», т.е. независимую от природы элементов множеств  $M$  и  $U$ , реализацию графов. Кроме того, особенности строения матриц смежности и матриц инцидентности, т.е. порядок и специфика расположения элементов этих матриц в строках и столбцах, наглядно отражают порядок определения отображения  $\Phi$  и аккумулируют в себе возможности эффективного распознавания свойств соответствующего графа. Немаловажным преимуществом матричных представлений является также то, что матричные реализации конечных графов и технологий оперирования с ними являются наиболее удобным средством для введения этих графов в «память» компьютера и их компьютерной обработки.

В соответствии с этим, концепцию изучения алгебраических систем с точностью до изоморфизма, применительно к конечным графам, уместно реализовывать методами теории матриц.

В данной работе в терминах теории матриц даются критерии изоморфизма конечных графов и на конкретных примерах демонстрируются прикладные возможности полученных критериев.

### ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Графом называется упорядоченная тройка  $\mathbf{G} = \langle M; U; \Phi \rangle$ , где  $M$  – любое непустое множество,  $U$  – произвольное множество, при этом  $M \cap U = \emptyset$ , и  $\Phi$  – некоторое отображение из  $U$  в  $M^2 = M \times M$ . Элементы множества  $M$  называются вершинами графа  $\mathbf{G}$ , а множества  $U$  – дугами этого графа. Если  $g \in U$  и  $\Phi(g) = (a; b)$ , то говорят, что дуга  $g$  исходит из вершины  $a$  и заходит в вершину  $b$ . Если  $a=b$ , то дуга  $(a; b) = (a; a)$  называется петлей.

Если  $g_1$  и  $g_2$  различные дуги из  $U$  и  $\Phi(g_1) = \Phi(g_2)$ , то эти дуги называются параллельными или кратными.

Граф  $G = \langle M; U; \Phi \rangle$  называется конечным, если конечным является множество  $M \cup U$ .

Графы  $G_1 = \langle M_1; U_1; \Phi_1 \rangle$  и  $G_2 = \langle M_2; U_2; \Phi_2 \rangle$  называются изоморфными ( $G_1 \cong G_2$ ), если существуют такие биекции  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  и  $\psi: U_1 \rightarrow U_2$ , что

$$(\forall a; b \in M_1)(\forall g \in U_1)((\Phi_1(g) = (a; b)) \Leftrightarrow (\Phi_2(\psi(g)) = (\varphi(a); \varphi(b)))) \quad (1)$$

Пусть  $G = \langle M; U; \Phi \rangle$  – произвольный конечный граф и  $|M| = m$ . Если  $g \in U$  и  $\Phi(g) = (a; b)$ , то мощность полного прообраза  $\Phi^{-1}((a; b))$  пары  $(a; b)$  называется кратностью дуги  $g$ , т.е., в случае конечного графа, кратность дуги  $g$  – это число попарно различных дуг этого графа, исходящих (вместе с дугой  $g$ ) из вершины  $a$  и заходящих в вершину  $b$ .

Матрицей смежности графа  $G$  называется квадратная матрица  $A_G = \|A_{ij}\|$   $t$ -го порядка, элементы  $A_{ij}$  которой, для любых  $i, j \in \{1; 2; \dots; m\}$ , определяются по следующему правилу:

$$A_{ij} = \begin{cases} k_{ij}, & \text{если существует дуга } g \in U \text{ кратности } k_{ij} \text{ такая} \\ & \text{что } \Phi(g) = (a_i; a_j); \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть  $E$  – единичная матрица размерности  $m \times m$  и

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & m \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_m \end{pmatrix} \text{ – подстановка } t\text{-ой степени. Через } E_\pi \text{ обозначим}$$

матрицу, которая получается из матрицы  $E$  посредством (индуцированной подстановкой  $\pi$ ) перестановки ее строк (т.е. на место  $i$ -ой строки матрицы  $E$  ставится  $t_i$ -ая строка этой матрицы,  $i = 1; 2; \dots; m$ ).

К примеру, если  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , то  $E_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Через  $E_\pi^T$  будет обозначаться, далее, матрица, полученная из матрицы  $E_\pi$  посредством транспонирования.

Непосредственная проверка показывает, что имеет место следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть  $\pi$  – подстановка  $t$ -ой степени и  $A$  – произвольная квадратная матрица  $t$ -ого порядка. Тогда:

а) умножение матрицы  $A$  на матрицу  $E_\pi$  слева равносильно перестановке строк этой матрицы, индуцированной подстановкой  $\pi$ , т.е. место  $i$ -ой строки матрицы  $E_\pi A$  будет занимать  $t_i$ -ая строка матрицы  $A$ ,  $i = 1; 2; \dots; m$ ;

б) умножение матрицы  $A$  на матрицу  $E_\pi^T$  справа равносильно перестановке столбцов этой матрицы, индуцированной подстановкой  $\pi$ , т.е. место  $j$ -ого столбца матрицы  $E_\pi A$  будет занимать  $t_j$ -ый столбец матрицы  $A$ ,  $j = 1; 2; \dots; m$ .

В частности, если

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & m \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_m \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \pi(i) = t_i, \quad i = 1; 2; \dots; m \text{ и } A = \|a_{ij}\|,$$

$$i, j \in \{1; 2; \dots; m\}, \text{ то } E_\pi A = \|a_{\pi(i)j}\|, E_\pi A E_\pi^T = \|a_{\pi(i)\pi(j)}\|, i, j \in \{1; 2; \dots; m\}.$$

Теорема 1. Пусть  $G_1 = \langle M_1; U_1; \Phi_1 \rangle$  и  $G_2 = \langle M_2; U_2; \Phi_2 \rangle$  – произвольные конечные графы,  $A_{G_1}, A_{G_2}$  – их матрицы смежности и  $|M_1| = |M_2| = m, |U_1| = |U_2| = n$ . Графы  $G_1$  и  $G_2$  изоморфны тогда и только тогда, когда существует такая подстановка  $t$ -ой степени  $\pi$ , что

$$A_{G_1} = E_\pi A_{G_2} E_\pi^T \quad (2)$$

Доказательство. Пусть  $M_1 = \{a_1; a_2; \dots; a_m\}; M_2 = \{b_1; b_2; \dots; b_m\},$

$U_1 = \{g_1; g_2; \dots; g_n\}; U_2 = \{q_1; q_2; \dots; q_n\}, A_{G_1} = \|A_{ij}^{(1)}\|$  и  $A_{G_2} = \|A_{ij}^{(2)}\|,$   
 $i, j \in \{1; 2; \dots; m\}$  – матрицы смежности графов  $G_1$  и  $G_2$ .

⇒. Предположим, что  $G_1 \cong G_2$ ;  $\varphi$  и  $\psi$  – биекции  $M_1$  на  $M_2$  и  $U_1$  на  $U_2$ , соответственно, удовлетворяющие условию (1).

Пусть  $\varphi(a_i) = b_{t_i}, i = 1; 2; \dots; m$ . Полагая  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & m \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_m \end{pmatrix},$

докажем, что при таком выборе подстановки  $\pi$  матрицы  $A_{G_1} = \|A_{ij}^{(1)}\|$  и  $E_\pi A_{G_2} E_\pi^T = \|B_{ij}\|$  совпадают, т.е.  $\|A_{ij}^{(1)}\| = \|B_{ij}\|$  для любых  $i, j \in \{1; 2; \dots; m\}$ .

В соответствии с определением матрицы инцидентности графа  $G_1, A_{ij}^{(1)}$  есть число дуг графа  $G_1$ , исходящих из вершины  $a_i$  и заходящих в вершину  $a_j$ , т.е. число элементов множества  $\Phi_1^{-1}((a_i; a_j))$  равно  $k_{ij}$ . Пусть  $\Phi_1^{-1}((a_i; a_j)) = \{g_{s_1}; g_{s_2}; \dots; g_{s_{k_{ij}}}\}.$

Тогда, в соответствии с условием (1) :

$$\Phi_2(\psi(g_{s_r})) = (\varphi(a_i); \varphi(a_j)) = (b_{t_i}; b_{t_j}), \quad r = 1; 2; \dots; k_{ij}.$$

Будем считать, что  $\psi(g_{s_r}) = q_{j_{s_r}}, r = 1; 2; \dots; k_{ij}$ . Т.к.  $\psi$  – биекция, то все

дуги множества  $\Phi_2^{-1}((b_{t_i}; b_{t_j})) = \{q_{j_{s_1}}; q_{j_{s_2}}; \dots; q_{j_{s_{k_{ij}}}}\},$  попарно различны,

т.е. число дуг графа  $G_2$ , исходящих из вершины  $b_{t_i}$  и заходящих в вершину  $b_{t_j}$ , равно  $k_{ij}$ .

Согласно предложению 1.а), матрица  $E_\pi A_{G_2}$  получается из матрицы  $A_{G_2}$  посредством перестановки строк, индуцированной подстановкой  $\pi$ , т.е., в частности, на место строки матрицы  $E_\pi A_{G_2}$  с номером  $i$  будет поставлена строка матрицы  $A_{G_2}$  с номером  $t_i$ . Аналогичным образом, в соответствии с пунктом б) предложения 1, матрица  $E_\pi A_{G_2} E_\pi^T$  получается из матрицы  $E_\pi A_{G_2}$  посредством перестановки столбцов, индуцированной той же подстановкой  $\pi$ , т.е. на месте столбца матрицы  $E_\pi A_{G_2} E_\pi^T$  с номером  $j$  будет стоять столбец матрицы  $E_\pi A_{G_2}$  с номером  $t_j$ . Таким образом, в результате вышеотмеченных перестановок, на месте  $(i;j)$  – элемента матрицы  $E_\pi A_{G_2} E_\pi^T$  окажется элемент  $A_{t_i t_j}^{(2)}$  матрицы  $A_{G_2}$ . В соответствии с определением матрицы смежности графа  $G_2$ , этот элемент есть число дуг, исходящих из вершины  $b_{t_i}$  и заходящих в вершину  $b_{t_j}$ , т.е., как отмечалось ранее, – число  $k_{ij}$ . Следовательно,  $B_{ij} = A_{ij}$  для любых  $i, j \in \{1; 2; \dots; m\}$ .

←. Пусть теперь имеет место равенство (2) для некоторой подстановки  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & m \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_m \end{pmatrix}$ . Покажем, что графы  $G_1$  и  $G_2$

изоморфны, т.е. найдем такие биекции  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  и  $\psi: U_1 \rightarrow U_2$  для которых будет выполняться условие (1).

Исходя из подстановки  $\pi$ , биекцию  $\varphi$  определим по следующему правилу:  $\varphi(a_i) = b_{t_i}$ ,  $i = 1; 2; \dots; m$ .

Перейдем к определению биекции  $\psi: U_1 \rightarrow U_2$ . Связывая с отображением  $\Phi_1: U_1 \rightarrow M_1$  отношение эквивалентности  $P_{\Phi_1} = \Phi_1 \circ \Phi_1^{-1}$ , получим фактор-множество

$$U_1/P_{\Phi_1} = \{[g]_{P_{\Phi_1}} / g \in U_1\}, \quad (3)$$

при этом, если  $g \in U_1$  и  $\Phi_1(g) = (a_i; a_j)$ , то  $[g]_{P_{\Phi_1}} = \Phi_1^{-1}(a_i; a_j)$  и  $|\Phi_1^{-1}(a_i; a_j)| = A_{ij}^{(1)}$ , для любых  $i, j \in \{1; 2; \dots; m\}$ .

Аналогичным образом получаем фактор-множество

$$U_2/P_{\Phi_2} = \{[g]_{P_{\Phi_2}} / g \in U_2\}, \quad (4)$$

для которого, как и для фактор-множества  $U_1/P_{\Phi_1}$ , выполняется условие: если  $q \in U_2$  и  $\Phi_2(q) = (b_r; b_s)$ , то  $[q]_{P_{\Phi_2}} = \Phi_2^{-1}(b_r; b_s)$  и  $|\Phi_2^{-1}(b_r; b_s)| = A_{rs}^{(2)}$ , для любых  $r, s \in \{1; 2; \dots; m\}$ .

В связи с получением разбиений (3) и (4) множеств  $U_1$  и  $U_2$  на непересекающиеся классы, для построения биекции  $\psi$  достаточно установить

такое биективное соответствие между фактор-множествами  $U_1/P_{\Phi_1}$  и  $U_2/P_{\Phi_2}$ , при котором соответствующие классы имеют одно и то же число дуг и такое, что, если дуги некоторого класса из 1-го фактор-множества связывают вершины  $a_i$  и  $a_j$ , то дуги из соответствующего класса 2-го фактор-множества связывают  $\varphi$  – образы этих вершин.

В силу равенства (2) будем иметь  $A_{ij}^{(1)} = B_{ij}$ . Но  $B_{ij} = A_{\pi(i)\pi(j)}^{(2)}$ , согласно предложению 1. Отсюда получаем, что  $A_{ij}^{(1)} = A_{t_i t_j}^{(2)}$ . Как отмечалось ранее,  $A_{ij}^{(1)} = |\Phi_1^{-1}(a_i; a_j)|$  и  $A_{t_i t_j}^{(2)} = |\Phi_2^{-1}(b_{t_i}; b_{t_j})|$ . Пусть  $A_{ij}^{(1)} = k_{ij}$ , будем считать, что классы  $\Phi_1^{-1}(a_i; a_j) = \{g_{s_1}; g_{s_2}; \dots; g_{s_{k_{ij}}}\}$  и  $\Phi_2^{-1}(b_{t_i}; b_{t_j}) = \{q_{r_1}; q_{r_2}; \dots; q_{r_{k_{ij}}}\}$  являются соответствующими. Полагая,

$$\psi_{ij}(g_{s_p}) = q_{r_p}, \quad p = 1; 2; \dots; k_{ij}, \quad (5)$$

получим биективное отображение  $\psi_{ij}: \Phi_1^{-1}(a_i; a_j) \rightarrow \Phi_2^{-1}(b_{t_i}; b_{t_j})$ .

Полагая, далее,

$$\psi_{ij} = \bigcup_{i, j \in \{1; 2; \dots; m\}} \psi_{ij}, \quad (6)$$

получим биективное отображение  $\psi: U_1 \rightarrow U_2$ . Проверим, что это отображение удовлетворяет условию (1). Действительно, пусть  $g \in U_1$  и  $\Phi_1(g) = (a_i; a_j)$  для некоторых  $i, j \in \{1; 2; \dots; m\}$ , тогда  $g \in \Phi_1^{-1}(a_i; a_j)$ .

Пусть  $g = g_{s_l}$  для некоторого  $l \in \{1; 2; \dots; k_{ij}\}$ , т.е., согласно определению (6), будем иметь  $\psi(g) = \psi_{ij}(g) = \psi_{ij}(g_{s_l}) = q_{r_l}$ . Т.к.  $q_{r_l} \in \Phi_2^{-1}(b_{t_i}; b_{t_j})$ , то  $\Phi_2(q_{r_l}) = (b_{t_i}; b_{t_j}) = (\varphi(a_i); \varphi(a_j))$ .

Из этих равенств получаем:  $\Phi_2(\psi(g)) = \Phi_2(q_{r_l}) = (\varphi(a_i); \varphi(a_j))$ .

Т.е., предполагая, что  $\Phi_1(g) = (a_i; a_j)$ , мы получаем, что  $\Phi_2(\psi(g)) = (\varphi(a_i); \varphi(a_j))$ , для любых  $i, j \in \{1; 2; \dots; m\}$ , что и доказывает справедливость условия (1) для биекции  $\psi$ .

Продemonстрируем справедливость теоремы 1 применительно к конкретному примеру.

Пусть графы  $G_1 = \langle M_1; U_1; \Phi_1 \rangle$  и  $G_2 = \langle M_2; U_2; \Phi_2 \rangle$ , где

$$M_1 = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6\}; \quad U_1 = \{g_1; g_2; g_3; g_4; g_5; g_6; g_7; g_8; g_9; g_{10}\}$$

$$M_2 = \{b_1; b_2; b_3; b_4; b_5; b_6\}; \quad U_2 = \{q_1; q_2; q_3; q_4; q_5; q_6; q_7; q_8; q_9; q_{10}\},$$

заданы посредством своих геометрических реализаций (смотри рисунок 1 а), б)).

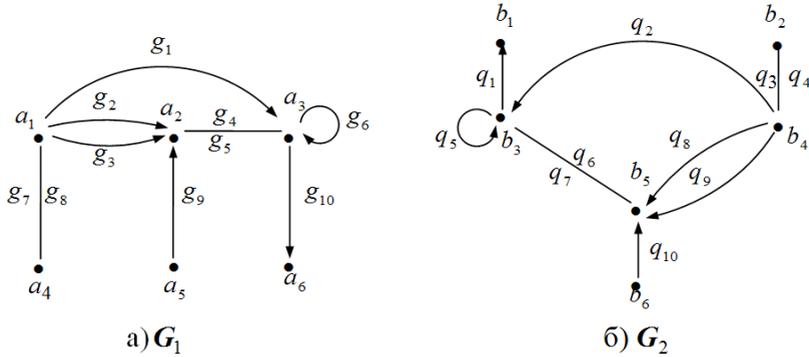


Рисунок 1 – Графы геометрических реализаций

Анализ специфики расположения ориентированных и неориентированных ребер данных графов позволяет заключить, что биекции  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ ;  $\psi: U_1 \rightarrow U_2$ , заданные по правилам

$$\varphi(a_1) = b_4; \varphi(a_2) = b_5; \varphi(a_3) = b_3; \varphi(a_4) = b_2; \varphi(a_5) = b_6; \varphi(a_6) = b_1;$$

$$\psi(g_1) = q_2; \psi(g_2) = q_8; \psi(g_3) = q_9; \psi(g_4) = q_6; \psi(g_5) = q_7;$$

$$\psi(g_6) = q_5; \psi(g_7) = q_3; \psi(g_8) = q_4; \psi(g_9) = q_{10}; \psi(g_{10}) = q_1,$$

определяют изоморфное отображение графа  $G_1$  на граф  $G_2$ . Проверка условий вида:

$$(\forall g \in U_1)(\forall a, b \in M_1)((\Phi_1(g) = (a; b)) \Leftrightarrow (\Phi_2(\psi(g)) = (\varphi(a); \varphi(b))))$$

осуществляется непосредственно.

В соответствии с доказательством теоремы 1, подстановка  $\pi$  должна быть подстановкой шестой степени и должна иметь следующий вид:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{т.е. } A_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Находя матрицы смежности графов  $G_1$  и  $G_2$ , будем иметь:

$$A_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_{G_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 1, применительно к этим матрицам должно выполняться равенство (2):

Действительно, умножая матрицы правой части этого равенства непосредственно (или применяя предложение 1), получим:

$$E_\pi A_{G_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_\pi A_{G_2} E_\pi^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{G_1}.$$

Аналогично доказательству теоремы 1 может быть получен в матричной форме критерий изоморфизма графов, в котором вместо матриц смежности будут использоваться матрицы инцидентности.

Напомним, что матрицей инцидентности конечного графа  $G = \langle M; U; \Phi \rangle$  где  $M = \{a_1; a_2; \dots; a_m\}$  и  $U = \{g_1; g_2; \dots; g_n\}$ , называется матрица  $B_G = \|B_{ij}\|$  размерности  $m \times n$ , элементы которой определяются по следующему правилу:

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } g_j \text{ исходит из вершины } a_i; \\ -1, & \text{если дуга } g_j \text{ заходит в вершину } a_i \text{ и не} \\ & \text{является петлей;} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$i \in \{1; 2; \dots; m\}; \quad j \in \{1; 2; \dots; n\}.$$

Теорема 2. Пусть  $G_1 = \langle M_1; U_1; \Phi_1 \rangle$  и  $G_2 = \langle M_2; U_2; \Phi_2 \rangle$  – произвольные конечные графы,  $B_{G_1}, B_{G_2}$  – их матрицы инцидентности,  $|M_1| = |M_2| = m$  и  $|U_1| = |U_2| = n$ . Графы  $G_1$  и  $G_2$  изоморфны тогда и только тогда, когда существуют такие подстановки  $\pi_1$  и  $\pi_2$   $m$ -ой степени и  $n$ -ой степени, соответственно, что  $B_{G_1} = E_{\pi_1} B_{G_2} E_{\pi_2}^T$ .

Нетрудно проверить, что если матрицами инцидентности графов  $G_1$  и  $G_2$  являются, соответственно, матрицы

$$B_{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_{G_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{и } \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}; \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 7 & 1 & 2 & 8 & 9 & 11 & 10 \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$B_{G_1} = E_{\pi_1} B_{G_2} E_{\pi_2}^T.$$

В соответствии с теоремой 2, это равенство говорит о том, что графы  $G_1$  и  $G_2$  изоморфны.

### ВЫВОДЫ

Приведенные в данной статье «матричные» критерии изоморфизма конечных графов характеризуют, в определенном смысле, «внешние» информативные возможности матриц смежности и инцидентности конечных графов, т.е. возможности, позволяющие сравнивать эти графы. Очевидными следствиями из теоремы 1 и теоремы 2 являются, в частности, следующие утверждения [3]:

1) Конечные графы  $G_1$  и  $G_2$  являются изоморфными тогда и только тогда, когда матрицу смежности любого из них можно получить из матрицы смежности другого посредством одной и той же перестановки строк и столбцов (т.е. как перестановка строк, так и последующая перестановка столбцов индуцируются одной и той же подстановкой).

2) Конечные графы  $G_1$  и  $G_2$  являются изоморфными тогда и только тогда, когда матрицы инцидентности этих графов могут быть получены (одна из

другой) некоторыми перестановками строк и столбцов (т.е. перестановки строк и столбцов, в общем случае, индуцируются различными подстановками, различных, в общем случае, степеней).

Практическая значимость вышеприведенных следствий заключается в том, что, при анализе специфики расположения отличных от нуля элементов матриц смежности (инцидентности) данных конечных графов, нередко удается выявить подстановки, индуцирующие соответствующие перестановки строк и столбцов, т.е. выяснить, являются ли эти графы изоморфными.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Мальцев, А. И. Алгебраические системы. – М. : Наука, 1979.
- 2 Харари, Ф. Теория графов. – М. : Мир, 1973.
- 3 Судоплатов, С. В. Элементы дискретной математики / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова // М. : ИНФРА – М; Новосибирск : НТГУ, 2003.
- 4 Дроботун, Б. Н. Руководство к решению задач по дискретной математике и математической логике [Учебное пособие]. Часть I. Часть II. – Павлодар : Кереку, 2010.

Материал поступил в редакцию 06.01.16.

*Б. Н. Дроботун, С. Е. Умарбекова*

#### Графтар теориясындағы матрицалық әдістер (I)

С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ. Материал 06.01.16 баспаға түсті.

*B. Drobotun, S. Umarbekova*

#### The matrix methods in the graph theory (I)

S. Toraihyrov Pavlodar State University, Pavlodar. Material received on 06.01.16.

*Мақалада матрицалар теориясының «тілінде» ақырлы графтардың изоморфизм критерийлері анықталады, осы критерийлердің дәлделген түсініктемелері беріледі және нақты мысалдармен олардың қолданбалы мүмкіндіктері келтіріледі.*

*In this work «in terms» of the theory of matrices the criteria of isomorphism of finite graphs are formulated, evidential justifications of these criteria are given and their applied possibilities are shown on the concrete examples.*

**Б. Н. Дроботун<sup>1</sup>, С. Е. Умарбекова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>д.п.н., профессор, <sup>2</sup>студент

Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова,

г. Павлодар

e-mail: drobotun.nina@mail.ru

**МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ГРАФОВ (II)**

*В предлагаемой работе, являющейся непосредственным продолжением статьи [1] приводятся доказательные обоснования результатов, на которых базируются алгоритмы, позволяющие выявлять, исходя из матриц смежности, количественные характеристики «внутреннего» строения конечных графов.*

*Ключевые слова: граф, маршрут, матрица смежности, матрица достижимости, отношение связности, компонента сильной связности.*

**ВВЕДЕНИЕ**

Полученные в работе [1] «матричные» критерии изоморфизма конечных графов характеризуют (в определенном смысле) «внешние» выразительные возможности матриц смежности и матриц инцидентности этих графов, т.е. возможности, позволяющие сравнивать различные графы между собой и выявлять их идентичность (с точностью до изоморфизма).

С позиций деления выразительных возможностей, аккумулированных в матрицах смежности и матрицах инцидентности графов, на «внешние» и «внутренние», под «внутренними» следует понимать возможности, позволяющие выявлять, посредством оперирования с этими матрицами, информацию: о числе и характеристиках маршрутов определенной длины, связывающих те или иные вершины графов; о компонентах их связности и сильной связности; о характеристиках расстояний в этих графах и т.п.

В данной работе, являющейся непосредственным продолжением статьи [1], приводятся доказательные обоснования ряда наиболее применяемых алгоритмов, позволяющих получать вышеуказанную информацию о конечных графах, исходя из их матриц смежности.

Следует отметить, что в литературе по теории графов [2-3] утверждения прикладного характера, т.е. результаты, на которых базируются алгоритмы, позволяющие получать многие из «внутренних» характеристик конечных графов приводятся, в основном, без доказательств.

**ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ**

Пусть  $G = \langle M; U; \phi \rangle$  – произвольный конечный граф. Если  $g_1, g_2 \in U$ ,  $\phi(g_1) = (a; b)$  и  $\phi(g_2) = (b; a)$ , то дуги  $(a; b)$  и  $(b; a)$  называются противоположными. Если  $g_1$  и  $g_2$  противоположные дуги графа  $G$ , то говорят, что они образуют неориентированное ребро; если же  $g_1 \in U$ ,  $\phi(g_1) = (a; b)$  и  $\phi(g_2) \neq (b; a)$  для любой дуги  $g_2 \in U$ , то дуга  $g_1$  называется ориентированным ребром этого графа.

Упорядоченная последовательность

$$x_1 g_1 x_2 g_2 x_3 \dots x_n g_n x_{(n+1)}, \tag{1}$$

где  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1} \in M$ ;  $\phi(g_1) = (x_1; x_2)$ ;  $\phi(g_2) = (x_2; x_3)$ ; ...;  $\phi(g_n) = (x_n; x_{n+1})$ , называется маршрутом графа  $G$ , соединяющим вершины  $x_1$  и  $x_{n+1}$ . Число  $n$ , т.е. число дуг, входящих в маршрут, называется длиной этого маршрута. В общем случае, в маршруте (1), как вершины, так и дуги, могут повторяться.

Для случая орграфа, маршрут (1) называется путем, если все его дуги попарно различны. Путь называется замкнутым, если его начало и конец совпадают. Замкнутый путь называется контуром. Путь называется простым, если все его вершины кроме, может быть, первой и последней, попарно различны. Замкнутый и простой путь (1) ненулевой длины называется простым контуром.

В случае неорграфа, при определении маршрута вместо дуг рассматриваются неориентированные ребра этого графа, т.е. пары противоположных дуг. Таким образом, маршрутом, соединяющим вершины  $x_1$  и  $x_{n+1}$ , неорграфа  $G = \langle M; U; \phi \rangle$  называется упорядоченная последовательность  $x_1 [g_1 g_1'] x_2 [g_2 g_2'] x_3 \dots x_n [g_n g_n'] x_{n+1}$ ,  $\tag{2}$  где  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1} \in M$ ;  $\phi(g_1) = (x_1; x_2)$ ;  $\phi(g_1') = (x_2; x_1)$ ;  $\phi(g_2) = (x_2; x_3)$ ; ...;  $\phi(g_n) = (x_n; x_{n+1})$ ;  $\phi(g_n') = (x_{n+1}; x_n)$ .

Если дуга  $g_i$  является петлей, то в маршруте (2) имеет место равенство  $g_i = g_i'$ ,  $i = \{1; 2; \dots; n\}$ . Число  $n$  – неориентированных ребер маршрута (2) называется его длиной. Как и в случае орграфа, в маршруте (2), вершины и неориентированные ребра могут повторяться.

Для случая неорграфа, маршрут (2) называется цепью, если все его неориентированные ребра попарно различны. Цепь называется замкнутой, если ее начало и конец совпадают. Замкнутая цепь называется циклом. Цепь называется простой, если все ее вершины, кроме может быть первой и последней, попарно различны. Замкнутая простая цепь ненулевой длины называется простым циклом.

*Теорема 1.* Пусть  $A_G$  – матрица смежности графа  $G = \langle M; U; \phi \rangle$  с множеством вершин  $M = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ . Тогда:

а) число маршрутов длины  $S$  графа  $G$ , соединяющих вершины  $a_i$  и  $a_j$ , равно элементу матрицы  $A_G^S$ , стоящему на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца ( $1 \leq i, j \leq n$ ) этой матрицы;

б) в графе  $G$  маршрут, соединяющий вершины  $a_i$  и  $a_j$ , ( $a_i \neq a_j$ ) существует тогда и только тогда, когда элемент матрицы

$$A_G + A_G^2 + \dots + A_G^{n-1},$$

стоящий на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца ( $1 \leq i, j \leq n$ ), отличен от нуля;

в) в нюрграфе (орграфе)  $G$  цикл (контур), содержащий вершину  $a_i$ , существует тогда и только тогда, когда элемент матрицы

$$A_G + A_G^2 + \dots + A_G^{n-1} + A_G^n,$$

стоящий на пересечении  $i$ -ой строки и  $i$ -го столбца, отличен от нуля,  $1 \leq i \leq n$ .

Доказательство. а) Пусть  $A_G = \|A_{ij}\|$  и  $A_G^S = \|A_{ij}^S\|$ ,  $i, j \in \{1; 2; \dots; n\}$ . Применим метод полной математической индукции по натуральному параметру  $S$ .

1. Базис индукции ( $S=1$ ). В этом случае  $A_{ij}^{(S)} = A_{ij}^1 = A_{ij}$  и доказываемое утверждение следует из определения матрицы смежности графа  $G$ .

2. Индукционное предположение ( $s=t$ ). Предположим, что доказываемое утверждение верно при  $s=t$ ; т.е. предположим, что для любых  $k$  и  $l$  ( $k, l \in \{1; 2; \dots; m\}$ ) число маршрутов длины  $t$ , исходящих из вершины  $a_k$  и заходящих в вершину  $a_l$  равно элементу  $A_{kl}^{(S)}$  матрицы  $A_G^t$ .

3. Индукционный шаг ( $s=t+1$ ). Докажем, что число маршрутов длины  $(t+1)$ , соединяющих вершины  $a_i$  и  $a_j$  графа  $G$ , равно элементу  $A_{ij}^{(t+1)}$  матрицы  $A_G^{t+1}$ .

Т.к.  $A_G^{t+1} = A_G^t \cdot A_G$ , т.е., в соответствии с определением операции умножения матриц:

$$A_{ij}^{(t+1)} = A_{i1}^{(t)} \cdot A_{1j} + A_{i2}^{(t)} \cdot A_{2j} + \dots + A_{ik}^{(t)} \cdot A_{kj} + \dots + A_{im}^{(t)} \cdot A_{mj} \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что для любого  $k \in \{1; 2; \dots; m\}$  слагаемое  $A_{ik}^{(t)} \cdot A_{kj}$  этой суммы равно числу маршрутов длины  $t+1$ , соединяющих вершины  $a_i$  и  $a_j$  и проходящих через вершину  $a_k$ . Действительно, согласно индукционному предположению,  $A_{ik}^{(t)}$  – число маршрутов длины  $t$ , соединяющих вершины  $a_i$  и  $a_k$ , а  $A_{kj}$  – число маршрутов длины 1, соединяющих вершины  $a_k$  и  $a_j$ . Таким образом, утверждение о числе  $A_{ik}^{(t)} \cdot A_{kj}$ , как числе маршрутов длины  $t+1$ , соединяющих вершины  $a_i$  и  $a_j$  и проходящих через вершину  $a_k$ , следует отсюда по правилам, определяющим операцию произведения матриц. Замечание о том, что суммирование в правой части равенства (3) осуществляется по всем  $k = 1; 2; \dots; m$ , завершает проведение индукционного шага.

б) Пусть  $A_G + A_G^2 + \dots + A_G^{m-1} = W$  и  $W = \|W_{ij}\|$ ,  $i, j \in \{1; 2; \dots; m\}$

Будем считать, что граф  $G$  является орграфом. Для неорграфа доказательство будет отличаться от нижеприведенного только терминологией (в частности, вместо простого пути будет рассматриваться простая цепь). Пусть в графе  $G$  существует маршрут  $\tau$ , содержащий вершины  $a_i$  и  $a_j$  и пусть длина этого маршрута равна  $S$ . Заметим, что (без ограничения общности) можно считать, что  $1 \leq s \leq m-1$ . Действительно, т.к.  $a_i \neq a_j$ , то  $S \geq 1$  и длина любого простого пути из вершины  $a_i$  в вершину  $a_j$  не превосходит  $m-1$ . Нетрудно видеть также, что если существует маршрут из вершины  $a_i$  в вершину  $a_j$ , то существует и простой путь из  $a_i$  в  $a_j$ . Таким образом, можно полагать, что маршрут  $\tau$  является простым путем. Т.к.  $A_{ij} + A_{ij}^{(2)} + \dots + A_{ij}^{(n-1)} = W_{ij}$ , и  $A_{ij}^{(s)} \geq 1$ , то  $W_{ij} \neq 0$ .

$\Rightarrow$ . Пусть  $W_{ij} \neq 0$ . Тогда  $A_{ij} + A_{ij}^{(2)} + \dots + A_{ij}^{(n-1)} \neq 0$ , т.е.  $A_{ij}^{(s)} \geq 1$  для некоторого  $s \in \{1; 2; \dots; m\}$ . Т.к.  $A_{ij}^{(s)}$  есть, в соответствии с пунктом а), число маршрутов длины  $s$  из вершины  $a_i$  в вершину  $a_j$  и  $A_{ij}^{(s)} \geq 1$ , то хотя бы один маршрут из  $a_i$  в  $a_j$  существует.

в) Т.к. длина любого простого цикла неорграфа (простого контура орграфа)  $G$ , содержащего вершину  $a_i$ , ( $i \in \{1; 2; \dots; m\}$ ), не превосходит  $m$ , то доказательство утверждения этого пункта следует из утверждений пунктов а) и б), а также следующих достаточно очевидных положений:

- если вершина  $a_i$  орграфа  $G$  содержится в некотором контуре, то существует простой контур, содержащий эту вершину;
- если вершина  $a_i$  неорграфа  $G$  содержится в некотором цикле, то существует простой цикл, содержащий эту вершину.

Опишем, основываясь на доказательстве теоремы 1, практический метод получения маршрутов длины  $S$ , соединяющих вершины  $a_i$  и  $a_j$  графа  $G$ .

Через  $(i; j)^{(s)}$  будем обозначать, в дальнейшем, (произвольный) маршрут длины  $S$ , из вершины  $a_i$  в вершину  $a_j$ . Запись  $(i; j)^{(s)} \neq 0$  будет означать, далее, что существует хотя бы один маршрут длины  $s$ , из  $a_i$  в  $a_j$ , ( $i \in \{1; 2; \dots; m\}$ ). Т.е. в соответствии с теоремой 1, утверждение  $A_{ij}^{(s)} \neq 0$  будет равносильно утверждению  $(i; j)^{(s)} \neq 0$ .

Для выявления упорядоченной последовательности всех вершин, через которые проходит (каждый) конкретный маршрут длины  $s$ ,  $s > 1$ , из  $a_i$  в  $a_j$  равенство

$$A_{ij}^{(s)} = A_{i1}^{(s-1)} \cdot A_{1j} + A_{i2}^{(s-1)} \cdot A_{2j} + \dots + A_{im}^{(s-1)} \cdot A_{mj}$$

перепишем в виде

$$(i; j)^{(s)} = (i; 1)^{(s-1)} \cdot (1; j) + (i; 2)^{(s-1)} \cdot (2; j) + \dots + (i; k)^{(s-1)} \cdot (k; j) + \dots + (i; m)^{(s-1)} \cdot (m; j) \quad (4)$$

Соотношение (4) для  $(i; j)^{(s)}$  будем называть представлением шага 1.

Предполагая, что  $(i; j)^{(s)} \neq 0$ , получаем, что хотя бы одно из «слагаемых» правой части равенства (4) отлично от нуля. Если  $(i; k)^{(s-1)} \cdot (k; j) \neq 0$ , то  $(i; k)^{(s-1)} \neq 0$  и из равенства (4) следует, что в графе  $G$  существует маршрут длины  $S$  из  $a_i$  в  $a_j$  вида:

$$\underbrace{a_i \rightarrow \dots \rightarrow a_k}_{\text{маршрут длины } (s-1)} \rightarrow a_j$$

Т.к.

$$A_{ik}^{(s-1)} = A_{i1}^{(s-2)} \cdot A_{1k} + A_{i2}^{(s-2)} \cdot A_{2k} + \dots + A_{il}^{(s-2)} \cdot A_{lk} + \dots + A_{im}^{(s-2)} \cdot A_{mk},$$

то, на основе этого равенства, получаем, соответствующее ему соотношение вида (4), т.е. соотношение

$$(i; j)^{(s-1)} = (i; 1)^{(s-2)} \cdot (1; k) + (i; 2)^{(s-2)} \cdot (2; k) + \dots + (i; r)^{(s-2)} \cdot (r; k) + \dots + (i; m)^{(s-2)} \cdot (m; k) \quad (5)$$

Из соотношений (4) и (5) получаем:

$$(i; j)^{(s)} = \dots + (i; k)^{(s-1)} \cdot (k; j) + \dots = \dots + [(i; 1)^{(s-2)} \cdot (1; k) + (i; 2)^{(s-2)} \cdot (2; k) + \dots + (i; r)^{(s-2)} \cdot (r; k) + \dots + (i; m)^{(s-2)} \cdot (m; k)] \cdot (k; j) + \dots \quad (6)$$

Соотношение (6) для  $(i; j)^{(s)}$  будем называть представлением шага 2.

Если в соотношении (5) слагаемое  $(i; r)^{(s-2)} \cdot (r; k)$  отлично от нуля, то соотношение (6) показывает, что в графе  $G$  существует маршрут длины  $S$  из  $a_i$  в  $a_j$  вида:

$$\underbrace{a_i \rightarrow \dots \rightarrow a_r}_{\text{маршрут длины } (s-2)} \rightarrow a_k \rightarrow a_j.$$

Продолжая этот процесс для всех отличных от нуля слагаемых представлений шагов 1, 2, и т.д., мы, в качестве представления шага  $(s-1)$  для  $(i; j)^{(s)}$ , получим соотношение вида:

$$(i; j)^{(s)} = \dots + (i; p) \cdot (p; q) \cdot \dots \cdot (l; r) \cdot (r; k) \cdot (k; j) \cdot \dots, \quad (7)$$

каждому слагаемому которого будет соответствовать упорядоченная последовательность (длины  $S$ ) вершин графа  $G$ . В частности, выделенному слагаемому соотношения (7) будет соответствовать следующая последовательность вершин:

$$a_i; a_p; a_q; \dots; a_l; a_r; a_k; a_j. \quad (8)$$

По последовательности (8) и отображению  $\phi: U \rightarrow M^2$  выписываются, далее, маршруты из  $a_i$  в  $a_j$  длины  $S$ , проходящие через все вершины этой последовательности. Отметим, что при наличии кратных ребер графа  $G$ ,

связывающих смежные вершины последовательности (8), таких маршрутов может оказаться несколько.

Найдем, к примеру, все маршруты длины 5 из  $a_5$  в  $a_1$  графа  $G$ , геометрическая реализация которого представлена на рисунке 1.

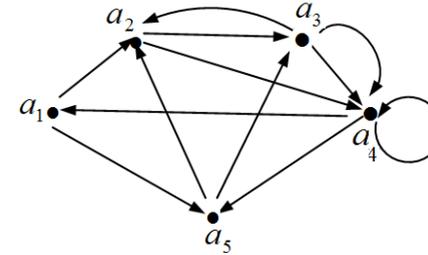


Рисунок 1 –  $G$

Находя матрицу смежности  $A_G$  этого графа и ее степени  $A_G^i$   $i = (1; 2; 3; 4; 5)$ , получим:

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_G^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A_G^4 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 10 & 7 \\ 4 & 9 & 6 & 10 & 7 \\ 5 & 10 & 10 & 14 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 17 & 6 \\ 6 & 7 & 4 & 9 & 9 \end{pmatrix}; \quad A_G^5 = \begin{pmatrix} 10 & 16 & 10 & 19 & 16 \\ 10 & 17 & 16 & 31 & 14 \\ 14 & 23 & 18 & 44 & 19 \\ 17 & 17 & 13 & 36 & 22 \\ 9 & 19 & 16 & 24 & 15 \end{pmatrix};$$

Т.к. элемент  $A_{51}^{(5)}$  матрицы  $A_G^5$  равен 9, то число всех маршрутов из вершины  $A_G^i$  в вершину  $A_G^j$  равно 9.

Соотношение (4), как соотношение шага 1, применительно к рассматриваемому примеру, примет вид:

$$(5; 1)^{(5)} = (5; 1)^{(4)} \cdot (1; 1) + (5; 2)^{(4)} \cdot (2; 1) + (5; 3)^{(4)} \cdot (3; 1) + (5; 4)^{(4)} \cdot (4; 1) + (5; 5)^{(4)} \cdot (5; 1) \quad (9)$$

В правой части соотношения (9) выделено единственное отличное от нуля слагаемое, т.к. соответствующее равенство, получающееся при умножении матрицы  $A_G^4$  на матрицу  $A_G$ , имеет вид:

$$9 = 6 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 9 \cdot 1 + 9 \cdot 0.$$

Аналогично представлению (5), будем иметь

$$(5;4)^{(4)} = (5;1)^{(3)} \cdot (1;4) + (5;2)^{(3)} \cdot (2;4) + (5;3)^{(3)} \cdot (3;4) + (5;4)^{(3)} \cdot (4;4) + (5;5)^{(3)} \cdot (5;4) \quad (10)$$

В правой части равенства (10) отличные от нуля слагаемые также выделены. Из соотношений (9) и (10), отбрасывая равные нулю слагаемые, получаем

$$(5;1)^{(5)} = [(5;2)^{(3)} \cdot (2;4) + (5;3)^{(3)} \cdot (3;4) + (5;4)^{(3)} \cdot (4;4)] \cdot (4;1) = (5;2)^{(3)} \cdot (2;4) \cdot (4;1) + (5;3)^{(3)} \cdot (3;4) \cdot (4;1) + (5;4)^{(3)} \cdot (4;4) \cdot (4;1) \quad (11)$$

Отметим, что равенство (11) (применительно к рассматриваемому случаю) представляет собой соотношение шага 2.

Переходя к следующему шагу, получим, аналогичные соотношению (5), представления для  $(5;2)^{(3)}$ ;  $(5;3)^{(3)}$  и  $(5;4)^{(3)}$ :

$$\begin{aligned} (5;2)^{(3)} &= (5;1)^{(2)} \cdot (1;2) + (5;2)^{(2)} \cdot (2;2) + (5;3)^{(2)} \cdot (3;2) + (5;4)^{(2)} \cdot (4;2) + (5;5)^{(2)} \cdot (5;2) \\ (5;3)^{(3)} &= (5;1)^{(2)} \cdot (1;3) + (5;2)^{(2)} \cdot (2;3) + (5;3)^{(2)} \cdot (3;3) + (5;4)^{(2)} \cdot (4;3) + (5;5)^{(2)} \cdot (5;3) \\ (5;4)^{(3)} &= (5;1)^{(2)} \cdot (1;4) + (5;2)^{(2)} \cdot (2;4) + (5;3)^{(2)} \cdot (3;4) + (5;4)^{(2)} \cdot (4;4) + (5;5)^{(2)} \cdot (5;4). \end{aligned} \quad (12)$$

Из соотношения (11) и системы соотношений (12), вновь учитывая только отмеченные от нуля (выделенные) слагаемые, получим:

$$\begin{aligned} (5;1)^{(5)} &= (5;3)^{(2)} \cdot (3;2) \cdot (2;4) \cdot (4;1) + (5;2)^{(2)} \cdot (2;3) \cdot (3;4) \cdot (4;1) + [(5;2)^{(2)} \cdot (2;4) + (5;3)^{(2)} \cdot (3;4) + (5;4)^2 \cdot (4;4)] \cdot (4;4) \cdot (4;1) = \\ &= (5;3)^{(2)} \cdot (3;2) \cdot (2;4) \cdot (4;1) + (5;2)^{(2)} \cdot (2;3) \cdot (3;4) \cdot (4;1) + (5;3)^{(2)} \cdot (3;2) \cdot (2;4) \cdot (4;1) + (5;2)^{(2)} \cdot (2;3) \cdot (3;4) \cdot (4;1) + (5;4)^2 \cdot (4;4) \cdot (4;4) \cdot (4;1) \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что равенство (13) дает для  $(5;1)^{(5)}$  представление шага 3.

Переходя к следующему (последнему) шагу 4, получим, как и ранее, аналогичные соотношению (5) представления для  $(5;3)^{(2)}$ , и  $(5;4)^{(2)}$ . Оставляя только отличные от нуля слагаемые правых частей этих представлений, будем иметь:

$$\begin{aligned} (5;3)^{(2)} &= (5;2) \cdot (2;3) \quad (5;2)^{(2)} = (5;3) \cdot (3;2) \\ (5;4)^{(2)} &= (5;2) \cdot (2;4) + (5;3) \cdot (3;4) \end{aligned} \quad (14)$$

Из соотношения (13) и системы соотношений (14) получаем:

$$\begin{aligned} (5;1)^{(5)} &= (5;2) \cdot (2;3) \cdot (3;2) \cdot (2;4) \cdot (4;1) + (5;3) \cdot (3;2) \cdot (2;3) \cdot (3;4) \cdot (4;1) + (5;3) \cdot (3;2) \cdot (2;4) \cdot (4;4) \cdot (4;1) + (5;2) \cdot (2;3) \cdot (3;4) \cdot (4;4) \cdot (4;1) + (5;2) \cdot (2;4) \cdot (4;4) \cdot (4;4) \cdot (4;1) + (5;3) \cdot (3;4) \cdot (4;4) \cdot (4;4) \cdot (4;1) \end{aligned} \quad (15)$$

представление шага 4 для  $(5;1)^{(5)}$ , слагаемые которого определяют следующие шесть упорядоченных последовательностей вершин:

$$a_5; a_2; a_3; a_2; a_4; a_1; \quad a_5; a_3; a_2; a_3; a_4; a_1; \quad a_5; a_3; a_2; a_4; a_4; a_1; \quad a_5; a_2; a_3; a_4; a_4; a_1; \quad a_5; a_7; a_4; a_4; a_4; a_1; \quad a_5; a_3; a_4; a_4; a_4; a_1.$$

В связи с тем, что  $\Phi^{-1}(a_3; a_4) = \{q_7; q_8\}$ , вторая, четвертая и шестая из этих последовательностей определяют по два различных маршрута. С учетом этого замечания, действительно, получаем девять попарно различных маршрутов из вершины  $a_5$  в вершину  $a_1$ :

$a_5 q_4 a_2 q_3 a_3 q_2 a_2 q_5 a_4 q_9 a_1$	1 маршрут
$a_5 q_6 a_3 q_2 a_2 q_3 a_3 q_7 a_4 q_9 a_1$	2 маршрута
$a_5 q_6 a_3 q_2 a_2 q_3 a_3 q_8 a_4 q_9 a_1$	
$a_5 q_6 a_3 q_2 a_2 q_5 a_4 q_{12} a_4 q_9 a_1$	1 маршрут
$a_5 q_4 a_2 q_3 a_3 q_7 a_4 q_{12} a_4 q_9 a_1$	2 маршрута
$a_5 q_4 a_2 q_4 a_3 q_8 a_4 q_{12} a_4 q_9 a_1$	
$a_5 q_4 a_2 q_5 a_4 q_{12} a_4 q_{12} a_4 q_9 a_1$	1 маршрут
$a_5 q_6 a_3 q_7 a_4 q_{12} a_4 q_{12} a_4 q_9 a_1$	2 маршрута
$a_5 q_6 a_3 q_8 a_4 q_{12} a_4 q_{12} a_4 q_9 a_1$	

### ВЫВОДЫ

Используя прикладные возможности теоремы 1, аналогично выявлению всех маршрутов из вершины  $a_i$  в вершину  $a_j$  орграфа (неорграфа), можно находить все контуры (простые контуры) орграфов (циклы (простые циклы)) неорграфов, содержащие данную вершину  $a_i$ ,  $i \in \{1; 2; \dots; m\}$ .

Теорема 1 является также основой получения алгоритмов, следуя которым можно находить матрицы достижимости орграфов (матрицы связности неорграфов), а также компоненты связности (сильной связности) графов. В частности [4], если  $C_G$  – матрица достижимости орграфа  $G$  с множеством вершин  $M = \{a_1; a_2; \dots; a_m\}$  и

$$S_G = \|s_{ij}\| = C_G \ \& \ C_G^T \quad (1 \leq i; j \leq m),$$

где  $C_G^T$  – матрица, полученная из  $C_G$  транспонированием, то:

$$a) s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } a_i \text{ и } a_j \text{ взаимно достижимы;} \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

б) бинарное отношение  $P_G$ , определенное на множестве  $M$  по правилу:  
 $((a_i; a_j) \in P_G) \Leftrightarrow (s_{ij} = 1)$ ,

для любых  $a_i; a_j \in M$ , является отношением эквивалентности;

в) элементы классов эквивалентности фактор-множества  $M/P_G$  являются множествами вершин, порождающих компоненты сильной связности графа  $G$ .

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 **Дроботун, Б. Н.** Матричные методы в теории графов / Б. Н. Дроботун, С. Е. Умарбекова // Вестник ПГУ. Серия физико-математическая. – № 1. – 2016.
- 2 **Харари, Ф.** Теория графов. – М. : Мир, 1973.
- 3 **Судоплатов, С. В.** Элементы дискретной математики / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова // М. : ИНФРА – М ; Новосибирск : НТГУ, 2003.
- 4 **Дроботун, Б. Н.** Руководство к решению задач по дискретной математике и математической логике [Учебное пособие]. Часть I. Часть II. – Павлодар : Кереку, 2010.

Материал поступил в редакцию 06.01.16.

*Б. Н. Дроботун, С. Е. Умарбекова*

#### **Графтар теориясындағы матрицалық әдістер (II)**

С. Торайғыров атындағы  
 Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.  
 Материал 06.01.16 баспаға түсті.

*B. Drobotun, S. Umarbekova*

#### **The matrix methods in the graph theory (II)**

S. Toraihyrov Pavlodar State University, Pavlodar.  
 Material received on 06.01.16.

*Ұсынұлып отырған жұмыс (I) мақаланың тікелей жалғасы болып табылады. Мақалада жапсарлас матрицаларға байланысты алгоритмдер негізінде ақырлы графтардың «ішкі» құрылысының сандық сипаттамаларын нәтижелердің дәлделген түсініктемелері келтірілген.*

*In this work that is a direct continuation of the article (I) there are given the evidential justifications of the results on which the algorithms are based that allow to reveal quantitative characteristics of an «internal» structure of finite graphs with respect to the connectivity matrices.*

УДК 512.542

#### **И. И. Павлюк<sup>1</sup>, Ин. И. Павлюк<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>к.ф.-м.н., <sup>2</sup>к.ф.-м.н.

<sup>1</sup>Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар, Казахстан;

<sup>2</sup>Новосибирский государственный педагогический университет, г. Новосибирск, Россия

e-mail: <sup>1</sup>ivan.pavlyuk@mail.ru, <sup>2</sup>inessa7772@mail.ru

#### **О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА И ТЕОРЕМЕ ТОМПСОНА-ФЕЙТА**

*В работе установлено, что конечная группа нечетного порядка обладает нильпотентным нормальным делителем. Это обобщает результат Томпсона-Фейта.*

*Ключевые слова: центральная эквивалентность, модулятор относительно центральной сравнимости, класс центрально эквивалентных элементов, нильпотентная группа, конечная группа нечетного порядка.*

#### **ВВЕДЕНИЕ**

Основным результатом работы является теорема 17: конечная группа  $G$  без инволюций обладает нетривиальным нильпотентным нормальным делителем. Из этого результата легко следует известная в теории конечных групп теорема о разрешимости конечной группы нечетного порядка [1]. При конструировании фробениусовой пары  $(M, G)$  группы  $G$  необходима подгруппа  $M$  группы  $G$ . Для построения такой группы использовано понятие центральной сравнимости элементов группы [2] и доказано ряд результатов, связанных с центральной эквивалентностью и понятием модулятора. Далее модуляторный метод апробирован для описания конечных групп нечетного порядка. Обозначения в работе стандартные [2, 7]. Значения новых символов поясняются в тексте.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

*Определение 1.* [2] Пусть элементы  $a, b \in G$ , где  $G$  - группа. Элемент  $a$  центрально сравним с элементом  $b$  ( $a \equiv_1 b$ ) в группе  $G$ , если и только если  $(|C(b) : C(b) \cap C(a)| = 1) \stackrel{def}{\Leftrightarrow} (C(a) \equiv_1 C(b))$ . Таким образом, бинарное отношение « $\equiv_1$ » центральной сравнимости элемента  $a$  с элементом  $b$  аналитически задается формулой

$$(a, b \in G) \left( a \equiv_1 b \stackrel{def}{\Leftrightarrow} (C(a) \equiv_1 C(b)) \right), \quad (1)$$

где *def* означает – «по определению».

*Определение 2.* [2] Множество  $\equiv_1 M_G(a)$  элементов  $x$  группы  $G$ , удовлетворяющих сравнению  $x \equiv_1 a$  ( $a \in G$ ), назовем центральным модулятором элемента  $a$  в группе  $G$ , т.е. центральный модулятор элемента  $a$  в группе  $G$  аналитически задается формулой

$$\equiv_1 M_G(a) \stackrel{def}{=} \{x/x \equiv_1 a\}. \quad (2)$$

*Лемма 3.*  $\equiv_1 M_G(a)$  – подгруппа группы  $G$ .

*Доказательство.* Так как  $C(a) \leq G$ , то  $|C(a) : C(a) \cap G| = 1$ . Поскольку  $C(e) = G$ , то отсюда следует, что  $(e \equiv_1 a)$  и  $e \in \equiv_1 M_G(a)$ . Далее, очевидно, также, что  $(\forall g \in G)(C(g) \equiv_1 C(g^{-1}))$ . Отсюда следует, что  $(\forall h \in \equiv_1 M_G(a))(\forall h^{-1} \in \equiv_1 M_G(a))$ . Пусть теперь  $(x \equiv_1 a)$  и  $(y \equiv_1 a)$ . Докажем, что  $x \cdot y \equiv_1 a$ . Действительно, так как  $(C(x) \equiv_1 C(a))$  и  $(C(y) \equiv_1 C(a))$ , а  $(C(x) \cap C(y) \leq C(xy))$ , то очевидно, из сравнений  $(C(x) \equiv_1 C(a))$ ,  $(C(y) \equiv_1 C(a))$  следует, что  $(C(a) \leq (C(y) \cap C(x)) \leq C(xy))$ . Отсюда  $C(a) \leq C(xy)$  и  $|C(a) : C(a) \cap C(xy)| = 1$ . Таким образом,  $xy \in \equiv_1 M_G(a)$ .

Лемма доказана.

*Определение 4.* [2] Элементы  $a, b$  группы  $G$  центрально эквивалентны ( $a \equiv b$ ) в группе  $G$ , если и только если  $C(a) \equiv_1 C(b)$ , т.е. отношение « $\equiv$ » центральной эквивалентности элементов  $a$  и  $b$  в группе  $G$  аналитически задается формулой

$$(a, b \in G) \left( a \equiv b \stackrel{def}{\Leftrightarrow} (C(a) \equiv_1 C(b)) \& (C(b) \equiv_1 C(a)) \right). \quad (3)$$

*Лемма 5.* В группе  $G$  истинной является формула

$$(a, b \in G) \left( (a \equiv b) \Leftrightarrow (C(a) = C(b)) \Leftrightarrow (\equiv_1 M(a) = \equiv_1 M(b)) \right). \quad (4)$$

*Доказательство. Необходимость.* Так как  $a \equiv b$ , то  $C(a) \leq C(b)$  и  $C(b) \leq C(a)$ . Отсюда, очевидно,  $C(a) = C(b)$ . Теперь нетрудно видеть (см. определение 2), что  $\equiv_1 M(a) = \equiv_1 M(b)$ .

*Достаточность.* Пусть  $\equiv_1 M(a) = \equiv_1 M(b)$ . Тогда  $(\forall x \in \equiv_1 M(a))(x \equiv_1 b)$  и  $a \equiv_1 b$ . Аналогично  $(\forall y \in \equiv_1 M(b))(y \equiv_1 a)$ . Таким образом,  $b \equiv_1 a$ .

Сравнения  $a \equiv_1 b$  и  $b \equiv_1 a$  имплицируют эквивалентность  $a \equiv b$ . Если же  $C(b) = C(a)$ , то очевидно,  $\equiv_1 M(a) = \equiv_1 M(b)$  и  $a \equiv_1 b$ .

Лемма доказана.

*Лемма 6.* Бинарное отношение « $\equiv$ », заданное на элементах группы  $G$  является отношением эквивалентности.

*Доказательство* очевидно, следует и леммы 5.

Множество элементов группы  $G$  разбивается на непересекающиеся классы центрально эквивалентных элементов, и, очевидно, (формула (4)) центральный модулятор не зависит от представителя класса центральной эквивалентности (Корректность введенного понятия).

*Теорема 7.* Класс центрально эквивалентных элементов группы  $G$ , содержащий ее нейтральный элемент  $e$ , является нормальным делителем в  $G$ , совпадающим с центром  $Z(G)$  группы  $G$ .

*Доказательство.* Пусть  $\overset{1}{\equiv} a$  – класс центрально эквивалентных элементов группы  $G$  такой, что  $e \in \overset{1}{\equiv} a$ . Так как  $e \in \overset{1}{\equiv} a$ , то  $a \equiv_1 e$ ,  $C(a) = C(e) = G$  (формула (4)) и  $(\forall g \in G)(\equiv_1 M(a) \leq \equiv_1 M(g))$ . Очевидно, (лемма 6)  $a \in \equiv_1 M(a)$  и  $a \subseteq \equiv_1 M(a) \subseteq \equiv_1 M(g)$ . Нетрудно видеть, что в группе  $G$  истинной является следующая формула

$$((a \in G)(\forall g \in G) \left( \overset{1}{\equiv} a \leq \bigcap_{g \in G} \equiv_1 M(g) = Z \right)). \quad (5)$$

Нетрудно заметить, что  $Z$  – подгруппа  $G$  (лемма 3). Пусть  $x \in Z$ . Так как  $g$  – произвольный элемент группы  $G$ , то при  $g = e$  имеем  $Z \leq \equiv_1 M(e)$ . Далее, поскольку  $e \in \overset{1}{\equiv} a$ ,  $\overset{1}{\equiv} M(e) = \overset{1}{\equiv} M(a)$  (формула (4)), то  $(\forall x \in Z)(\overset{1}{\equiv} M(e) = \overset{1}{\equiv} M(a))$  ( $a \equiv_1 e \equiv_1 x$ ). Таким образом,  $(\forall x \in Z) \left( x \in \overset{1}{\equiv} a \right)$  и  $Z \leq \overset{1}{\equiv} a$ . По формуле (5)

$\overset{1}{\equiv} a \subseteq Z$ . Отсюда следует, что  $Z = \overset{1}{\equiv} a$ . Таким образом, установлено, что  $\overset{1}{\equiv} a$  – подгруппа группы  $G$ . Так как  $(\forall g \in G)(\equiv_1 M(e) \leq \equiv_1 M(g))$ , то

$Z \leq \equiv_1 M(e)$ . Далее, поскольку  $\overset{1}{\equiv} a \leq \equiv_1 M(e)$ , то  $\left( \forall a \in \overset{1}{\equiv} a \right) \left( |G : C(a)| = 1 \right)$ , а так как  $|C(a)| = |C(a^g)|$ , то отсюда следует, что

$$((a \in G)(\forall g \in G) \left( a^g \in \equiv_1 M(e) = \overset{1}{\equiv} a = \bigcap_{g \in G} \equiv_1 M(g) = Z = Z(G) \right)). \quad (6)$$

Теорема доказана.

Следствие 8. Для произвольной группы  $G$  истинной является формула

$$(\forall g \in G) \left( \bigcap_{g \in G} M(e) = Z(G) = \bigcap_{g \in G} M(g) = \bigcap_{g \in G} C(g) \right). \quad (7)$$

Доказательство следует из формулы (6).

Лемма 9. Элементы смежного класса группы  $G$  по ее центру  $Z(G)$  центрально эквивалентны, т.е.  $(\forall a, b \in G)(aZ(G) = bZ(G) \Rightarrow (a \equiv b))$ .

Доказательство. Пусть  $aZ(G) = bZ(G)$ . Тогда  $a^{-1}b \in Z(G)$ . Так как  $(\forall g \in G)(Z(G) \leq M(g))$ , то  $a^{-1}b \in M(a)$ . Поскольку  $M(a)$  – подгруппа  $G$  (лемма 3), то  $b \in M(a)$  и  $b \equiv a$ . Аналогично,  $a^{-1}b \in M(b)$  и  $a \in M(b)$ ,  $a \equiv b$ . Из двух сравнений  $b \equiv a$  и  $a \equiv b$  следует, что  $a \equiv b$  (формула (3)), т.е. элементы одного смежного класса группы  $G$  по ее центру центрально эквивалентны.

Лемма доказана.

Лемма 10. Пусть  $G$  – группа,  $M$  – подмножество  $G$ . Тогда в группе  $G$  истинной является формула  $(\forall g \in G)(N(M^g) = (N(M))^g)$ .

Доказательство. Пусть элемент  $n \in N(M)$ . Тогда  $(\forall x \in G)(M^{nx} = M^x)$ . Далее, пусть  $m \in N(M^x)$ . Из равенств  $M^{nx} = M^x$ ,  $M^{xm} = M^x$  следует равенство  $M^{nx} = M^{xm}$  или  $M = M^n = M^{xmx^{-1}}$ . Отсюда следует, что элемент  $xmx^{-1} \in N(M)$  или  $m \in (N(M))^x$ . Таким образом,  $(\forall x \in G)(N(M^x) \leq (N(M))^x)$

Пусть теперь  $m \in N(M^x)$ . Очевидно,  $xmx^{-1} \in N(M)$ . Отсюда выводятся равенства  $M^{xmx^{-1}} = M$ ,  $M^{xm} = (M^x)^m = M^x$ . Теперь легко видеть, что  $m \in N(M^x)$ . Таким образом,  $(\forall x \in G)(N(M^x) \leq (N(M))^x)$ , а вместе с этим верна формула  $(\forall g \in G)(N(M^g) = (N(M))^g)$ .

Лемма доказана.

Отсюда легко следует известный результат.

Следствие 11. Пусть  $G$  – группа. Тогда истинна формула  $(\forall g \in G)(\forall a \in G)(C(a^g) = (C(a))^g)$ .

Доказательство, очевидно, следует из леммы 10 при  $M = \{a\}$ .

Лемма 12. Пусть  $a$  – класс центрально эквивалентных элементов группы  $G$ ,  $Z(C(a))$  – центр централизатора  $C(a)$ ,  $M(a)$  – модулятор элемента  $a$ . Тогда  $Z(C(a)) = M(a)$ .

Доказательство. Пусть  $M(a) = \{x / x \equiv a\}$ . Так как  $|C(a) : C(a) \cap C(x)| = 1$  и  $C(a) \cap C(x) \neq e$ , то  $C(a) \leq C(x)$  и  $x \in Z(C(a))$ . Таким образом,  $(\forall x \in M(a))(\forall x \in Z(C(a)))$  и  $M(a) \leq Z(C(a))$ . Пусть теперь  $y \in Z(C(a))$ . Отсюда следует,  $C(a) \leq C(y)$ ,  $y \equiv a$  и  $y \in M(a)$ . Таким образом,  $Z(C(a)) \leq M(a)$ . Теперь очевидно, что  $M(a) = Z(C(a))$ .

Лемма доказана.

Лемма 13. Пусть  $G$  – группа,  $M$  – подмножество из  $G$ . Тогда

$$(\forall g \in G)(\forall M \subseteq G) \left( \bigcap_{m \in M} (C(m))^g = \left( \bigcap_{m \in M} C(m) \right)^g \right). \quad (8)$$

Доказательство. Пусть элемент  $c \in \bigcap_{m \in M} C(m)$ . Очевидно,  $(\forall g \in G)(c^g \in \bigcap_{m \in M} C(m)^g)$ . Так как  $c \in \bigcap_{m \in M} C(m)$ , то  $c^g \in \left( \bigcap_{m \in M} C(m) \right)^g$ . Отсюда

следует, что  $\bigcap_{m \in M} (C(m))^g \leq \left( \bigcap_{m \in M} C(m) \right)^g$ . Пусть теперь  $c^g \in \left( \bigcap_{m \in M} C(m) \right)^g$ . Тогда, поскольку  $c \in \bigcap_{m \in M} C(m)$ , то  $(\forall m \in M)(\forall c \in C(m))$  и  $c^g \in (C(m))^g$ . Отсюда следует, что  $c^g \in \bigcap_{m \in M} (C(m))^g$  и  $\left( \bigcap_{m \in M} C(m) \right)^g \leq \bigcap_{m \in M} (C(m))^g$ . Окончательно,

$$\bigcap_{m \in M} (C(m))^g = \left( \bigcap_{m \in M} C(m) \right)^g.$$

Лемма доказана.

Теорема 14. Пусть  $G$  – группа. Тогда

$$(\forall g \in G)(\forall M \subseteq G)(C(M)^g = C(M^g)). \quad (9)$$

Доказательство. Так как  $(\forall g \in G)(\forall m \in M)(C(m)^g = C(m^g))$  (следствие 11) и  $C(M) = \bigcap_{m \in M} C(m)$ , то  $\bigcap_{m \in M} (C(m))^g = C(M^g)$ , но

$$(\forall g \in G)(\forall m \in G)(C(m^g) = (C(m))^g).$$

Следовательно,  $\bigcap_{m^g \in M^g} C(m^g) = \bigcap_{m \in M} (C(m))^g$ , а  $\bigcap_{m \in M} (C(m))^g = \left( \bigcap_{m \in M} C(m) \right)^g$

(формула (8)). Отсюда  $\left( \bigcap_{m \in M} C(m) \right)^g = (C(M))^g$ . Таким образом,  $(C(M))^g = C(M^g)$ .

Теорема доказана.

Лемма 15. Пусть  $G$  – группа. Тогда

$$(\forall a, g \in G)(\bigcap_{a \in M(a)^g} M(a^g))$$

Доказательство. По теореме 14  $(\forall g \in G)(C(C(a))^g = (C(C(m)))^g)$ . Так как  $C(C(a)) = Z(C(a))$ , а  $Z(C(a)) = M(a)$  (теорема 10), то  $(C(C(a)))^g = \left( \bigcap_{a \in M(a)} M(a) \right)^g$ .

Поскольку  $(C(a))^g = C(a^g)$  (следствие 11), то

$$C(C(a))^g = C(C(a^g)) = Z(C(a^g)) = \bigcap_{a \in M(a^g)} M(a^g).$$

Таким образом,  $\left( \bigcap_{a \in M(a)} M(a) \right)^g = \bigcap_{a \in M(a^g)} M(a^g)$ .

Лемма доказана.

*Лемма 16.* В группе  $G$  без центра ( $Z(G) = e$ ) истинной является формула  $(\forall g, x, a \in G) \left( \left( \bigcap_{i=1}^g M(a) \right)^x \neq \left( \bigcap_{i=1}^g M(a) \right)^x \right) \Leftrightarrow \left( \left( \bigcap_{i=1}^g M(a) \right)^x \cap \left( \bigcap_{i=1}^g M(a) \right)^g = e \right)$ .

*Доказательство.* Необходимость. Пусть  $\left( \bigcap_{i=1}^g M(a) \right)^g \neq \left( \bigcap_{i=1}^g M(a) \right)^x$ .

Предположим, что  $\left( \bigcap_{i=1}^g M(a) \right)^x \cap \left( \bigcap_{i=1}^g M(a) \right)^g \neq e$ . Тогда  $\left( \exists z \in \left( \bigcap_{i=1}^g M(a) \right)^x \cap \left( \bigcap_{i=1}^g M(a) \right)^g \setminus Z(G) \right)$ . Так как  $\left( \bigcap_{i=1}^g M(a) \right)^g = \left( \bigcap_{i=1}^g M(a^g) \right)$  (лемма 15), то  $z \in \bigcap_{i=1}^g M(a^x)$  и  $z_1 \equiv a^x, z_1 \equiv a^g$  (формула 8). Отсюда теперь  $a^x \equiv a^g$  и  $M(a^x) = M(a^g)$  (формула (4)). По лемме 15  $\left( \bigcap_{i=1}^g M(a) \right)^x = \left( \bigcap_{i=1}^g M(a) \right)^g$ . Противоречие.

Достаточность теоремы доказывается контрпозиционным допущением, приводящим к противоречию.

Лемма доказана.

*Теорема 17.* Конечная группа  $G$  нечетного порядка обладает нетривиальным нильпотентным нормальным делителем.

*Доказательство.* Пусть  $G$  произвольная группа и  $G$  обладает элементом  $a \in G \setminus e$ . Отсюда, очевидно, (так как  $a \in \bigcap_{i=1}^g M(a)$ ) модулятор  $\bigcap_{i=1}^g M(a) = M \neq \{e\}$ . Предположим, что группа  $G$  удовлетворяет условию доказываемой теоремы, но не содержит нетривиального нильпотентного нормального делителя. Абелевы и конечные  $\delta$ -группы, тем самым, исключаются из рассмотрения. Сначала, предположим, что  $(\forall g \in G) \left( M^g = M = \bigcap_{i=1}^g M(a) \right)$ . Тогда  $N(M) = G$ . Так как  $M$  – нильпотентная группа (лемма 12) и  $M$  – нормальна в  $G$ , то наше предположение  $(M^g = M)$  ведет к противоречию. Далее, так как группа  $G$  конечна, то в ней каждый класс сопряженных элементов конечен. Отсюда и следствия 11  $(\forall g \in G) \left( \forall a \in G \right) \left( C(a^g) = (C(a))^g \right)$  вытекает, что в группе лишь конечное множество подгрупп  $(C(a))^g$  сопряженных с  $C(a)$ . Так как  $M \leq C(a)$  (лемма 12), то лишь конечное множество подгрупп таких, что  $M^g \leq (C(a))^g$ . Пусть  $M^{g_1}, M^{g_2}, \dots, M^{g_n}$  и  $M^{g_i} \neq M^{g_j}$  при  $i \neq j, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Так как  $G$  не содержит нильпотентных нормальных делителей, то  $Z(G) = e$ . По лемме 16  $\bigcap_{i=1}^n M^{g_i} = e$ . Очевидно  $(\forall g \in G \setminus N(M) = M) \left( M^g \cap M = e \right)$  и  $(G, M)$ - пара Фробениуса [4]. По теореме Фробениуса [3]  $G = F\lambda M$ . Так как группа  $G$  неабелева, а  $M$  – абелева, то  $F \neq e$ . По результату Томпсона [3, 5] инвариантный множитель  $F$  группы Фробениуса нильпотентная группа. Далее, так как  $F \triangleleft G$  и  $F \neq e$ , то мы пришли к противоречию. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема доказана.

### ВЫВОДЫ

Для произвольных групп теорема 17 не выполняется, так как существуют примеры простых групп.

Из полученной теоремы легко вывести следующий известный результат.  
*Следствие 18.* Конечная группа нечетного порядка не проста.

*Следствие 19.* Конечная группа нечетного порядка обладает абелевым нормальным делителем.

*Следствие 20.* Конечная группа нечетного порядка разрешима.

Примером группы Фробениуса нечетного порядка с нильпотентным неабелевым нормальным делителем может служить группа  $G$  порядка  $1029 = 3 \cdot 7^3$  с некоммутативным нильпотентным нормальным делителем порядка  $7^3 = 343$ , которая задается определяющими соотношениями:  $g^7 = r^7 = e; [g, r] = a; gb = g^2a; rb = br^2; rb = ba^4; rg = gra; ag = ga; ar = ra$ .

Подгруппа  $B = zp(b)$  третьего порядка совпадает со своим нормализатором в  $G$  и взаимно проста со всеми своими сопряженными подгруппами, составляя вместе с ними класс из 343 подгрупп. Очевидно, центральный модулятор  $\bigcap_{i=1}^g M(b)$  элемента  $b \in G$  равен  $C(b)$  и является абелевой подгруппой, т.е.  $C(b) = Z(C(b)) = \bigcap_{i=1}^g M(b)$ . В группе  $G$  существует 342 элемента порядка 7, которые вместе с нейтральным элементом  $e$  составляют нормальный делитель  $N$  порядка 343. Очевидно, нормальный делитель  $N$  порождается элементами  $g, r$  и элемент  $a \in N$ . При преобразовании группы  $G$  элементами из  $N \setminus e$  все подгруппы сопряженные с подгруппой  $B$  перемещаются между собой. Нормальный делитель  $N$  – нильпотентная неабелева группа. Подгруппа  $A$  группы  $G$  порядка  $21 = 3 \cdot 7$ :

$$A = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, b, b^2, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b, ab^2, a^2b^2, a^3b^2, a^4b^2, a^5b^2, a^6b^2\}$$

с генетическим кодом:  $a^7 = b^3 = e, ba = a^4b$ ; имеет централизаторы элементов:

$$\begin{aligned} C(e) &= A, \\ C(a) &= C(a^2) = C(a^3) = C(a^4) = C(a^5) = C(a^6) = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6\}; \\ C(b) &= C(b^2) = \{e, b, b^2\}; \\ C(ab) &= C(a^5b^2) = \{e, ab, a^5b^2\}; \\ C(a^2b) &= (a^3b^2) = \{e, a^2b, a^3b^2\}; \\ C(a^3b) &= C(ab^2) = \{e, a^3b, ab^2\}; \\ C(a^4b) &= C(a^6b^2) = \{e, a^4b, a^6b^2\}; \\ C(a^5b) &= C(a^4b^2) = \{e, a^5b, a^4b^2\}; \\ C(a^6b) &= C(a^2b^2) = \{e, a^6b, a^2b^2\}. \end{aligned}$$

Отсюда легко вычислить число классов сопряженных элементов группы

$$A \text{ по формуле } c \equiv (A) = \sum_{a \in A} \frac{|C(a)|}{|A|} = 5 :$$

$$e^{\equiv} = \{e\};$$

$$a^{\equiv} = \{a, a^2, a^4\};$$

$$a^3 \equiv \{a^3, a^5, a^6\};$$

$$b^{\equiv} = \{b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b\};$$

$$b^2 \equiv \{b^2, ab^2, a^2b^2, a^3b^2, a^4b^2, a^5b^2, a^6b^2\}.$$

Классы сопряженных элементов вычисляются по (нашей) таблице сопряжения элементов конечной группы  $A$ . Центральные модуляторы элементов:  $b; a^5b; a^2b; a^3b; a^4b; a^6b$  сопряжены, т.е.

$${}_1 \equiv M(b) \equiv {}_1 \equiv M(a^5b) = {}_c \equiv {}_1 \equiv M(a^2b) = {}_c \equiv {}_1 \equiv M(a^3b) =$$

$${}_c \equiv {}_1 \equiv M(a^4b) = {}_c \equiv {}_1 \equiv M(a^5b) = {}_c \equiv {}_1 \equiv M(a^6b)$$

и  $\bigcap_{g \in b^{\equiv}} {}_1 \equiv M(g) = \{e\}$ . Здесь нормальным делителем группы  $A$  является

$C(a) = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6\}$  – абелева группа, причем  $C(a) = A'$ , где  $A'$  коммутант группы  $A$ . Таким образом,  $A$  – нильпотентная группа.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 **Feit, W. and Thompson, G.** Solvability of odd order // Pac. Jour. Math. 13 – № 3. – 1963. – P. 775-1029.

2 **Павлюк, Ин. И.** Отношение центральной сравнимости в теории групп // Доклады АН РТ. – 2009. – Т. 52(8). – С. 593-597.

3 **Бусаркин, В. М.** Конечные рашепляемые группы / В. М. Бусаркин, Ю. М. Гончаков // М. : Наука, 1968. – 112 с.

4 **Шунков, В. П.**  $M_p$ -группы // М. : Наука, 1990. – 160 с.

5 **Thompson, J. G.** Finite groups with fixed point – free automorphisms of prime order // Proc. Nat. Amer. Sci. U.S.A. – 1959. – V. 45. – P. 578-581.

6 **Thompson, J. G.** Normal p-complements for finite groups // Math. Z. – 1960. – V. 72. – P. 332-354.

7 **Каргаполов, М. И.** Основы теории групп / М. И. Каргаполов, Ю. М. Мерзляков // М. : Наука, 1982. – 288 с.

Материал поступил в редакцию 06.01.16.

*И. И. Павлюк<sup>1</sup>, Ин. И. Павлюк<sup>2</sup>*

**Тақ ретті шекті топтар және Томпсон-Фейт теоремасы туралы**

<sup>1</sup>С. Торайғыров атындағы

Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ., Қазақстан;

<sup>2</sup>Новосібір мемлекеттік педагогикалық университеті,

Новосібір қ., Ресей.

Материал 06.01.16 баспаға түсті.

*I. Pavlyuk<sup>1</sup>, In. Pavlyuk<sup>2</sup>*

**On the odd-order finite groups and the Thomson-Feit theorem**

<sup>1</sup>S. Toraihyrov Pavlodar State University, Pavlodar, Kazakhstan;

<sup>2</sup>Novosibirsk State Pedagogical University, Novosibirsk, Russia.

Material received on 06.01.16.

*Жұмыста тақ ретті шекті топтың нильпотентті нормаль бөлгіші бар екендігі қарастырылды. Бұл Томпсон-Фейттің нәтижесін жалпылайды.*

*In this work it is established that an odd-order finite group possesses a nilpotent normal divisor. It generalizes one of the results of Thomson-Feit.*

Секция  
«ФИЗИКА»

UDC 538.945

**A. P. Dioguardi<sup>1</sup>, T. Kissikov<sup>1\*</sup>, C. H. Lin<sup>1</sup>, K. R. Shirer<sup>1</sup>,  
M. M. Lawson<sup>1</sup>, H.-J. Grafe<sup>2</sup>, J.-H. Chu<sup>3, 4</sup>, I. R. Fisher<sup>3, 4</sup>,  
R. M. Fernandes<sup>5</sup>, N. J. Curro<sup>1</sup>, N. A. Ispulov<sup>6</sup>, M. K. Zhukonov<sup>6</sup>**

<sup>1</sup>PhD, University of California, Davis, USA

<sup>1\*</sup>PhD student, University of California, Davis, USA

<sup>2</sup>PhD, IFW Dresden, Institute for Solid State Research, P.O. Box Dresden, Germany

<sup>3</sup>PhD, Stanford University, Stanford, California, USA

<sup>4</sup>PhD, Stanford Institute of Energy and Materials Science, California, USA

<sup>5</sup>PhD, University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota, USA

<sup>6</sup>phys.-math.sc.candidate, S. Toraighyrov Pavlodar State University, Kazakhstan

e-mail: <sup>6</sup>nurlybek\_79@mail.ru

## **NMR EVIDENCE FOR INHOMOGENEOUS NEMATIC FLUCTUATIONS IN $\text{BaFe}_2(\text{As}_{1-x}\text{P}_x)_2$**

*We present evidence for nuclear spin-lattice relaxation driven by glassy nematic fluctuations in isovalent P-doped  $\text{BaFe}_2\text{As}_2$  single crystals. Both the  $^{75}\text{As}$  and  $^{31}\text{P}$  sites exhibit stretched-exponential relaxation similar to the electron-doped systems. By comparing the hyperfine fields and the relaxation rates at these sites we find that the As relaxation cannot be explained solely in terms of magnetic spin fluctuations. We demonstrate that nematic fluctuations couple to the As nuclear quadrupolar moment and can explain the excess relaxation. These results suggest that glassy nematic dynamics are a universal phenomenon in the iron-based superconductors.*

*Keywords: inhomogeneous, nematic, fluctuation, spin-lattice relaxation, superconductors, magnetic, spectroscopy, hyperfine coupling.*

### INTRODUCTION

The iron-based superconductors continue to attract broad interest not only because of the presence of unconventional high-temperature superconductivity, but also because of their unusual normal state behavior [1]. As in other

unconventional superconductors the superconductivity emerges at the boundary of antiferromagnetism, suggesting an important role for antiferromagnetic fluctuations in the superconducting pairing mechanism [2, 3]. In recent years, however, significant attention has focused on the presence of nematic order that breaks the  $C_4$  point group symmetry of the lattice at the tetragonal to orthorhombic structural transition, as well as the large nematic susceptibility in the tetragonal paramagnetic regime [4-8]. Elastoresistance measurements indicate that the static nematic susceptibility diverges near optimal doping in several pnictide families [9, 10]. Similar conclusions are drawn from both elastic constant measurements [11] and Raman spectroscopy [12-14]. An open question, therefore, is whether there is a connection between the nematic fluctuations and the unconventional superconductivity in these materials [6, 15, 16].

### MAIN PART

Experimentally the nematic fluctuations appear to be strongly coupled to the spin degrees of freedom. The shear modulus and the nuclear spin-lattice relaxation rate,  $T_1^{-1}$ , are strongly temperature and doping dependent, but scale with one another in Co- and K-doped  $\text{BaFe}_2\text{As}_2$  [17, 18]. Assuming that the dominant channel for  $T_1^{-1}$  is via the hyperfine coupling to the Fe spins, this empirical relationship implies that the lattice and spin fluctuations have a common origin. Further evidence for a coupling between these order parameters has emerged from neutron scattering studies which reveal that  $C_4$  symmetry is broken for the spin fluctuations in the high-temperature phase of uniaxial-strained  $\text{Ba}(\text{Fe}_{1-x}\text{Ni}_x)_2\text{As}_2$  [19]. Other neutron scattering experiments have uncovered an enhancement of spin fluctuations in both  $\text{LaFeAsO}$  and  $\text{Ba}(\text{Fe}_{1-x}\text{Co}_x)_2\text{As}_2$  between the structural transition and antiferromagnetic transition temperatures [20]. In contrast, the iron chalcogenide  $\text{FeSe}$  undergoes a nematic phase transition despite the absence of long-range magnetic order down to the lowest temperatures. Although nuclear magnetic resonance (NMR) measurements do not observe significant low-energy magnetic fluctuations above the nematic transition [21, 22], neutron scattering indicates the presence of sizable spin fluctuations at moderate energies [23, 24].

Direct evidence for the nematic fluctuations has remained elusive. NMR studies of  $\text{Ba}(\text{Fe}_{1-x}\text{M}_x)_2\text{As}_2$  ( $M = \text{Co}, \text{Cu}$ ) uncovered the presence of glassy spin dynamics extending up to 100 K, with a doping and temperature response that matches that of the nematic susceptibility [25, 26]. The glassy behavior possibly originates from quenched disorder, which can act as a random local field on the fluctuating nematic order [10, 27]. In such a case, magnetoelastic coupling ensures that random variations in the local value of the nematic order parameter also affects the local spin fluctuations measured by NMR [17].

In order to investigate the presence of nematic fluctuations directly, we have investigated the NMR properties of both the  $^{75}\text{As}$  ( $^{75}\gamma = 7.2919 \text{ MHz/T}$ , I

$= 3/2$ ,  $Q = 0.31$  barns) and  $^{31}\text{P}$  ( $^{31}\gamma = 17.2356$  MHz/T,  $I = 1/2$ ) in single crystals of  $\text{BaFe}_2(\text{As}_{1-x}\text{P}_x)_2$ . Isovalent substitution of P for As in  $\text{BaFe}_2\text{As}_2$  gives rise to superconductivity with a phase diagram that is similar to that of the electron- or hole-doped system [28, 29]. These nuclei present a unique opportunity because they are located at the same crystallographic site, but the  $I = 3/2$   $^{75}\text{As}$  nucleus experiences a quadrupolar inter-action whereas the  $I = 1/2$   $^{31}\text{P}$  nucleus does not. Both nuclei are sensitive to magnetic hyperfine fluctuations of the Fe spins, however the As is also sensitive to fluctuations of the local electric field gradient (EFG). Nematic fluctuations couple directly to

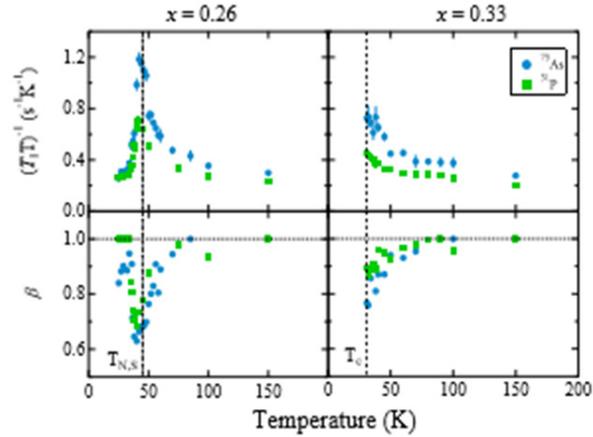


Figure 1 –  $(T_1T)^{-1}$  and  $\beta$  for  $^{75}\text{As}$  (•) and  $^{31}\text{P}$  (◻) vs. temperature for  $x = 0.26$  (underdoped) and  $x = 0.33$  (optimal doping).

EFG and give rise to an extra channel for relaxation at the As. We carefully analyze the relaxation of both nuclei, and conclude that quadrupolar fluctuations are indeed contributing to the relaxation of the As, giving rise to a maximum in the ratio  $^{75}T_1^{-1} / ^{31}T_1^{-1}$  at the structural transition temperature,  $T_s$ . We also observe inhomogeneous dynamics that result in stretched exponential spin-lattice relaxation for both nuclear species. The amount of dynamical inhomogeneity is similar to previous NMR observations in both Co- and Cu-doped  $\text{BaFe}_2\text{As}_2$  [25, 26] and  $\text{LaFeAsO}$  [30, 31] compounds.

Single crystals were synthesized via a self-flux method and characterized via transport measurements to determine P-doping levels. The P concentration  $x$  was estimated by comparison of transport properties with samples from the same and similar growth batches for which the composition had been determined via microprobe analysis [32]. The spin-lattice relaxation rates of  $^{75}\text{As}$  and  $^{31}\text{P}$  were measured at the central transition ( $I_z = \pm 1/2$ ) in two  $\text{BaFe}_2(\text{As}_{1-x}\text{P}_x)_2$  crystals with

$x = 0.26$  (underdoped,  $T_s = T_N = 45$  K) and  $x = 0.33$  (optimally doped,  $T_c = 31$  K) as a function of temperature via a standard inversion recovery pulse sequence. The crystals were aligned with the external field  $H_0 = 11.7285$  T oriented perpendicular to the c-axis, and the magnetization recovery was fit to the appropriate normal modes recovery function modified by a stretching exponent  $\beta$ , as described in [25].

The spin-lattice relaxation rate divided by temperature  $(T_1T)^{-1}$  is shown in Fig. 1 as a function of temperature for both nuclei. At high temperatures  $(T_1T)^{-1}$  is roughly constant, indicating metallic Korringa behavior. In the underdoped crystal  $(T_1T)^{-1}$  goes through a peak at  $T_N$  reflecting critical slowing down of the spin fluctuations. In the optimally doped crystal  $(T_1T)^{-1}$  continues to increase down to  $T_c$ . These results are consistent with previously published data in polycrystalline samples [28, 29]. The relaxation rates of the two nuclei scale roughly with one another, but there are important differences that emerge at low temperature, as discussed below.

The stretching exponent,  $\beta$ , shown in Fig. 1, is a measure of the degree of dynamical inhomogeneity in the material [25, 26].  $\beta = 1$  indicates homogeneous relaxation whereas  $\beta < 1$  indicates a distribution of local relaxation rates [33]. Both crystals and both sites become dynamically inhomogeneous below  $\sim 100$  K, reaching down to  $\beta = 0.6$  for the underdoped sample. Similar behavior was observed in other iron pnictides [30, 31]. Surprisingly, the degree of inhomogeneity does not appear to be reduced in the P-doped system as compared to the Co-doped system, despite the fact that the former is cleaner than the latter (comparisons of  $\beta$  in  $\text{BaFe}_2(\text{As}_{1-x}\text{P}_x)_2$  and  $\text{BaFe}_{2-x}\text{Co}_x\text{As}_2$  are available in the supplemental material).

We now turn to the relationship between the As and the P relaxation rates. Fig. 2(a) shows  $^{75}T_1^{-1} / ^{31}T_1^{-1}$  as a function of temperature. This ratio is nearly constant and  $\sim 1.3$  above approximately 60 K, indicating a common relaxation mechanism for both sites. However, below this temperature the ratio increases with decreasing temperature and reaches a maximum value of  $\sim 2$  in both the underdoped and optimally doped crystals. The strong temperature dependence of this ratio reflects either a change in the antiferromagnetic fluctuations, or an additional relaxation mechanism present at the As site.

Spin fluctuations give rise to dynamical hyperfine fields causing nuclear spin relaxation. In order to properly extract the contribution of antiferromagnetic fluctuations to the relaxation rate, it is crucial to know the components of the hyperfine tensor,  $B$ , at both the As and the P. The hyperfine interaction is given by  $H_{\text{hyp}} = \sum_{\text{icnn}} \hat{I} \cdot B \cdot S(r_i)$ , where  $S(r_i)$  is the electronic spin of the Fe, and  $\hat{I}$  is the nuclear spin of either the  $^{31}\text{P}$  or  $^{75}\text{As}$  [34]. By comparing the Knight shift and magnetic susceptibility, Kitagawa et al. found  $^{75}B_{aa} = ^{75}B_{bb} = 0.66$  T/ $\mu\text{B}$ , and  $^{75}B_{cc} = 0.47$  T/ $\mu\text{B}$  [34]. In  $\text{BaFe}_2(\text{As}_{1-x}\text{P}_x)_2$ , our measurements of the Knight shift (see supplemental material) indicate that  $^{31}B_{aa} / ^{75}B_{aa} = 0.40 \pm 0.02$  in agreement with a previous study [29].

It is also important to consider the off-diagonal component  $B_{ac}$ , which gives rise to the internal field at the antiferromagnetic wavevector. Previous measurements revealed that  ${}^{75}B_{ac} = 0.43 \text{ T}/\mu\text{B}$  [34]. To determine this component in  $\text{BaFe}_2(\text{As}_{1-x}\text{P}_x)_2$  we measured the angular dependence of the magnetic splitting of the central line in the antiferromagnetic phase of the underdoped sample. Fig. 3 shows spectra of both the As and the P for various orientations of the crystal. The internal field,  $H_{\text{int}}$ , is oriented along  $\pm\hat{c}$ -axis, giving rise to two separate resonances. The P resonances are given by:  ${}^{31}f = {}^{31}\gamma(1 + K)(H_0 \pm H_{\text{int}} \cos \theta)$ , where  $K$  is the Knight shift and  $\theta$  is the angle between  $\hat{c}$  and  $H_0$ . For the As, there is an additional shift due to the quadrupolar interaction:  ${}^{75}f = {}^{75}\gamma(1 + K)(H_0 \pm H_{\text{int}} \cos \theta) + \Delta_Q(1 - 9 \cos^2 \theta)(1 - \cos^2 \theta)$ , where  $\Delta_Q = \frac{3}{64}e^2Q^2V_{zz}^2/{}^{75}H_0$ ,  $Q$  is the quadrupolar moment and  $V_{zz}$  is the component of the EFG tensor at the As [35]. Fitting the angular dependent spectra, we extract internal fields  ${}^{75}H_{\text{int}} = 0.45 \pm 0.01 \text{ T}$  and  ${}^{31}H_{\text{int}} = 0.100 \pm 0.001 \text{ T}$ , yielding  ${}^{31}B_{ac}/{}^{75}B_{ac} = 0.226 \pm 0.007$ . It is noteworthy that the transferred hyperfine couplings to the P are less than those to the As, which probably reflect the fact that the 4p orbitals at the As are more extended. Previous studies of the hyperfine couplings at the As and P sites in other compounds have found a similar ratio [36].

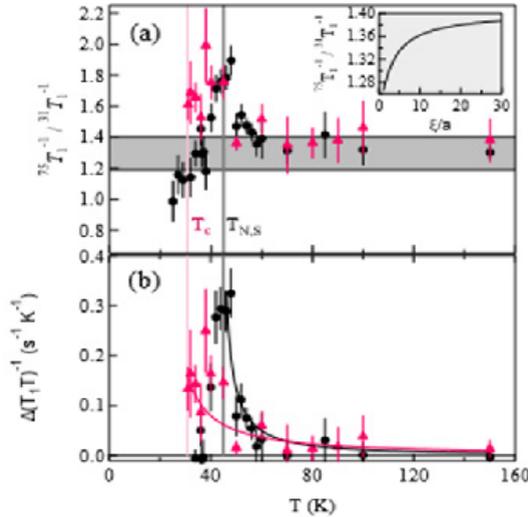


Figure 2 – (a) Ratio of the spin lattice relaxation rates of As to P ( ${}^{75}T_1^{-1}/{}^{31}T_1^{-1}$ ) and (b)  $\Delta(T_1 T)^{-1}$  vs. temperature for  $x = 0.26$  (●) and  $x = 0.33$  (▲). The gray horizontal region indicates the range of values for purely magnetic fluctuations. INSET: The theoretical ratio as a function of the antiferromagnetic correlation length,  $\xi$ . Solid lines in (b) are best fits as discussed in the text.

With the knowledge of the hyperfine couplings, it is now possible to compute the magnetic component of the spin-lattice relaxation rate:

$$W_0 = \gamma^2 k_B T \lim_{\omega \rightarrow 0} \sum_{q, \alpha, \beta} F_{\alpha\beta}(q) \frac{\text{Im} \chi_m^{\alpha\beta}(q, \omega)}{\hbar \omega}, \quad (1)$$

where  $F_{\alpha\beta}(q)$  are the form factors (given in the Supplemental Material),  $\chi_m^{\alpha\beta}(q, \omega)$  is the dynamical magnetic susceptibility, and  $\alpha, \beta = \{a, b, c\}$  [37]. For purely magnetic fluctuations,  $T_1^{-1} = 2W_0$ . Because the hyperfine coupling ratios  ${}^{31}B_{aa}/{}^{75}B_{aa}$  and  ${}^{31}B_{ac}/{}^{75}B_{ac}$  are not the same, the form factors  $F_{\alpha\beta}(q)$  for the two sites do not simply scale with one another. As a result, the ratio  ${}^{75}T_1^{-1}/{}^{31}T_1^{-1}$  will depend of the detailed  $q$ -dependence of  $\chi_m^{\alpha\beta}(q, \omega)$ , which can change with temperature. To estimate the effect of antiferromagnetic correlations on the  $T_1^{-1}$  ratio, we use Eq. 1 and the dynamical magnetic susceptibility:

$$\chi_m^{\alpha\alpha}(q, \omega) = \sum_{j=1,2} \frac{\chi_{\alpha\alpha}(Q_j)}{1 + |q - Q_j|^2 \xi^2 - i\omega/i\omega_{sf}}, \quad (2)$$

where  $\xi$  is the antiferromagnetic correlation length,  $\omega_{sf}$  is the characteristic spin fluctuation frequency, and  $\chi_{\alpha\alpha}(Q_j)$  is the value of the susceptibility at the ordering wavevectors  $Q_1 = \{\pi/a, 0\}$  and  $Q_2 = \{0, \pi/a\}$  [19, 38]. The inset of Fig. 2 (a) shows the calculated  $T_1^{-1}$  ratio as a function of correlation length, with the following assumptions: (i)  ${}^{31}B_{cc}/{}^{75}B_{cc} = {}^{31}B_{aa}/{}^{75}B_{aa}$ , (ii)  $B_{ab}$  is negligible, and (iii)  $\chi_{\alpha\alpha}(Q_j)$  is the same for all values of  $i$  and  $\alpha$  (isotropic fluctuations). This quantity changes only slightly with  $\xi$ , varying between 1.19 ( $\xi = 0$ ) to 1.40 ( $\xi = \infty$ ), as shown by the gray area in Fig. 2 (a). For the underdoped sample, the experimental ratio exceeds this prediction below the structural transition, reaching up to  $\sim 2$  at  $T_N$ . The experimental ratio for the optimally doped sample reaches the same value just above  $T_c$ . It is clear that magnetic fluctuations alone cannot explain this large increase, suggesting that there is an additional relaxation channel affecting the As site.

Since the  ${}^{75}\text{As}$  has spin  $I = 3/2$  it is susceptible to relaxation by fluctuations of the EFG through the quadrupolar coupling. Quadrupolar spin-lattice relaxation of nuclear spins with  $I > \frac{1}{2}$  is described by the Hamiltonian:

$$H_Q(t) = \frac{eQ}{4I(2I-1)} \sum_{k=-2}^2 V_k(t) \hat{T}_{2k}, \quad (3)$$

where  $\hat{T}_{2k}$  are the spherical tensor operators,  $V_0 = V_{zz}$ ,  $V_{\pm 1} = V_{zx} \pm iV_{zy}$ ,  $V_{\pm 2} = \frac{1}{2}(V_{xx} - V_{yy}) \pm iV_{xy}$ , and  $V_{\alpha\beta}$  are the components of the EFG tensor [35]. The simultaneous presence of both magnetic and quadrupolar fluctuations has been discussed in detail by Suter, who has shown that these fluctuations give rise to three relaxation channels for the nuclear spins, one purely magnetic and two

quadrupolar [39]. The magnetic relaxation channel is described by Eq. 1, and the

quadrupolar relaxation rates are given by:  $W_{1,2} = \left(\frac{eQ}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \langle V_{+1,2}(\tau) V_{-1,2}(0) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau$ .

There are two components to the EFG at the As, one from the lattice orthorhombic distortion and the other from unequal populations of the As  $4p_{x,y}$  orbitals, such that  $V_{\pm 1} = 0$  and  $V_{\pm 2} = V_{\pm 2}^{\text{lat}} + V_{\pm 2}^{\text{4p}}$  [40]. From the definition, we see that  $(V_{+2} + V_{-2})$  has  $B_2g$  symmetry, whereas  $i(V_{+2} - V_{-2})$  has  $B1g$  symmetry (in the coordinate system of the crystallographic tetragonal unit cell). Thus, the former couples directly to the nematic order parameter. Using the fluctuation-dissipation theorem, we can express the quadrupolar relaxation rate in terms of the dynamical nematic susceptibility  $\chi_n$ :

$$W_2 = \left(\frac{eQ}{\hbar}\right)^2 k_B T \lim_{\omega \rightarrow 0} \sum_q \frac{\text{Im} \chi_n(q, \omega)}{\hbar \omega}. \quad (4)$$

Note that  $\chi_n$  is defined in terms of the EFG, and that there is no form factor for the nematic fluctuations because the on-site orbital occupations are the dominant contribution to the EFG. The nematic fluctuations order at  $q = (0, 0)$  with Curie-Weiss behavior, and the existence of a Fermi surface implies Landau damping [5, 9]. We estimate the magnitude of  $W_2$  by considering the static EFG at the As site. In the orthorhombic phase,  $V_{\pm 2}$  develops a finite value reflecting the static nematic order [34]. If we assume that the lattice, orbital and spin degrees of freedom have a similar power spectrum, then ratio of the quadrupolar to magnetic relaxation rates is  $W_2/W_0 \sim (eQ\bar{V}_2/\hbar\bar{h})^2$ , where  $\bar{V}_2$  and  $\bar{h}$  are the root mean square of the EFG and hyperfine field fluctuations, respectively. Previous field-dependent studies in  $\text{BaFe}_{2-x}\text{Co}_x\text{As}_2$  found  $\bar{h} \sim 40$  G [26].  $eQ\bar{V}_2/\hbar$  reaches a static value of 2.6 MHz in the orthorhombic phase of the parent compound [34], and a value of  $\sim 0.3$  MHz at the structural transition in  $\text{BaFe}_2(\text{As}_{0.96}\text{P}_{0.04})_2$  [40]. We estimate  $W_2/W_0$  can reach a maximum of  $\sim 8.4$  at  $T_s = T_N$ , thus it is clear that both magnetic and nematic fluctuations are of comparable magnitude and can contribute to the spin-lattice relaxation of the As. We conclude that the enhanced temperature dependent ratio seen in Fig. 2(a) reflects the presence of nematic fluctuations.

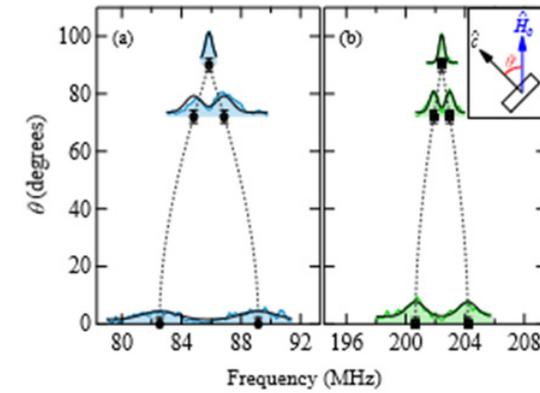


Figure 3 – Spectra of the central resonance of the  $^{75}\text{As}$  (a) and  $^{31}\text{P}$  (b) as a function of angle  $\theta$  with respect to the c-axis for  $x = 0.26$ . Markers represent the centers of the respective peaks extracted from global fits (solid black lines) to each of three data sets at  $0^\circ$ ,  $72^\circ$  and  $90^\circ$ . Dashed black lines show the calculated angular dependence of the resonance centers of the peaks based on extracted fit coefficients for the internal fields.

Note that in the presence of both quadrupolar and magnetic fluctuations, the two relaxation rates  $W_0$  and  $W_2$  become entangled and the exact form of the magnetization recovery becomes complex [39]. Attempts to fit the recovery data to a modified relaxation form with  $W_2$  as a floating parameter do not necessarily lead to a better quality of fit as measured by the  $\chi_2$  value. Such fits have poor precision because both relaxation rates  $W_0$  and  $W_2$  follow a broad distribution function, thus the relaxation curve is stretched. This distribution is evident in the  $P$  relaxation, which has no quadrupolar relaxation channel but still exhibits stretched recovery. Thus the difference  $\Delta(T_1T)^{-1} = {}^{75}(T_1T)^{-1} - k({}^{31}T_1T)^{-1}$ , where  $k = 1.31$  is the high temperature ratio of the As to P relaxation rates is not simply proportional to  $W_2$ . Yet, in order to assess qualitatively the contribution from  $W_2$ , we can still focus on this quantity, plotted in Fig. 2 (b), since  $W_2 = 0$  would imply  $\Delta(T_1T)^{-1} = 0$ .

It is clear from Fig. 2 (b) that nematic fluctuations are present in both the underdoped and optimally-doped samples. In the underdoped crystal, the tetragonal-orthorhombic phase transition  $T_s$  coincides with  $T_N$ , and the nematic fluctuations diverge at this phase transition [41]. The solid lines through the data points are best fits to the expression  $\Delta(T_1T)^{-1} = A/(T - T_0)^n$ , where for the underdoped crystal  $n = 1.4 \pm 1.1$  and  $T_0 = 41.5 \pm 5.7$  K. In the optimally doped sample, the data reveal that nematic fluctuations are present in the tetragonal phase down to  $T_c$ . The best fit through the data points yields  $n = 1.5 \pm 1.9$  and  $T_0 = 13 \pm 33$  K. Although the exact relationship between  $\Delta(T_1T)^{-1}$  and  $W_2 \propto \chi_n$  is not known, it is

interesting to note that this result is consistent with elasto-resistance measurements, which indicate an enhanced  $\chi_n$  near a putative quantum critical point [10].

An alternative explanation for the behavior of the  $T_1^{-1}$  ratio in Fig. 2(a) is that the spin fluctuations are locally suppressed at the P sites. In this case, the As relaxation would not be enhanced by nematic fluctuations, but rather the P relaxation rate would be suppressed. A recent comparison of NMR of  $^{63}\text{Cu}$  and  $^{75}\text{As}$  in  $\text{Ba}(\text{Fe}_{1-x}\text{Cu}_x)_2\text{As}_2$  revealed a slightly reduced relaxation at the Cu site [42]. However, the form factor and hyperfine couplings to the Cu are different than the As, which could explain the difference. Furthermore, since  $^{63}\text{Q} < ^{75}\text{Q}$ , it is possible that this difference reflects the reduced quadrupolar interaction at the Cu sites. Thus, our results indicate that  $^{75}(T_1T)^{-1}$  always contains a contribution from nematic fluctuations. The extent to which these fluctuations affect the expected Curie-Weiss behavior  $^{75}(T_1T)^{-1} \propto (T - T_N)^{-1}$  near a magnetic transition remains to be further investigated. For instance, in systems with split nematic and magnetic transitions, such as  $\text{NaFeAs}$  and  $\text{Ba}(\text{Fe}_{1-x}\text{Co}_x)_2\text{As}_2$ ,  $^{75}(T_1T)^{-1}$  seems to display no additional peaks at  $T_s$ , suggesting that  $W_2$  may be subleading compared to  $W_0$ , at least in those materials.

The approach we have taken using the susceptibility in Eq. 2 to estimate the magnetic contribution to the relaxation is essentially identical to a recent study using self-consistent renormalization spin-fluctuation theory (SCR) [29]. In the previous study, the authors found that the spin fluctuations evolve with doping and exhibit quantum critical behavior near optimal doping for superconductivity. These antiferromagnetic spin fluctuations may provide the pairing glue for the superconductivity [3]. Our results indicate that these spin fluctuations are accompanied by nematic fluctuations in the optimally doped sample. It is possible that the nematic fluctuations may also be important for the superconducting mechanism [15].

It is interesting to consider why the inhomogeneous glassy behavior is unaffected by isovalent P doping on the As site rather than electron doping at the Fe site. Elasto-resistance measurements of the nematic susceptibility find Curie-Weiss behavior over a broad range of temperatures in various doped iron pnictides [10]. However, at low temperatures in both the electron and hole doped systems, the nematic susceptibility exhibits a deviation from Curie-Weiss behavior that may arise from quenched disorder. The P-doped system, on the other hand, showed no such deviation suggesting that this system contains the least amount of disorder. Our NMR results show no distinction and indicate a similar glassy distribution of relaxation rates in P, Co and Cu doped systems. It is likely that doping at the As site still disrupts the exchange interaction between the Fe orbitals, providing a source of frustration. Alternatively, these results could also indicate that the

electronic glassiness is driven by frustrated interactions rather than chemical inhomogeneity [43].

## CONCLUSION

To summarize, we have measured the hyperfine couplings and spin lattice relaxation rates of the As and P sites in  $\text{BaFe}_2(\text{As}_{1-x}\text{P}_x)_2$ . We find that spin fluctuations alone are insufficient to explain the ratio between the relaxation rates at these two sites, however critical slowing down of nematic fluctuations in the tetragonal phase that couple to the quadrupolar moment of the As can explain the enhanced relaxation at the As site. In contrast to torque magnetometry and optical measurements, our results show no evidence for a phase transition above  $T_s$ , however the critical fluctuations persist well above the structural transition [44, 45]. Furthermore, the presence of inhomogeneous strain distributions in the tetragonal phase may be responsible for the distribution of relaxation rates that we observe.

We thank P. Canfield, S. Bud'ko, S. Kivelson, J. Schmalian, P. Carreta, and E. Carlson for stimulating discussions. Work at UC Davis was supported by the UC Lab Research Fee Program and the NNSA under the Stewardship Science Academic Alliances program through U.S. DOE Research Grant No. DE-FG5209NA29464. Work at Stanford University was supported by the DOE, Office of Basic Energy Sciences, under Contract No. DE-AC02-76SF00515. RMF is supported by the U.S. Department of Energy, Office of Science, Basic Energy Sciences, under award number DE-SC0012336.

## REFERENCES

- 1 **Johnston, D. C.** Adv. Phys. 59, 803. – 2010.
- 2 **Moriya, T. and Ueda, K.** Rep. Prog. Phys. 66, 1299 (2003).
- 3 **Chubukov, A.** Annual Review of Condensed Matter Physics 3, 57. – 2012.
- 4 **Fang, C., Yao, H., Tsai, W.-F., Hu, J. and Kivelson, S. A.** Phys. Rev. B 77, 224509. – 2008.
- 5 **Xu, C., Müller, M. and Sachdev, S.** Phys. Rev. B 78, 020501. – 2008.
- 6 **Fernandes, R. M., Chubukov, A. V. and Schmalian, J.** Nature Physics 10, 97. – 2014.
- 7 **Gallais, Y., Fernandes, R. M., Paul, I., Chauvière, L., Yang, Y. X., M'Éasson, M. A., Cazayous, M., Sacuto, A., Colson, D. and Forget, A.** Phys. Rev. Lett. 111, 267001. – 2013.
- 8 **Chu, J.-H., Analytis, J. G., Press, D., De Greve, K., Ladd, T. D., Yamamoto, Y. and Fisher, I. R.** Phys. Rev. B 81, 214502. – 2010.
- 9 **Chu, J. H., Kuo, J. G., Analytis, and I. R. Fisher,** Science 337, 710. – 2012.

10 Kuo, H.-H., Chu, J.-H., Kivelson, S. A. and Fisher, I. R. 2015. – 1503. 00402.

11 Bohmer, A. E., P. Burger, F. Hardy, T. Wolf, P. Schweiss, R. Fromknecht, M. Reinecker, W. Schranz, and C. Meingast, Phys. Rev. Lett. 112, 047001. – 2014.

12 Kretzschmar, F., B'ohm, T., Karahasanović, U., Muschler, B., Baum, A., Jost, D., Schmalian, J., Caprara, S., Grilli, M., Castro, C. D., Analytis, J. G., Chu, J.-H., Fisher, I. R. and Hackl, R. 1507.06116. – 2015.

13 Gallais, Y. and Paul, I. 1508.01319. – 2015.

14 Thorsmoelle, V. K., Khodas, M., Yin, Z. P., Zhang, C., Carr, S. V., Dai, P. and Blumberg, G. 1410.6456. – 2014.

15 Lederer, S., Schattner, Y., Berg, E. and Kivelson, S. A. Phys. Rev. Lett. 114, 097001. – 2015.

16 Maier, T. A. and Scalapino, D. J. Phys. Rev. B 90, 174510. – 2014.

17 Fernandes, R. M., B'ohmer, A. E., Meingast, C. and Schmalian, J. Phys. Rev. Lett. 111, 137001. – 2013.

18 Böhmer, A. E. and C. Meingast, arXiv preprint ar-Xiv:1505.05120. – 2015.

19 X. Lu, J. T. Park, R. Zhang, H. Luo, A. H. Nevidomskyy, Q. Si, and Dai, P. Science 345, 657 (2014).

20 Zhang, Q., Fernandes, R. M., Lamsal, J., Yan, J., Chi, S., Tucker, G. S., Pratt, D. K., Lynn, J. W., McCallum, R. W., Canfield, P. C., Lograsso, T. A., Goldman, A. I., Vaknin, D. and McQueeney, R. J. Phys. Rev. Lett. 114, 057001. – 2015.

21 Baek, S.-H., Efremov, D. V., Ok, J. M., Kim, J. S., Van den Brink, J. and Buchner, B. Nat. Mater. 14, 210. – 2015.

22 Bohmer, A. E., Arai, T., Hardy, F., Hattori, T., Iye, T., Wolf, T., L'ohneysen, H. V., Ishida, K. and Meingast, C. Phys. Rev. Lett. 114, 027001. – 2015.

23 Rahn, M. C., Ewings, R. A., Sedlmaier, S. J., Clarke, S. J. and Boothroyd, A. T. Phys. Rev. B 91, 180501. – 2015.

24 Wang, Q., Shen, Y., Pan, B., Hao, Y., Ma, M., Zhou, F., Stefens, P., Schmalzl, K., Forrest, T., Abdel-Hafiez, M. et al., arXiv preprint arXiv:1502.07544. – 2015.

25 Dioguardi, A. P., Crocker, J., Shockley, A. C., Lin, C. H., Shirer, K. R., Nisson, D. M., Lawson, M. M., apRoberts Warren, N., Canfield, P. C., Bud'ko, S. L., Ran, S. and Curro, N. J. Phys. Rev. Lett. 111, 207201. – 2013.

26 Dioguardi, A. P., Lawson, M. M., Bush, B. T., Crocker, J., Shirer, K. R., Nisson, D. M., Kissikov, T., Ran, S., Bud'ko, S. L., Canfield, P. C., Yuan, S., Kuhns, P. L., Reyes, A. P., Grafe, H. J. and Curro, N. J. arXiv.org, 1503.01844. – 2015.

27 Loh, E. W. Carlson, and K. A. Dahmen, Phys. Rev. B 81, 224207. – 2010.

28 Nakai, Y., Nakai, Y., Iye, T., Kitagawa, S., Iye, T., Ishida, K., Kitagawa, S., Ikeda, H., Ishida, K., Kasahara, S., Ikeda, H., Shishido, H., Shishido, H., Shibauchi, T., Matsuda, Y. and Terashima, T. Phys. Rev. Lett. 105, 107003. – 2010.

29 Nakai, Y., Iye, T., Kitagawa, S., Iye, T., Ishida, K., Kitagawa, S., Kasahara, S., Shibauchi, T., Matsuda, Y., Ikeda, H. and Terashima, T. Phys. Rev. B 87, 174507. – 2013.

30 Hammerath, F., Drechsler, S. L., Grafe, H. J., Lang, G., Fuchs, G., Behr, G., Eremin, I., Korshunov, M. M. and Buchner, B. Phys. Rev. B 81, 140504. – 2010.

31 Hammerath, F., Grafe, U., Kuhne, T., Kuhne, H., Kuhns, P. L., Reyes, A. P., Lang, G., Wurmehl, S., Buchner, B., Carretta, P. and Grafe, H. J. Phys. Rev. B 88, 104503. – 2013.

32 Kuo, H.-H., Analytis, J. G., Chu, J.-H., Fernandes, R. M., Schmalian, J. and Fisher, I. R. Phys. Rev. B 86, 134507. – 2012.

33 Johnston, D. Phys. Rev. B 74, 184430. – 2006.

34 Kitagawa, K., Katayama, N., Ohgushi, K., Yoshida, M. and Takigawa, M. J. Phys. Soc. Jpn. 77, 114709. – 2008.

35 Slichter, C. P. Principles of magnetic resonance, Springer series in solid-state sciences (Springer-Verlag, 1990).

36 Kinouchi, H., Mukuda, H., Kitaoka, Y., Shirage, P. M., Fujihisa, H., Gotoh, Y., Eisaki, H. and Iyo, A. Phys. Rev. B 87, 121101. – 2013.

37 Smerald, A. and Shannon, N. Phys. Rev. B 84, 184437. – 2011.

38 Millis, A. J., Monien, H. and Pines, D. Phys. Rev. B 42, 167. – 1990.

39 Suter, A., Mali, M., Roos, J. and Brinkmann, D. Supercond. Sci. Technol. 10, 5977. – 1999.

40 Iye, T., Nakai, Y., Kitagawa, S., Ishida, K., Kasahara, S., Shibauchi, T., Matsuda, Y. and Terashima, T. J. Phys. Soc. Jpn. 81, 033701. – 2012.

41 Hu, D., Lu, X., Zhang, W., Luo, H., Li, S., Wang, P., Chen, G., Han, F., Banjara, S. R., Sapkota, A., Kreyssig, A., Goldman, A. I., Yamani, Z., Niedermayer, C., Skoulatos, M., Georgii, R., Keller, T., Wang, P., Yu, W. and Dai, P. Phys. Rev. Lett. 114, 157002. – 2015.

42 Takeda, H., Imai, T., Tachibana, M., Gaudet, J., Gaulin, B. D., Sapiro, B. I. and Sefat, A. S. Phys. Rev. Lett. 113, 117001. – 2014.

43 Schmalian J. and Wolynes, P. G. Phys. Rev. Lett. 85, 836. – 2000.

44 Kasahara, S., Shi, H. J., Hashimoto, K., Tonegawa, S., Mizukami, Y., Shibauchi, T., Sugimoto, K., Fukuda, T., Terashima, T., Nevidomskyy, A. H. and Matsuda, Y. Nature 486, 382. – 2012.

45 Thewalt, E., Hinton, J. P., Hayes, I. M., Helm, T., Lee, D. H., Analytis, J. G. and Orenstein, J. 1507.03981. – 2015.

Material received on 06.01.16.

*А. П. Дайгарди<sup>1</sup>, Т. Кисиков<sup>1</sup>, Ц. Х. Лин<sup>1</sup>, К. Р. Ширер<sup>1</sup>, М. М. Лоусон<sup>1</sup>, Х.-Дж. Грэйф<sup>2</sup>, Дж.-Х. Чу<sup>3,4</sup>, И. Р. Фишер<sup>3,4</sup>, Р. М. Фернандес<sup>5</sup>, Н. Дж. Куро<sup>1</sup>, Н. А. Испулов<sup>6</sup>, М. К. Жукенов<sup>6</sup>*

**$BaFe_2(As_{1-x}P_x)_2$  бір текті емес нематикалық флуктуациялардың ЯМР дәлелі**

<sup>1</sup>Калифорния университеті, Дэвис, АҚШ;

<sup>2</sup>Қатты дене физикасының институты, Дрезден, Германия;

<sup>3</sup>Стэнфорд университеті, Стэнфорд, Калифорния, АҚШ;

<sup>4</sup>Энергия және материалтану Стэнфорд институты, Калифорния, АҚШ;

<sup>5</sup>Миннесота университеті, Миннеаполис, Миннесота, АҚШ;

<sup>6</sup>С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар, Қазақстан.  
Материал 06.01.16 баспаға түсті.

*А. П. Дайгарди<sup>1</sup>, Т. Кисиков<sup>1</sup>, Ц. Х. Лин<sup>1</sup>, К. Р. Ширер<sup>1</sup>, М. М. Лоусон<sup>1</sup>, Х.-Дж. Грэйф<sup>2</sup>, Дж.-Х. Чу<sup>3,4</sup>, И. Р. Фишер<sup>3,4</sup>, Р. М. Фернандес<sup>5</sup>, Н. Дж. Куро<sup>1</sup>, Н. А. Испулов<sup>6</sup>, М. К. Жукенов<sup>6</sup>*

**ЯМР доказательства неоднородных нематических флуктуаций в  $BaFe_2(As_{1-x}P_x)_2$**

<sup>1</sup>Калифорнийский университет, Дэвис, США;

<sup>2</sup>Институт физики твердого тела, Дрезден, Германия;

<sup>3</sup>Стэнфордский университет, Стэнфорд, Калифорния, США;

<sup>4</sup>Стэнфордский институт энергии и материаловедения, Калифорния, США;

<sup>5</sup>Университет Миннесоты, Миннеаполис, Миннесота, США;

<sup>6</sup>Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, Павлодар, Казахстан.

Материал поступил в редакцию 06.01.16.

*Біз нематикалық изовалентті Р-легирленген  $BaFe_2As_2$  монокристалдарда, шыны тәрізді тербелістермен шартталған, ядролық спин-торлық релаксацияның дәлелін ұсынамыз. Екі объекті де  $^{75}As$  және  $^{31}P$  электронды-легирленген жүйелерге ұқсас созылған экспоненциалды релаксацияға ие. Осы жерлердегі аса жұқа өрістер мен релаксация жылдамдықтарын салыстыра отырып, біз  $As$  релаксациясы біріңғай магниттік спиндік флуктуация терминдерінде түсіндіріле алмайтынын аңғарамыз.*

*Біз нематикалық тербелістердің ядролық квадрупольдік момент сияқты біріңғай және артық релаксацияны түсіндіре алатындығын демонстрациялаймыз. Бұл нәтижелер шыны тәрізді қозғаушы күштердің темір негізіндегі асқын өткізгіштерде болатын әмбебап құбылыс екендігін көрсетеді.*

*Мы представляем доказательства ядерной спин-решеточной релаксации, обусловленной стеклообразными колебаниями в нематических изовалентных Р-легированных  $BaFe_2As_2$  монокристаллах. Оба объекта  $^{75}As$  и  $^{31}P$  обладают растянутой экспоненциальной релаксацией, похожей на электронно-легированные системы. Сравнивая сверхтонкие поля и скорости релаксации в этих местах мы находим, что релаксация  $As$  не может быть объяснена исключительно в терминах магнитных спиновых флуктуаций. Мы демонстрируем, что нематические колебания соединяются как ядерный квадрупольный момент и могут объяснить избыточную релаксацию. Эти результаты свидетельствуют о том, что стекловидные нематические движущие силы – это универсальное явление в сверхпроводниках на основе железа.*

**А. А. Печерицын**

к.ф.-м.н., Томский государственный университет, Томск, Россия  
e-mail: pecher@phys.tsu.ru

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ ОДНОМЕРНОГО СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА: ЗАМЕНА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ УМНОЖЕНИЕМ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ**

*В данной статье рассматриваются цепочки преобразований Дарбу одномерного стационарного уравнения Дирака. Показано, что в выражениях для решения преобразованного уравнения и преобразованного потенциала можно заменить дифференцирование умножением на собственные значения. Произведено сравнение с результатами других авторов.*

*Ключевые слова: преобразование Дарбу, одномерное стационарное уравнение Дирака, цепочки преобразований.*

**ВВЕДЕНИЕ**

Преобразование Дарбу является мощным методом конструирования уравнений, имеющих точное решение. Преобразования такого типа были систематически исследованы Дарбу [1]. В дальнейшем аналогичные методы неоднократно предлагались для построения точных решений уравнения Шрёдингера (см. обсуждение в [2]).

Для одномерного стационарного уравнения Дирака оператор преобразования Дарбу был построен в [3]. Позже преобразование Дарбу уравнения Дирака с потенциалами специального вида рассматривалось в [4, 5]. Следует отметить также работу [6], в которой решения уравнения обратной задачи рассеяния были найдены с помощью дифференциальных операторов, аналогичных преобразованию Дарбу. Систематическое исследование преобразования Дарбу для одномерного стационарного уравнения Дирака было проведено в работах [7, 8, 9]. В частности, в [9] были получены выражения для оператора преобразования и для преобразованного потенциала N-кратного преобразования Дарбу через определители от функций преобразования, аналогичные формулам Крума-Крейна [10, 11] для уравнения Шрёдингера.

**ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ**

Одномерное стационарное уравнение Дирака будем записывать в виде

$$h\psi_E = E\psi_E, \quad h = \gamma\partial + V. \tag{1}$$

Здесь  $\partial \equiv d/dx$ ,  $\gamma = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $V$  – вещественный

симметрический матричный потенциал. Функция  $\psi_E$  является двухкомпонентным спинором,  $\psi_E = (\psi_{1E}, \psi_{2E})^t$  (значок  $t$  означает транспонирование). Оператор  $h$  будем называть дираковским гамильтонианом. Будем также считать, что потенциал  $V$  имеет канонический

вид:  $V = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$  (см. [12]).

Оператором преобразования Дарбу будем называть дифференциальный матричный оператор, удовлетворяющий т.н. соотношению сплетения [12]

$$Lh_0 = h_1L \tag{2}$$

для двух дираковских гамильтонианов  $h_0$  и  $h_1$  с потенциалами  $V_0$  и  $V_1$ , соответственно. Несложно проверить, что если функция  $\psi_E$  является решением уравнения Дирака с гамильтонианом  $h_0$ , то функция  $\varphi_E = L\psi_E$  удовлетворяет уравнению Дирака с гамильтонианом  $h_1$ .

В [7] было показано, что оператор преобразования Дарбу первого порядка имеет вид

$$L = \partial - U_x U^{-1}, \tag{3}$$

где матричная функция  $U$ , называемая функцией преобразования, удовлетворяет уравнению

$$h_0 U = U \Lambda, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2). \tag{4}$$

При этом потенциалы  $V_1$  и  $V_0$  связаны соотношением

$$V_1 = V_0 + [\gamma, U_x U^{-1}]. \tag{5}$$

Отметим, что столбцы матрицы  $U$  удовлетворяют уравнению (1) с потенциалом  $V_0$  для  $E=\lambda_1$  и  $E=\lambda_2$ , соответственно. Таким образом, если нам известны все решения уравнения Дирака с потенциалом  $V_0$ , то мы можем построить матрицу  $U$ , удовлетворяющую уравнению (4), и с ее помощью получить новое уравнение с гамильтонианом  $h_1$ , все решения которого также будут известны.

Пусть теперь нам известны матричных решений  $U_k$ ,  $k=1,2,\dots,n$  уравнения (4)

$$U_k = \begin{pmatrix} u_{11;k} & u_{12;k} \\ u_{21;k} & u_{22;k} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

соответствующих различным матричным собственным значениям  $\Lambda_k = \text{diag}(\lambda_{1;k}, \lambda_{2;k})$ . Столбцы матрицы  $U_k$  обозначим через  $U_{j;k}$ , они удовлетворяют уравнению (1) с потенциалом  $V_0$  для  $E = \lambda_{j;k}$ . Для строк матрицы  $U_k$  будем использовать обозначение  $U_k^j$ .

Тогда мы можем построить цепочку преобразований Дарбу следующим образом. Используя функцию  $U_1$  вместо  $U$  в формулах (3) и (5) получаем оператор преобразования  $L_{01}$  и потенциал  $V_1$ . Функция  $V_2 = L_{01}U_2$  является матричным решением уравнения (1) с потенциалом  $V_1$ . Используя ее в качестве функции преобразования, построим оператор  $L_{12}$  и потенциал  $V_2$ :

$$L_{12} = \partial - (V_1)_x V_1^{-1}, \quad V_2 = V_1 + [\gamma, (V_1)_x V_1^{-1}]. \quad (7)$$

Несложно показать, что оператор  $L_{01} = L_{12}L_{01}$  – матричный дифференциальный оператор 2-го порядка, сплетающий гамильтонианы  $h_0$  и  $h_2 = \gamma\partial + V_2$ .

Продолжая эту процедуру несколько раз, получим оператор  $n$ -го порядка

$$L_{0n} = L_{n-1,n} \dots L_{12}L_{01}, \quad (8)$$

который осуществляет преобразование от гамильтониана  $h_0$  к гамильтониану  $h_n$  с потенциалом

$$V_n = V_0 + [\gamma, D_n], \quad D_n = D_{n-1} + (V_n)_x (V_n)^{-1}, \quad (9)$$

где

$$V_n = L_{0,n-1}U_n = L_{n-2,n-1} \dots L_{12}L_{01}U_n. \quad (10)$$

Он будет полностью определяться функциями  $U_k$ .

В [9] было показано, что оператор преобразования и преобразованный потенциал  $n$ -кратного преобразования Дарбу могут быть выражены через определители от функций преобразования  $U_k$ . Приведем основные результаты этой работы, используя обозначения, введенные в [13].

Определим  $2n \times 2n$  матрицу  $W$ :

$$W \equiv W(U_1, \dots, U_n) = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_n \\ \partial U_1 & \partial U_2 & \dots & \partial U_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial^{n-1}U_1 & \partial^{n-1}U_2 & \dots & \partial^{n-1}U_n \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Присоединяя к (11) спинор  $\psi_E = (\psi_{1E}, \psi_{2E})^t$ , можно построить матрицы:

$$W_{jE}(U_1, \dots, U_n, \psi_E) = \begin{pmatrix} & & & \psi_E \\ & W(U_1, \dots, U_n) & & \partial \psi_E \\ & & \dots & \dots \\ & & & \partial^{n-1} \psi_E \\ \partial^n U_1^j & \dots & \partial^n U_n^j & \partial^n \psi_{jE} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2 \quad (12)$$

Определим также матрицы  $W_{i,j}(U_1, \dots, U_n)$ ,  $i, j = 1, 2$ , которые построены из (11) путем замены в последней матричной строке матриц  $\partial^{n-1}U_k$  на  $U_k^{ij}$ ,  $k = 1, \dots, n$ :

$$W_{i,j}(U_1, \dots, U_n) = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_n \\ \partial U_1 & \partial U_2 & \dots & \partial U_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial^{n-2}U_1 & \partial^{n-2}U_2 & \dots & \partial^{n-2}U_n \\ U_1^{ij} & U_2^{ij} & \dots & U_n^{ij} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Матрицы  $U_k^{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , получены из  $\partial^{n-1}U_k$ , заменой  $j$ -й строки на  $i$ -ю строку матрицы  $\partial^{n-1}U_k$ .

Теперь приведем основные результаты работы [9]. Действие цепочки из  $n$  преобразований на спинор  $\psi_E$  дает спинор

$$\varphi_E = L_{0n}\psi_E = (\varphi_{1E}, \varphi_{2E})^t, \quad \varphi_{jE} = \frac{|W_{jE}(U_1, \dots, U_n, \psi_E)|}{|W(U_1, \dots, U_n)|}, \quad (14)$$

где  $W_{jE}(U_1, \dots, U_n, \psi_E)$  определяется формулой (12), а  $W(U_1, \dots, U_n)$  – формулой (11).

Для преобразованного потенциала  $V_n$  справедлива формула (9), причем элементы  $d_{i,j}^n$  разности потенциалов  $D_n$  следующим образом выражаются через  $U_k$

$$d_{i,j}^n = \frac{|W_{i,j}(U_1, \dots, U_n)|}{|W(U_1, \dots, U_n)|}, \quad (15)$$

где  $W(U_1, \dots, U_n)$  и  $W_{i,j}(U_1, \dots, U_n)$  определяются формулами (11) и (13), соответственно.

Так как функция  $U_k$  является матричной собственной функцией гамильтониана  $h_0$ , то ее производную можно выразить из уравнения Дирака:

$$\partial U_k = \gamma V_0 U_k - \gamma U_k \Lambda_k. \quad (16)$$

Дифференцируя (16) по  $x$  и заменяя  $(U_k)_x$  из (16), получим аналогичное выражение для второй производной от функции  $U_k$ . Продолжая этот процесс, можно представить  $n$ -ю производную от  $U_k$  в виде полинома от собственного значения  $\Lambda_k$  с матричными коэффициентами:

$$\partial^n U_k = \sum_{i=0}^n Q_i^{(n)}(x) U_k \Lambda_k^i. \quad (17)$$

Здесь  $Q_i^{(n)}(x) - 2 \times 2$  – матрицы с элементами, зависящими от  $x$ . Из (17) и (16) можно получить рекуррентные соотношения для матриц  $Q_i^{(n)}$ . В частности, можно показать, что

$$Q_n^{(n)} = (-\gamma)^n = \begin{cases} (-1)^m, & n = 2m \\ (-1)^{m+1} \gamma, & n = 2m + 1 \end{cases} \quad (18)$$

$$Q_{n-1}^{(n)} = \begin{cases} 0, & n = 2m \\ (-1)^m \gamma V_0, & n = 2m + 1 \end{cases} \quad (19)$$

Аналогичное выражение можно получить и для функции  $\psi_E$ :

$$\partial^n \psi_E = \sum_{i=0}^n E^i Q_i^{(n)}(x) \psi_E. \quad (20)$$

Формулы (17) – (20) позволяют переписать выражения для матричных элементов разности потенциалов (15) и действия оператора преобразования на собственные функции гамильтониана  $h_0$  так, чтобы они не содержали производных.

Для начала покажем, что определитель матрицы  $W(U_1, \dots, U_n)$  совпадает с определителем матрицы  $\tilde{W}(U_1, \dots, U_n)$  вида

$$\tilde{W}(U_1, \dots, U_n) = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_n \\ U_1 \Lambda_1 & U_2 \Lambda_2 & \dots & U_n \Lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_1 \Lambda_1^{n-1} & U_2 \Lambda_2^{n-1} & \dots & U_n \Lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Так как первые блочные строки определителей (11) и (21) совпадают, доказательство можно провести методом математической индукции. Пусть замена дифференцирования матриц  $U_k$  умножением на соответствующие собственные значения  $\Lambda_k$  выполнена для первых  $l-1$  блочных строк определителя (11).  $l$ -я блочная строка состоит из матриц  $\partial^{l-1} U_k$ , которые можно представить в виде ряда (17). Нетрудно заметить, что все слагаемые в этой сумме, кроме тех, которые содержат  $\Lambda_k^{l-1}$ , пропорциональны элементам из предыдущих блочных строк, и, следовательно, они не дают

вклада в определитель (см., например, [15, с. 53]). Отбросив эти слагаемые, получим, что  $l$ -я блочная строка содержит элементы вида  $(-\gamma)^{l-1} U_k \Lambda_k^{l-1}$ . Тогда преобразуемый определитель можно представить в виде:

$$|W(U_1, \dots, U_n)| = |Q| \cdot \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_n \\ U_1 \Lambda_1 & U_2 \Lambda_2 & \dots & U_n \Lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_1 \Lambda_1^{l-1} & U_2 \Lambda_2^{l-1} & \dots & U_n \Lambda_n^{l-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial^{n-1} U_1 & \partial^{n-1} U_2 & \dots & \partial^{n-1} U_n \end{vmatrix}, \quad (22)$$

где  $Q$  – квазидиагональная матрица,  $l$ -й диагональный блок которой равен  $(-\gamma)^{l-1}$ , а остальные являются единичными матрицами  $2 \times 2$ . Очевидно, что  $|Q| = 1$ . После этого  $l$ -я блочная строка преобразуемого определителя совпадает с  $l$ -й блочной строкой определителя (21). Последовательное применение этой процедуры ко всем блочным строкам определителя матрицы доказывает вышеприведенное утверждение.

Теперь рассмотрим определитель матрицы  $W_{jE}(U_1, \dots, U_n, \psi_E)$ . С помощью аналогичной процедуры его первые блочных строк преобразуются в строки, содержащие матрицы  $U_k \Lambda_k^{l-1}$ ,  $E^{l-1} \psi_E$ ,  $l = 1, \dots, n$ . Положим  $j=l$  и представим производные  $n$ -го порядка в последней строке в виде ряда (20). После удаления линейной комбинации элементов из предыдущих строк, в этой строке остаются элементы вида  $(-1)^m U_k^j \Lambda_k^{2m}$ ,  $(-1)^m E^{2m} \psi_{1E}$  при  $n=2m$ , и элементы вида  $(-1)^{m+1} U_k^2 \Lambda_k^{2m+1}$ ,  $(-1)^{m+1} E^{2m+1} \psi_{2E}$  при  $n=2m+1$ . По аналогии с матрицей (21) определим матрицу

$$\tilde{W}_{jE}(U_1, \dots, U_n, \psi_E) = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_n & \psi_E \\ U_1 \Lambda_1 & U_2 \Lambda_2 & \dots & U_n \Lambda_n & E \psi_E \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_1 \Lambda_1^{n-1} & U_2 \Lambda_2^{n-1} & \dots & U_n \Lambda_n^{n-1} & E^{n-1} \psi_E \\ U_1^j \Lambda_1^n & U_2^j \Lambda_2^n & \dots & U_n^j \Lambda_n^n & E^n \psi_{jE} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Используя эти обозначения, результат проведенных рассуждений можно записать в виде:

$$|W_{1E}(U_1, \dots, U_n, \psi_E)| = \begin{cases} (-1)^m |\tilde{W}_{1E}(U_1, \dots, U_n, \psi_E)|, & n = 2m, \\ (-1)^{m+1} |\tilde{W}_{2E}(U_1, \dots, U_n, \psi_E)|, & n = 2m + 1, \end{cases} \quad (24)$$

Аналогичным образом показывается что при  $j=2$  имеет место соотношение

$$|W_{2E}(U_1, \dots, U_n, \psi_E)| = \begin{cases} (-1)^m |\tilde{W}_{2E}(U_1, \dots, U_n, \psi_E)|, & n = 2m, \\ (-1)^m |\tilde{W}_{1E}(U_1, \dots, U_n, \psi_E)|, & n = 2m + 1, \end{cases} \quad (25)$$

Объединяя полученные результаты и учитывая формулу (18) для  $(-\gamma)^n$ , получаем следующее утверждение. Действие оператора  $L_{0n}$  на собственную функцию  $\psi_E$  гамильтониана  $h_0$ , соответствующую собственному значению  $E$ , может быть записано в виде

$$L_{0n}\psi_E = \frac{1}{|\tilde{W}(U_1, \dots, U_n)|} (-\gamma)^n \left( \frac{|\tilde{W}_{1E}(U_1, \dots, U_n, \psi_E)|}{|\tilde{W}_{2E}(U_1, \dots, U_n, \psi_E)|} \right). \quad (26)$$

Перейдем к получению выражения для преобразованного потенциала. Рассмотрим определитель  $|W_{1,1}(U_1, \dots, U_n)|$ . Его первые  $n-1$  блочных строк преобразуются в строки, содержащие элементы вида  $U_k \Lambda_k^l$ ,  $l = 0, \dots, n-2$  с помощью вышеописанной процедуры. Выполним преобразование последней блочной строки, которая состоит из матриц  $U_k^{1,1}$ .

Пусть сначала  $n$  – четное. Представляя элементы матриц  $U_k^{1,1}$  в виде ряда вида (20) и исключая слагаемые, пропорциональные элементам из предыдущих строк определителя, получим, что последняя блочная строка будет содержать матрицы вида

$$\begin{pmatrix} (-1)^{n/2} \lambda_{1,k}^n u_{11,k} & (-1)^{n/2} \lambda_{2,k}^n u_{12,k} \\ (-1)^{(n-2)/2} \lambda_{1,k}^{n-1} u_{11,k} & (-1)^{(n-2)/2} \lambda_{2,k}^{n-1} u_{12,k} \end{pmatrix} = (-1)^{n/2} \gamma \cdot \tilde{U}_k^{1,2}. \quad (27)$$

Матрицы  $\tilde{U}_k^{i,j}$ , по аналогии с матрицами  $U_k^{i,j}$  получаются из  $U_k \Lambda_k^{n-1}$  заменой  $j$ -й строки на  $i$ -ю строку матрицы  $U_k \Lambda_k^n$ . Тогда преобразуемый определитель принимает вид

$$|W_{1,1}(U_1, \dots, U_n)| = |Q_1| \cdot |\tilde{W}_{1,2}(U_1, \dots, U_n)|, \quad (28)$$

где  $Q_1$  – квазидиагональная матрица, у которой первые  $l-1$  блочных диагональных элементов являются единичными матрицами второго порядка, а последний равен  $(-1)^{n/2} \gamma$ . Через  $\tilde{W}_{i,j}(U_1, \dots, U_n)$  по аналогии с (13) обозначаем матрицу, полученную из (21) заменой в последней блочной строке матриц  $U_k \Lambda_k^{n-1}$  на матрицы  $\tilde{U}_k^{i,j}$ . Так как  $|Q_1| = 1$ , то при четном  $n$  имеем

$$|W_{1,1}(U_1, \dots, U_n)| = |\tilde{W}_{1,2}(U_1, \dots, U_n)|. \quad (29)$$

Пусть теперь  $n$  – нечетное. Раскладывая элементы матриц  $U_k^{1,1}$  в ряды вида (20), получаем, после исключения слагаемых, пропорциональных элементам их других строк, что  $n$ -я блочная строка преобразуемого определителя будет состоять из матриц

$$\begin{pmatrix} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \lambda_{1,k}^n u_{21,k} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \lambda_{1,k}^{n-1} q_0 u_{11,k} & (-1)^{\frac{n+1}{2}} \lambda_{2,k}^n u_{22,k} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \lambda_{2,k}^{n-1} q_0 u_{12,k} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \lambda_{1,k}^{n-1} u_{21,k} & (-1)^{\frac{n-1}{2}} \lambda_{2,k}^{n-1} u_{22,k} \end{pmatrix}$$

Тогда определитель распадается на сумму двух определителей, и, после выполнения аналогичных преобразований, может быть приведен к виду:

$$|W_{1,1}(U_1, \dots, U_n)| = |Q_2| \cdot |\tilde{W}_{2,1}(U_1, \dots, U_n)| + |Q_3| \cdot |\tilde{W}(U_1, \dots, U_n)|, \quad (30)$$

где через  $Q_2$  и  $Q_3$  обозначены блочно-диагональные матрицы, последние элементы которых равны  $\begin{pmatrix} (-1)^{(n+1)/2} & 0 \\ 0 & (-1)^{(n-1)/2} \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

соответственно, а остальные являются единичными матрицами второго порядка. Несложно проверить, что  $|Q_2| = -1$  и  $|Q_3| = q_0$ , поэтому при нечетном  $n$

$$|W_{1,1}(U_1, \dots, U_n)| = -|\tilde{W}_{2,1}(U_1, \dots, U_n)| + q_0 \cdot |\tilde{W}(U_1, \dots, U_n)|. \quad (31)$$

Аналогичным образом показывается, что

$$|\tilde{W}_{2,1}(U_1, \dots, U_n)| = \begin{cases} |\tilde{W}_{2,2}(U_1, \dots, U_n)|, & n = 2m, \\ |\tilde{W}_{1,1}(U_1, \dots, U_n)| - p_0 \cdot |\tilde{W}(U_1, \dots, U_n)|, & n = 2m + 1, \end{cases} \quad (32)$$

$$|\tilde{W}_{1,2}(U_1, \dots, U_n)| = \begin{cases} -|\tilde{W}_{1,1}(U_1, \dots, U_n)|, & n = 2m, \\ -|\tilde{W}_{2,2}(U_1, \dots, U_n)| - p_0 \cdot |\tilde{W}(U_1, \dots, U_n)|, & n = 2m + 1, \end{cases} \quad (33)$$

$$|\tilde{W}_{2,2}(U_1, \dots, U_n)| = \begin{cases} -|\tilde{W}_{2,1}(U_1, \dots, U_n)|, & n = 2m, \\ |\tilde{W}_{1,2}(U_1, \dots, U_n)| - q_0 \cdot |\tilde{W}(U_1, \dots, U_n)|, & n = 2m + 1, \end{cases} \quad (34)$$

Подставляя (29) – (34) в формулу (15), получим для разности потенциалов выражение

$$D_n = \begin{cases} \tilde{D}_n(-\gamma), & n = 2m, \\ (-\gamma)\tilde{D}_n + \gamma V_0 & n = 2m + 1, \end{cases} \quad (35)$$

где через  $\tilde{D}_n$  обозначена матрица, составленная из элементов  $\tilde{d}_{i,j}^n$  вида

$$\tilde{d}_{i,j}^n = \frac{|\tilde{W}_{i,j}(U_1, \dots, U_n)|}{|\tilde{W}(U_1, \dots, U_n)|} \quad (36)$$

Подставляя (35) в (9), используя что  $[\gamma, \gamma V_0] = -2V_0$  и учитывая (18), получаем что

$$V_n = (-1)^n + [\gamma, (-\gamma)^n \tilde{D}_n \gamma^{n-1}] \quad (37)$$

## ВЫВОДЫ

В работе получены формулы для решения преобразованного уравнения (26) и преобразованного потенциала (36) – (37) при  $n$ -кратном преобразовании Дарбу одномерного стационарного уравнения Дирака, в которых дифференцирование заменено умножением на соответствующие собственные значения. Такая замена существенно облегчает вычисления при проведении реальных расчетов.

Отметим, что формула (26) аналогична выражению для вронскиана от  $n$  решений уравнения Шредингера (см. [14, p. 214]). Кроме того, формулы (26) и (36) – (37) для аналогичны выражениям, полученным в работах [16, 17], где использовалось иное определение преобразования Дарбу.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 **Darboux, G.** Sur la representation spheric des surfaces // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris – 1882. – V. 94. – P. 1343-1345.

2 **Багров, В. Г.** Преобразование Дарбу, факторизация, суперсимметрия в одномерной квантовой механике / В. Г. Багров, Б. Ф. Самсонов // ТМФ – 1995. – Т. 104. – С. 356-367.

3 **Anderson, A.** Intertwining of exactly solvable Dirac equations with one-dimensional potentials // Phys. Rev. A – 1991. – V. 43. – P. 4602-4610.

4 **Stahlhofen, A. A.** Supertransparent potentials for the Dirac equation // J. Phys. A. – 1994. – V. 27. – P. 8279-8290.

5 **Yurov, A. V.** Darboux transformation for the Dirac equation with (1+1) potentials // Phys. Lett. A. – 1997. – V. 225. – P. 51-59.

6 **Daskalov, V. B.** Explicit formulae for the inverse problem for the regular Dirac operator / V. B. Daskalov, E. Kh. Khristov // Inverse Problems. – 2000. – V. 16 – P. 247-258.

7 **Самсонов, Б. Ф.** Преобразование Дарбу одномерного стационарного уравнения Дирака / Б. Ф. Самсонов, А. А. Печерицын // Изв. ВУЗов, Физика. – 2000. – Т. 43. – С. 48-54.

8 **Debergh, N.** Darboux transformations of the one-dimensional stationary Dirac equation / N. Debergh, A. A. Pecheritsin, B. F. Samsonov, B. Van Den Bossche // J. Phys. A. – 2002. – V. 35. – P. 3279-3287.

9 **Nieto, L.M.** Intertwining technique for the one-dimensional stationary Dirac equation / L. M. Nieto, A. A. Pecheritsin, B. F. Samsonov // Ann. Phys. – 2003. – V. 305. – P. 151-189.

10 **Crum, M. M.** Assotiated Sturm–Liouville systems // Quart. J. Math., Ser 2. – 1955. – V. 6. – P. 121-126.

11 **Крейн, М. Г.** О континуальном аналоге одной формулы Кристоффеля из теории ортогональных многочленов // ДАН СССР. – 1957. – Т. 113. – С. 970-973.

12 **Левитан, Б. М.** Введение в спектральную теорию / Б. М. Левитан, И. С. Саргсян // М. : Наука, 1970. – 671 с.

13 **Samsonov, B. F.** Chains of Darboux Transformations for the Matrix Schrodinger Equation / B. F. Samsonov, A. A. Pecheritsin // J. Phys. A. – 2004. – V. 37. – P. 239-250.

14 **Daskalov, V. B.** On the inverse problem for the regular Sturm–Liouville operator // Inverse Problems – 1996. – V. 12. – P. 207-217.

15 **Гантмахер, Ф. Р.** Теория матриц – М. : Наука, 1988. – 552 с.

16 **Салль, М. А.** L-A пары с рациональной зависимостью от спектральных параметров. Преобразование Дарбу // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1987. – Т. 161. – С. 72–75.

17 **Салль, М. А.** Преобразования Дарбу для неабелевых и нелокальных уравнений типа цепочки Тоды // ТМФ. – 1982. – Т. 53. – С. 227-237.

Материал поступил в редакцию 06.01.16.

*A. A. Печерицын*

**Дирак бір өлшемді стационарлық теңдеудің Дарбу түрлендіруі: дифференциалдауды меншікті мәндерге көбейтумен ауыстыру**

Томск мемлекеттік университеті, Томск, Ресей.

Материал 06.01.16 баспаға түсті.

*A. Pecheritsyn*

**Darboux transformation of one-dimensional stationary Dirac equation: replacement of differentiation by multiplication on eigenvalues**

Tomsk State University, Tomsk, Russia.

Material received on 06.01.16.

*Бұл мақалада бірөлшемді стационарлық Дирак теңдеуінің Дарбу түрлендірулердің тізбегі қарастырылады. Өрнектерде түрлендірілген теңдеулер мен потенциалдарды шығару үшін дифференциалдауды меншікті мәндерге көбейтумен ауыстыруға болатыны көрсетілген. Басқа авторлардың нәтижелерімен салыстырылды.*

*At the present article the chains of Darboux transformations for one-dimensional stationary Dirac equation are considered. It is shown that differentiation may be replaced by multiplication on eigenvalues in expressions for solutions of the transformed equation and the transformed potential. A comparison with the results of other authors is made.*

Секция  
«ИНФОРМАТИКА»

ӘОЖ 666. 97. 015

**С. С. Мауленов<sup>1</sup>, Ж. А. Аймешов<sup>2</sup>**<sup>1</sup>аға оқытушы, <sup>2</sup>магистр, оқытушыҚожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті,  
Түркістан.e-mail: <sup>1</sup>serzhan.maulenov@ayu.edu.kz, <sup>2</sup>aizhenab@mail.ru**GOOGLE MAPS КАРТАСЫН RAD STUDIO XE  
ҚОСЫМШАСЫНДА ҚОЛДАНУДАҒЫ НЕГІЗГІ МӘСЕЛЕЛЕР**

*Цифрлық карталар қазіргі уақыттағы зерттеулердің нәтижесін көрсететін негізгі формалардың бірі болып табылады. Дәстүрлі карталар қолмен жасалады және олардың жасалуы көп еңбекті қажет ететін процесс. Цифрлық карталарды құрастыруда жиі жасалатын майда жұмыстарды автоматтандыру жаңа ақпараттық технологиялар – геоақпараттық жүйелері мен деректер қорын басқару жүйелерін қолдану негізінде жүзеге асырылуы мүмкін. Бұл өз кезегінде зерттеу жұмыстарының тиімділігін арттыруға, және цифрлық карталарды құрастыру процесін айтарлықтай жылдамдатуға мүмкіндік береді. Осы мақалада Google Maps-ты қолданып осындай цифрлық карталарды құрастырудың бір тәсілі қарастырылады.*

*Кілтті сөздер: Google Maps API, RAD Studio XE, цифрлық карта, геоақпараттық жүйелер.*

**КІРІСПЕ**

Әртүрлі тараптардағы қосымшаларды RAD Studio XE ортасына кірістіру – бұл жүйені әмбебап, жан-жақты етеді және әлеуетін айтарлықтай арттыруға мүмкіндік береді. Дайын қосымшаларды кірістіруді әртүрлі әдістермен жасауға болады. Ол қосымшаның түріне қарай анықталады.

RAD Studio XE ортасында Google компаниясы картасын қолдану – бағыттарды жасау, объектілердің координаталарын алу ретінде, елді мекендердің карталарын жасау және тағы басқа көптеген қосымша мүмкіндіктер беретін пайдаланушылық бағдарламалар жасауға мүмкіндік береді. Қазіргі уақытта Google компаниясы тамаша картографиялық Google Maps құралын ұсынады. Google Maps (ескі атауы Google Local)

– Google компаниясы ұсынатын тегін картографиялық сервистер мен технологиялардың негізінде құрылған қосымшалар жиынтығы. Google Maps қызметінде жердің картасы мен спутниктік түсірілімдері бар. Онда мүмкіндіктері көп пайдаланушыға ыңғайлы интерфейсі және ашық API-интерфейс бар, сонымен бірге осы карталарды тегін пайдалануға мүмкіндік береді. Бірақ, бұл өнімді қолдануға Google компаниясы шектеу қойып отыр. Карталарды тек браузерлер шегінде ғана қолдана аламыз. Яғни, карталармен тек браузер арқылы жұмыс істеуге болады [2].

**НЕГІЗГІ БӨЛІМ**

Қарастырып отырған мәселеде Google Maps құралын қолдану үшін RAD Studio XE ортасында TWebBrowser компоненті арқылы жүзеге асырылады. Бұл компоненттің көптеген мүмкіндіктері бар. Біріншіден, көптеген қазіргі заманғы бағдарламаларда HTML деректермен жұмыс істеу керек. RAD Studio XE осы деректерді көру үшін құралы ActiveX компоненті TWebBrowser қолданылады, бұл Microsoft Internet Explorer-ң құрамдас бөлігі болып табылатын WebBrowser компонентін пайдаланады. Осылайша, Internet Explorer орнатылған кез келген компьютерде оған қол жетімді. Windows операциялық жүйесінің барлық соңғы нұсқаларының стандартты пакеті осы компонентті қамтиды. Екіншіден, TWebBrowser компоненті желіде және локальді дискіде орналасқан веб-беттердің мазмұнын немесе HTML кодын көруге мүмкіндік береді. RAD Studio XE 10 бұл компонент Internet қойындысынан табуға болады. Сонымен қатар, мұндай қосымшаларды құру – JavaScript сценарийлік программалау тілін білуді талап етеді. Осы Google картасын қазіргі уақытта көптеген сайттарда және басқада веб-қосымшаларда кеңінен қолданады [2].

Google-дан картографиялық мәліметтер алуды жүзеге асырудың тағы бір жолы ол – статикалық карта. Google Maps-тың статикалық картасы кәдімгі bitmap болып табылады. Бұл карта пайдаланушымен өзара қатынас үшін ешқандай интерактивті мүмкіндіктері жоқ. Оның артықшылығы жедел жадыны көп мөлшерде қолданатын TWebBrowser-ді қолдану қажет емес [1].

Google Maps API-ң статикалық жағдайына қойылатын шарттар:

Статикалық карталар тек браузерде көрсетілуі мүмкін екенін ескеріңіз, браузерден тыс статикалық карталарды пайдалану шектелген. Сонымен қатар, әрбір қосымша үшін бір тәулікте 25000 сұранысқа дейін қолдану шектеуі бар.

URL арқылы жіберілген HTTP-сұраныс кезінде, Google картасының API-і осы сұранысқа жауап ретінде GIF, PNG немесе JPEG кескін пішімін қайтарады. Әрбір сұраныс кезінде карта орналасқан орынды, сурет өлшемін масштабтау деңгейін, карта түрі және қосымша маркерлерді көрсетуге болады. Сондай-ақ әріптік-цифрлық символдарды қамтитын маркерлер таңбашаларын тағайындауға болады.

Google статикалық картасының API интерфейсімен қайтарылған кескін <IMG> тегінің SRC атрибутына немесе оның баламасы басқа бағдарламалау тіліне енгізіледі. Егер бұл кескін браузерден тыс пайдаланылатын болса, онда браузерде көруге мүмкіндік беретін сілтеме қоса берілуі тиіс. Бұл талаптың Google Maps API-ді қолданатын компаниялардың пайдаланушыларына қатысы жоқ [3].

Google Maps қызметін қолдану мысалында Түркістан қаласының картасы қарастырылады. Картаны жасау үшін, алдымен html құжат дайындалып ол құжатты ашу TWebBrowser компоненті арқылы жүзеге асырылады. Негізгі жұмысты html құжаттағы Javascript орындайды. Google Maps қызметін қолдану үшін келесі Javascript-ні қосамыз:

```
<script type=»text/javascript» src=»http://maps.google.com/maps/api/js?sensor=false»> </script>
```

```
<script type =»text/javascript» src=»v3_epoly.js»></script>
```

Картаны инициализациялау (1-сурет) үшін төмендегі функцияны орындаймыз:

```
function initialize() {
    infowindow = new google.maps.InfoWindow( {
        size: new google.maps.Size(150,50) });
    directionsService = new google.maps.DirectionsService();
    var myOptions = { zoom: 13, mapTypeId: google.maps.MapTypeId.ROADMAP }
    map=new google.maps.Map(document.getElementById(«map_canvas»),
    myOptions);
    address = 'Түркістан'
    geocoder = new google.maps.Geocoder();
    geocoder.geocode( { 'address': address}, function(results, status) {
        map.setCenter(results[0].geometry.location);
    });
}
```



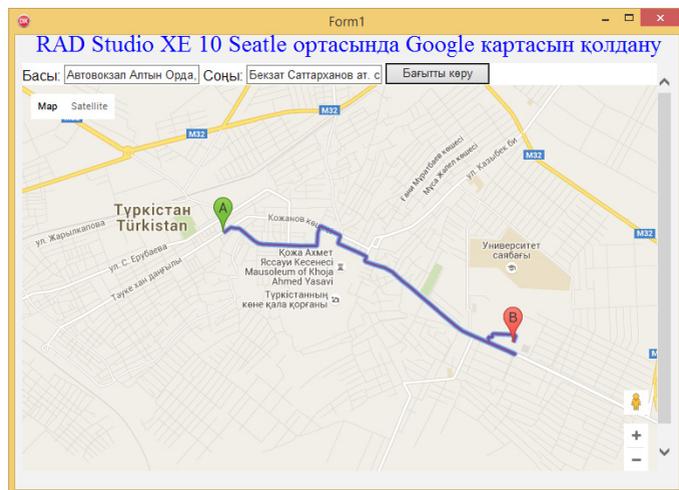
Сурет 1 – Түркістан картасы

RAD Studio XE ортасында форманың құрылу оқиғасына мына процедураны жазамыз:

```
procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject);
begin
    WebBrowser1.Silent:=true;
    form1.WebBrowser1.Navigate(webbrowser1.Path + 'v3_animate.html');
end;
```

Сонымен қатар, А пунктінен В пунктіне жүретін бағытты анимациялау (2-сурет) үшін төмендегі Javascript функциясы орындалады.

```
function calcRoute(){ if (timerHandle) { clearTimeout(timerHandle); }
if (marker) { marker.setMap(null);}
polyline.setMap(null); poly2.setMap(null);
directionsDisplay.setMap(null); polyline = new google.maps.Polyline({
    path: [], strokeColor: '#FF0000',
    strokeWeight: 3 });
poly2 = new google.maps.Polyline({
    path: [],
    strokeColor: '#FF0000',
    strokeWeight: 3
});
```



Сурет 2 – Бағытты анимациялау

### ҚОРЫТЫНДЫ

Осы жасалған қосымшада бастапқы және соңғы бағытты көрсету арқылы жүретін жолды көруге болады. Google Maps ұсынатын қызметтің негізінде қаланың бағыттық көліктердің анықтамалық бағдарламасын және басқада веб қосымшаларды құру мүмкіндіктері бар [4].

### ПАЙДАЛАНҒАН ДЕРЕКТЕР ТІЗІМІ

1 Виртуальный клуб программистов [Электронный ресурс]: API статических карт Google. – режим доступа: <http://www.delphikingdom.com/asp/viewitem.asp?catalogid=1396>.

2 Занимательная web-картография [Электронный ресурс]: API статических карт Google. – режим доступа: <http://webmap-blog.ru/google-maps/static-maps-api-google>.

3 Google Developers [Электронный ресурс]: Руководство по API статических карт Google для разработчиков. – режим доступа: [https://developers.google.com/maps/documentation/staticmaps/?hl=ru#quick\\_example](https://developers.google.com/maps/documentation/staticmaps/?hl=ru#quick_example).

4 [http://www.geocodezip.com/v3\\_animate\\_marker\\_directions.html](http://www.geocodezip.com/v3_animate_marker_directions.html)

Матриал 06.01.16 баспаға түсті.

С. С. Мауленов, Ж. А. Аймешов

### Основные проблемы использования карты Google Maps в приложениях RAD studio XE

Международный казахско-турецкий университет имени Ходжа Ахмета Ясави, г. Туркестан.  
Матриал поступил в редакцию 06.01.16.

S. S. Maulenov, Zh. A. Aimeshov

### The main problems of using Google Maps in RAD studio XE applications

A. Yesvi International  
Kazakh-Turkish University, Turkestan.  
Material received on 06.01.16.

*Цифровые карты являются одной из основных форм представления результатов современных исследований. Традиционные карты строятся вручную, их построение представляет собой весьма трудоемкий процесс. Автоматизировать рутинные процедуры при построении цифровых карт возможно на основе применения новейших информационных технологий – геоинформационных систем и систем управления базами данных, которые позволяют значительно ускорить и повысить эффективность исследований, процесс построения цифровых карт. В этой статье рассматривается один из способов построения цифровой карты с использованием Google Maps.*

*Digital maps are one of the main forms of today's researches results representation. Traditional maps are built manually, their creation is a very labor-intensive process. Using the new information technologies in routine procedures of digital maps creation can help to automate the process. These technologies are geographic information systems and database management systems, which allow to considerably to accelerate and increase the efficiency of researches, the process of digital maps creation. This article deals with one of the methods of digital maps creation using GoogleMaps.*

Секция  
«НАУЧНО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ  
ПО ОТРАСЛЯМ»

УДК 338

**С. К. Бурзумбаева**

PhD в области математики

Евразийский национальный университет имени Л. Н. Гумилева, г. Астана

e-mail: saulenai@yandex.ru

**РАЗРАБОТКА В СРЕДЕ GRETЛ РЕГРЕССИОННОЙ  
МОДЕЛИ РЫНКА ВТОРИЧНОГО ЖИЛЬЯ Г. АСТАНА  
НА ПРИМЕРЕ ДВУХКОМНАТНЫХ КВАРТИР**

*В данной статье исследуются методы регрессионного анализа среды Gretl на примере данных рынка вторичного жилья г. Астана. Полученная модель позволяет провести прогноз стоимости квартиры в зависимости от нескольких параметров.*

*Ключевые слова: регрессионный анализ, множественная регрессия, метод наименьших квадратов, вариация, факторы, гипотеза, эконометрика.*

### ВВЕДЕНИЕ

Построение прогностических моделей является достаточно актуальной задачей в современной экономике. Такая модель позволяет рассчитать различные требуемые параметры и минимизировать риски. Часто на практике применяются методы регрессионного анализа.

Регрессионный анализ – раздел математической статистики, объединяющий практические методы исследования регрессионной зависимости между величинами по статистическим данным.

Основная цель регрессионного анализа состоит в определении связи между некоторой характеристикой  $Y$  наблюдаемого явления или объекта и величинами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые обуславливают, объясняют изменения  $Y$ . Переменная  $Y$  называется зависимой переменной (откликом), влияющие переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называются факторами (регрессорами). Установление формы зависимости, подбор модели (уравнения) регрессии и оценка ее параметров являются задачами регрессионного анализа.

Проблемы построения регрессионных моделей изучают многие ученые. Поэтому необходимо иметь доступный компьютерный инструмент, позволяющий в короткие сроки решить описываемую проблему.

Рассматривает в своих работах особенности использования программного продукта Gretl для построения экономических моделей А. А. Тусков [1]. О. В. Гусевым и А. В. Жуковым [2] рассматривается методика расчета рыночной стоимости квартиры, позволяющая учесть сроки и условия реализации жилья с помощью уравнения множественной регрессии. М. П. Базилевский и С. И. Носков [3] разработали и привели базовые принципы использования регрессионного анализа и планирование эксперимента, позволяющие решить описанные проблемы. Проблемы применения регрессионных моделей в различных видах анализа изучали Р. И. Баженов, А. А. Наумова [4].

Пакет программ GRETL (GNU Regression Econometrics and Time Series Library) представляет собой инструментарий для практической реализации сложных вычислительных процедур эконометрического моделирования. В 2002 году его автор проф. Аллен Коттрелл (США) включил GRETL в проект [www.sourceforge.net](http://www.sourceforge.net), делая его общедоступным, бесплатным продуктом с возможностью дальнейшей доработки открытых кодов (Open Source – свободным программным обеспечением).

### ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В данной статье рассмотрим методы регрессионного анализа среды Gretl на примере данных рынка вторичного жилья г. Астана. При покупке квартиры возникает вопрос, какую сумму правильно потратить, чтобы не оказаться в минусе. Для этого необходимо сравнение таких условий как: площадь, этаж, район, близости и отдаленность от остановок, магазинов и т.д. Попробуем составить обзор необходимых условий для продажи и покупки квартиры с помощью регрессионной модели в среде Gretl. Полученная модель позволяет провести прогноз стоимости квартиры в зависимости от нескольких параметров.

Сбор экспериментальных наблюдений осуществлялся по данным Интернет-сайта [www.krisha.kz](http://www.krisha.kz). При изучении объявлений по продажам были выбраны следующие критерии: адрес, кол-во комнат, этаж, площадь, стоимость. Район – номером сами относительно улиц города (рис.1).

Адрес	Район	Кол-во комнат	Этаж	Площадь	Стоимость
Кудайбердылы 31	4	2,00	20,00	79,00	\$71 000,00
Иманова	2	2,00	3,00	60,50	\$82 000,00
Манаса 6	3	2,00	5,00	51,20	\$42 000,00
Сыганак	3	2,00	2,00	74,00	\$81 000,00
Мурсепова	7	2,00	9,00	52,00	\$52 000,00
Рыскулбекова 16/1	4	2,00	4,00	55,00	\$72 000,00
Астана	1	2,00	4,00	63,00	\$50 000,00
Кошкарбаева	1	2,00	3,00	54,00	\$17 000,00
Республика 76/1	2	2,00	5,00	54,00	\$60 000,00
Женис 77	2	2,00	1,00	40,00	\$35 000,00
Туран 14	3	2,00	5,00	76,00	\$143 000,00
Бейбитшилин 42	2	2,00	5,00	46,00	\$44 000,00
Косшыгуллы 25	5	2,00	1,00	53,00	\$61 000,00
Оршбор	6	2,00	11,00	70,00	\$99 000,00
Сейфуллина 8	2	2,00	7,00	74,00	\$204 000,00
абдуллина 12/2	7	2,00	8,00	67,00	\$75 000,00
Тлендиева 1/2	7	2,00	4,00	57,00	\$69 000,00
Петрова 19/1	5	2,00	4,00	48,00	\$42 000,00
Кордай 75	3	2,00	14,00	52,00	\$51 000,00
Сатпаева 5/1	4	2,00	5,00	55,00	\$55 000,00
Абылай хана 5/3	4	2,00	8,00	65,00	\$89 000,00
Сарайшы 76	1	2,00	22,00	58,00	\$77 000,00
Богенбай Батыра 23/1	2	2,00	4,00	51,00	\$52 000,00
Рыскулбекова 16/3	4	2,00	10,00	30,00	\$60 000,00
Жумабаева 18/1	3	2,00	1,00	51,00	\$46 000,00
Сарыарна	1	2,00	7,00	67,00	\$107 000,00
Алува 36	5	2,00	4,00	46,00	\$43 000,00

Рисунок 1 – Таблица данных

Для построения множественной регрессии, введем обозначения переменных: район –  $x_1$ , кол-во комнат –  $x_2$ , этаж –  $x_3$ , площадь –  $x_4$ , стоимость –  $y$  (рис. 2).

Адрес	x1	x2	x3	x4	y
Кудайбердылы 31	4	2,00	20,00	79,00	\$71 000,00
Иманова	2	2,00	3,00	60,50	\$82 000,00
Манаса 6	3	2,00	5,00	51,20	\$42 000,00
Сыганак	3	2,00	2,00	74,00	\$81 000,00
Мурсепова	7	2,00	9,00	52,00	\$52 000,00
Рыскулбекова 16/1	4	2,00	4,00	55,00	\$72 000,00
Астана	1	2,00	4,00	63,00	\$50 000,00
Кошкарбаева	1	2,00	3,00	54,00	\$17 000,00
Республика 76/1	2	2,00	5,00	54,00	\$60 000,00
Женис 77	2	2,00	1,00	40,00	\$35 000,00
Туран 14	3	2,00	5,00	76,00	\$143 000,00
Бейбитшилин 42	2	2,00	5,00	46,00	\$44 000,00
Косшыгуллы 25	5	2,00	1,00	53,00	\$61 000,00
Оршбор	6	2,00	11,00	70,00	\$99 000,00
Сейфуллина 8	2	2,00	7,00	74,00	\$204 000,00
абдуллина 12/2	7	2,00	8,00	67,00	\$75 000,00
Тлендиева 1/2	7	2,00	4,00	57,00	\$69 000,00
Петрова 19/1	5	2,00	4,00	48,00	\$42 000,00
Кордай 75	3	2,00	14,00	52,00	\$51 000,00
Сатпаева 5/1	4	2,00	5,00	55,00	\$55 000,00
Абылай хана 5/3	4	2,00	8,00	65,00	\$89 000,00
Сарайшы 76	1	2,00	22,00	58,00	\$77 000,00
Богенбай Батыра 23/1	2	2,00	4,00	51,00	\$52 000,00
Рыскулбекова 16/3	4	2,00	10,00	30,00	\$60 000,00
Жумабаева 18/1	3	2,00	1,00	51,00	\$46 000,00
Сарыарна	1	2,00	7,00	67,00	\$107 000,00
Алува 36	5	2,00	4,00	46,00	\$43 000,00

Рисунок 2 – Переименование переменных

Далее необходимо данные таблицы Excel открыть в среде Gretl (рис. 3).

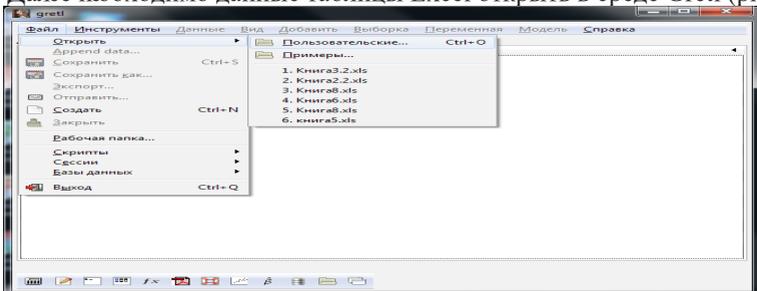


Рисунок 3 – Программа Gretl

В окне появляются переменные, необходимые для построения регрессионной модели (рис. 4).

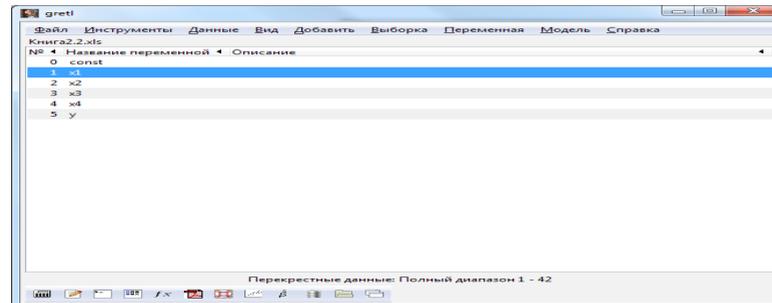


Рисунок 4 – Рабочее окно среды

Просматриваем получившуюся таблицу (рис. 5-6).

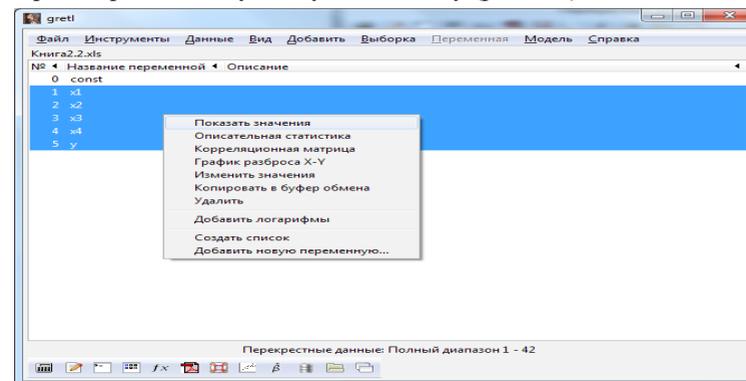


Рисунок 5 – Просмотр значений

	x1	x2	x3	x4	y
Кудайбе	4	2	20	79,0	71000
Иманова	2	2	3	60,5	82000
Манаса 6	3	2	5	51,2	42000
Сыганак	3	2	2	74,0	81000
Мурсепо	7	2	9	52,0	52000
Рыскулбе	4	2	4	55,0	72000
Астана	1	2	4	63,0	50000
Кошкарб	1	2	3	54,0	17000
Республи	2	2	5	54,0	60000
Женис 77	2	2	1	40,0	35000
Туран 14	3	2	5	76,0	143000
Бейбитш	2	2	5	46,0	44000
Кошшаму	5	2	1	53,0	61000
Оршбор	6	2	11	70,0	99000
Сейфулл	2	2	7	74,0	204000
абдулли	7	2	8	67,0	75000
Тлендие	7	2	4	57,0	69000
Петрова	5	2	4	48,0	42000
Кордай 75	3	2	14	52,0	51000
Сатпаев	4	2	5	55,0	55000
Абылай х	4	2	8	65,0	89000
Сарайшы	1	2	22	58,0	77000
Богенба	2	2	4	51,0	52000

Рисунок 6 – Полученная таблица данных

Для решения поставленной задачи переходим к нахождению регрессионной модели методом наименьших квадратов (рис. 7).

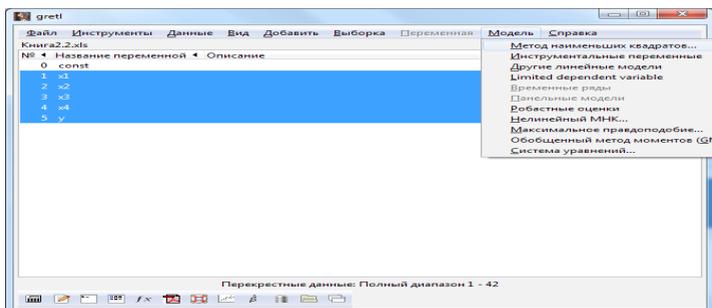


Рисунок 7 – Выбор метода наименьших квадратов

Переходим к построению уравнения (рис. 8)

$$y = a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 + d \cdot x_4 + s.$$

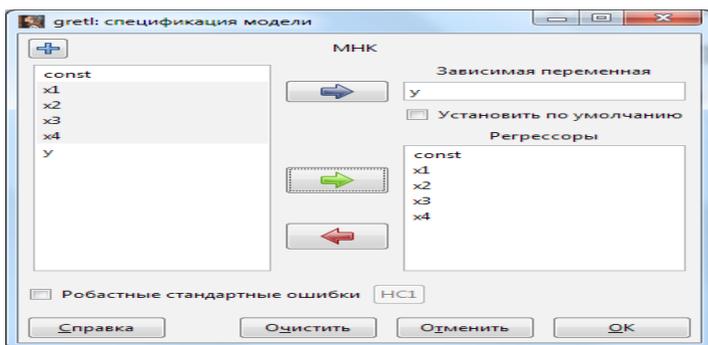


Рисунок 8

Полученная модель и описательные статистики представлены на рисунке (рис. 9).

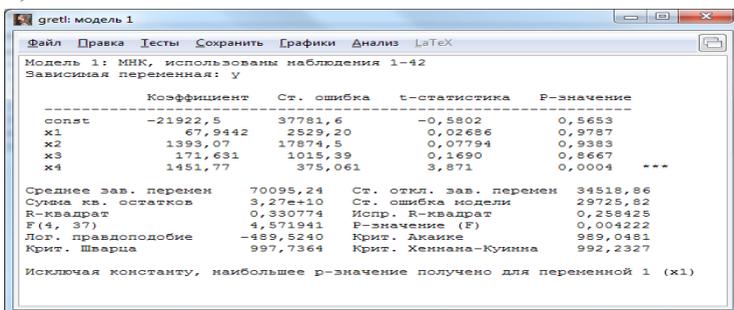


Рисунок 9 – Регрессионная модель

Переходим к решению линейного уравнения

$$y = a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 + d \cdot x_4 + s$$

Для удобства вводим в Excel данные const, x1, x2, x3, x4 (рис.10). Коэффициенты: a – район, b – кол-во комнат, c – этаж, d – площадь.

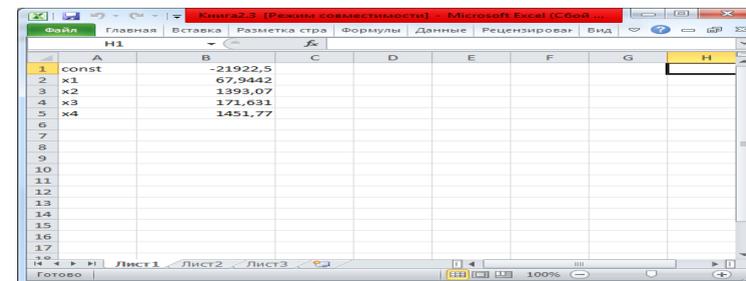


Рисунок 10 – Данные в Excel

По используемой формуле высчитываем стоимость квартир (рис. 9-11).

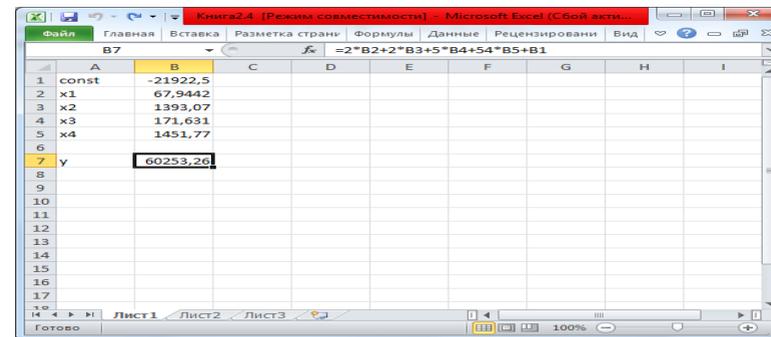


Рисунок 11 – Прогнозируемая стоимость двухкомнатной квартиры

### ВЫВОДЫ

R<sup>2</sup> показывает долю вариации результативного признака под воздействием изучаемых факторов. Следовательно, 33 % вариации зависимой переменной учтено в модели и обусловлено влиянием включенных факторов, 67 % приходится на другие факторы. Однако, чтобы модель считалась достаточно хорошей, коэффициент должен быть выше 80 %. Р-значение – это вероятность ошибки при отклонении нулевой гипотезы, в данном варианте ошибка отклонения 0.004222, по данному критерию модель является значимой.

Результаты проведенного исследования можно использовать в работе риэлтерского агентства, в преподавании студентам дисциплины «Эконометрика».

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 **Тусков, А. А.** Применение Gretl для построения многофакторной модели // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. – 2011. – № 1. – С. 154-159

2 **Гусев, О. В.** Способ идентификации перегрузки с использованием множественной регрессии / О. В. Гусев, А. В. Жуков // Информационная среда вуза XXI века. Материалы VII Международной научно-практической конференции. – Петрозаводск, 2013. – С. 57-61.

3 **Жарков, А. А.** Механизм формирования стоимости квартир на региональном рынке жилья / А. А. Жарков, Н. А. Анисимова // Регион: системы, экономика, управление. – 2009. – № 4. – С. 47-53.

4 **Баженов, Р. И.** Об организации научно-исследовательской практики магистрантов направления «Информационные системы и технологии» // Современные научные исследования и инновации. – 2014. – № 9-2 (41). – С. 62-69.

Материал поступил в редакцию 06.01.16.

*С. Қ. Бургумбаева*

**Екі бөлмелі пәтерлер мысалында Астана қаласында қайталама тұрғын үй нарығының регрессиялық модельді Gretl ортасында жобалау**

Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университеті, Астана қ.

Материал 06.01.16 баспаға түсті.

*S. Burgumbayeva*

**Development of the regression model of the secondary housing market in Astana in Gretl environment on an example of two-bedroom apartments**

L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana.

Material received on 06.01.16.

*Бұл мақалада Астана қаласының қайталама тұрғын үй нарығы мысалында Gretl ортасының регрессиялық талдаудың әдістері зерттелінді. Нәтижесінде алынған модель бірнеше параметрлерге байланысты пәтердің болжамды бағасын есептеуге мүмкіндік береді.*

*In this article the methods of regression analysis in Gretl environment by the example of the secondary housing market of Astana are studied. The resulting model allows to do the forecast of the apartment value depending on several parameters.*

ӨОЖ 512.54.05

**Г. С. Джарасова<sup>1</sup>, Б. Сырнай<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>п.ғ.к., <sup>2</sup>магистрант

С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.

e-mail: <sup>1</sup>yulzhan@mail.ru, <sup>2</sup>bogi-elim\_kz@mail.ru

#### **АЛГОРИТМДЕР ТЕОРИЯСЫН ИНТЕЛЛЕКТУАЛДЫ ЖҮЙЕЛЕРДЕ ҚОЛДАНЫЛУЫНА ҚАТЫСТЫ ТЕРМИНДЕРГЕ ШОЛУ**

*Берілген мақалада студенттердің «Математика» пәні бойынша білім деңгейін, сонымен қоса әдістемелік жабдықтау мен зертханалық сабақтарды жақсартуда компьютерлік модельдеудің негізі, оның түрлері және компьютерлік модельдеуді алгоритмдерді құрудың негізгі кезеңдері қарастырылады.*

*Кілтті сөздер: алгоритм, асимптотикалық талдау, модель, компьютерлік модель, алгоритмдер классификациясы, адекваттылық, алгоритм*

#### КІРІСПЕ

Қазіргі кезде алгоритмдер теориясының негізінде алынған практикалық ұсыныстар программалық жүйелерді жасау мен жобалау саласында кеңінен қолданылуда. Алгоритмдер теориясы алгоритмдердің жалпы қасиеттері мен заңдылықтарын, оларды көрсетудің түрлі формальды модельдерін зерттейтін ғылым саласы. Алгоритм ұғымын формальдау арқылы алгоритмдерді тиімділігі бойынша салыстыруға, эквиваленттілігін тексеруге, қолдану салаларын анықтауға болады.

#### НЕГІЗГІ БӨЛІМ

Алгоритмдер теориясының міндеттеріне есептің алгоритмдік шешімі болмауын формальды түрде дәлелдеу, алгоритм күрделілігін асимптотикалық талдау, күрделілік кластарына сәйкес алгоритмдерді

жіктеу, алгоритмдер сапасын салыстырмалы түрде бағалаудың өлшемдерін жасау және т.б. жатады. 1930-жылдары жасалған алгоритмдердің формальды модельдері (Пост, Тьюринг, Черч), 1950-жылдары жасалған Колмогоров пен Марковтың модельдері тең, өйткені олар бір біріне мына мағынада эквивалентті: бір модельде шешімі табылған проблемалардың кез келген класы, екінші модельде де шешімі болады.

Қазіргі кезде алгоритмдер теориясы негізі 3 бағытта дамып келеді: *Алгоритмнің классикалық теориясы* – есептерді формальды тілдер терминдерімен беру (формулировка задач) проблемасын зерттейді. Есептерді күрделілік кластары бойынша (P, NP, т.б) классификациясын жасайды, есептердің шешімін табу ұғымын енгізілді.

*Алгоритмдерді асимптотикалық талдау теориясы.* Алгоритмнің, соның ішінде рекурсивті алгоритмдердің, орындалу уақытының немесе ресурстарының асимптотикалық бағасын алудың тәсілін қарастырады. Асимптотикалық талдау енгізілетін деректер көлемінің өсуіне байланысты алгоритмдердің ресурстарға қажеттілігін бағалауға мүмкіндік береді. *Есептеу алгоритмдерін практикалық талдау теориясы* тиімді алгоритмдерді таңдау әдістемесін жасау, алгоритмдердің сапасын тексерудің практикалық өлшемдерін іздеу, функцияларды интервалдық талдау, күрделіліктің нақты функцияларын алу және т.б. сияқтарды есептерді шешумен шұғылданады.

Қазіргі заманғы алгоритмдер теориясының даму бағыттары мен шешетін негізгі міндеттері:

- «Алгоритм» ұғымын формальдау және формальды алгоритмдік жүйелерді (есептеулер модельдерін) зерттеу;
- Есептің алгоритмдік шешімі болмайтынын дәлелдеу;
- Алгоритмдердің дұрыстығы мен эквиваленттілігін формальды түрде дәлелдеу;
- Есептерді классификациялау, күрделілігі бар кластарды анықтау және зерттеу;
- Есептің күрделілігінің теориялық төменгі бағасын дәлелдеу;
- Тиімді алгоритмдерді құру әдістерін табу;
- Итерациялық алгоритмдердің күрделілігін асимптотикалық талдау;
- Рекурсивті алгоритмдерді зерттеу және талдау;
- Алгоритмдердің қиындығының нақты функцияларын табу;
- Алгоритмдердің классификациясын жасау;
- Есептер мен алгоритмдердің сыйымдылығы бойынша күрделілігін (жад ресурстары бойынша) зерттеу;

Алгоритмдердің ресурстық тиімділігін салыстырмалы түрде бағалаудың критерийлерін және оларды салыстырмалы талдаудың әдістерін жасау.

Алгоритмдер теориясында алынған нәтижелер екі аспектіде: теориялық және практикалық аспектілерде қолданылады.

*Теориялық аспект:* Есептің алгоритмдік шешімі болатындығын немесе оны шешудің нақты алгоритмі болмайтындығына есепті зерттеу нәтижесінде алгоритмдер теориясының жауап беру мүмкіндігі теориялық аспектіге жатады.

Алгоритмдік шешімі болмайтын есептер Тьюринг машинасын тоқтату есебіне келтіріледі. Ал алгоритмдік шешімі болатын есептер үшін олардың NP-толық есептер класына тиесілі ме екендігі анықталады. Егер тиесілі болса, онда бастапқы деректері үлкен болатын есептердің нақты шешімін алу үшін қанша уақыт кететінін анықтауға немесе оны шешудің жылдам нақты алгоритмі болмайтындығын айтуға мүмкіндік береді.

*Практикалық аспект:* алгоритмдер теориясының, әсіресе асимптотикалық және практикалық талдаудың әдістері мен әдістемелері келесі мүмкіндіктерді береді.

Берілген есепті шешуге арналған алгоритмдер жиынынан жасалатын программалық жүйедегі олардың ерекшелігін ескеретін тиімді алгоритмді таңдауға мүмкіндік береді.

Күрделілік функциясы арқылы күрделі есептерді шешудің уақыттық бағалауларын алады. Белгілі уақыт ішінде қандай да бір есептің шешуі болмайтындығына шынайы баға беріледі [1].

Ақпаратты өңдеу саласындағы маңызды деген есептерін шешудің тиімді алгоритмдерін құру мен жетілдіру. Мысалы: алгоритмді жүзеге асыратын программаның орындалу уақытына немесе пайдаланатын минималды жад көлеміне шектеулер қойылғанда түрлі алгоритмдерден таңдау жасалынады; қиындық функциясы арқылы күрделі есептерді шешу уақыты анықталады; берілген уақыт ішінде есепті шешу мүмкін болмайтындығы шынайы бағаланады. Бұл қазіргі кезде криптографиялық әдістер үшін, ақпаратты өңдеу саласында практикалық жағынан маңызды есептерді шешудің тиімді алгоритмдерін жасау мен жетілдіру үшін аса сұранысқа ие болып отыр.

*Алгоритм* – өңдеудің қарапайым орындалатын тактілерін қолдануға негізделген қандай да бір әдістің нақты және шекті (ақырлы) сипаттамасы. Алгоритм – мүмкін болатын бастапқы деректер класына ортақ есептің шешімін табуға арналған нақты анықталған және орындалатын қарапайым операциялардың ақырлы тізбегінен тұратын, қандай да бір тілде жазылған ақырлы нұсқаулар.

«Алгоритм» ұғымының бірыңғай анықтамасы жоқ. Көптеген анықтамалардың ішінде неғұрлым сәтті берілгені орыс ғалымдары А. Н. Колмогоров пен А. А. Марковтың анықтамалары:

*Анықтама 1. (Колмогоров): «Алгоритм – нақты ережелермен қатаң түрде орындалатын, қандай да бір қадамдардан соң қойылған есептің шешіміне әкелетін есептеулердің кез келген жүйесі»*

*Анықтама 2. (Марков): Алгоритм – өзгертілетін бастапқы деректерден ізделінді нәтижеге әкелетін есептеу процесін анықтайтын нақты ереже.*

Бұл анықтамалардан алгоритмге қойылатын келесі ортақ талаптарды атап өтейік:

– алгоритм қарапайым орындалатын саны шектеулі ережелерден тұруы тиіс, яғни жазбалардың шектеулі болуы талабын қанағаттандыруы тиіс;

– алгоритм шектеулі қадамнан соң есепті шешуі тиіс, яғни әрекеттердің шектеулі болу талабын қанағаттандыруы тиіс;

– алгоритм барлық мүмкін болатын бастапқы деректер үшін біреу ғана болуы керек, яғни әмбебаптық талабын қанағаттандыруы тиіс;

– алгоритм қойылған есептің дұрыс шешімін табуы керек, яғни дұрыс болу талабын қанағаттандыруы тиіс.

Бұл анықтамаларда әрекетті орындаушы көрсетілуі тиіс және ол орындайтын «қарапайым» операцияларға не жататыны нақтылануы тиіс. Алгоритмді әртүрлі формада бейнелеуге, яғни беруге болады. Кейде әрекеттер ретін графикалық түрде көрсету түсінікті болады, ал оны сөзбен сипаттау қиынға түседі. Сондықтан алгоритмнің нақты формальды анықтамасы туралы ұғым арнайы математикалық конструкцияларды – формальды алгоритмдік жүйелер немесе Пост машинасы, Тьюринг машинасы, Черчтің рекурсивті-есептелінетін функциялары сияқты есептеулер модельдерін енгізумен, бұл формализмнің эквиваленттілігі туралы тезистің айтылуымен және «алгоритм» ұғымымен тікелей байланысты болды.

Z есебінің бастапқы деректерінің жиыны –  $DZ$ , ал  $R$  – мүмкін болатын нәтижелер жиыны болсын, онда алгоритм  $DZ \rightarrow R$  бейнелеуін іске асырады деп айтады. Егер алгоритм тек кейбір  $dDZ$  үшін ғана дұрыс нәтиже берсе, онда алгоритм *жеке жағдайдың алгоритмі* деп аталады. Егер алгоритм барлық  $dDZ$  үшін дұрыс нәтиже берсе, онда алгоритм *толық алгоритм* деп аталады.

Қойылған есептің шешімін арифметикалық амалдарды орындауға келтіретін алгоритмдер сандық алгоритмдер деп аталады. Д. Кнут «Искусство программирования. Основные алгоритмы» атты кітапта *алгоритмнің бес маңызды қасиетін* көрсеткен:

1) *Ақырлы болуы* – алгоритмнің ақырлы қадамынан соң аяқталуы тиіс;

2) *Анықтылығы* – алгоритмнің әр бір қадамы нақты анықталуы керек.

3) *Енгізілетін деректердің болуы* – алгоритм жұмысының басына дейін берілетін кірістік деректер болады немесе олар орындалу барысында динамикалық түрде анықталуы мүмкін

4) *Шығыстық деректердің болуы* – алгоритмде кірістік деректермен белгілі бір байланысы бар немесе бірнеше деректер болады.

5) *Тиімділік* [2].

*Алгоритмдер классификациясы.* Күрделілік тұрғысынан алгоритмдердің екі үлкен класы бар қайталауы бар алгоритмдер және рекурсивті алгоритмдер. Бір есепті көптеген алгоритммен шешуге болады. Олардың әрқайсысының жұмысының тиімділігі әртүрлі сипаттаулармен сипатталады. Алгоритмді талдамас бұрын ең алдымен берілген алгоритм есепті дұрыс шешетінін дәлелдеуіміз керек. Егер есепті дұрыс шешпесе, тиімділік мәселесінің мәні жоқ. Егер алгоритм қойылған есепті шешсе, оның қаншалықты тиімді екенін қарастыруымыз керек. Сондықтан оның тиімділігінің анықтау үшін алгоритмдерді талдауымыз қажет. Қайталау алгоритмінің негізінде шартты өрнектер мен цикл жатыр; мұндай алгоритмдерді талдауда циклдың ішінде қолданылатын операция саны мен цикл итерациясының санын бағалау керек.

Рекурсивтік алгоритмдер үлкен есепті фрагменттерге бөледі және әрбір фрагменттерді жеке қолдануға мүмкінлік береді. Осындай алгоритмдерді кейде «бөліп алда біле» алгоритмі деп айтады және оларды қолдану өте тиімді болуы мүмкін. Үлкен есептерді кішіге бөлу жолымен шешу үрдісінде үлкен емес, қарапайым және түсінікті алгоритм құрылады. Рекурсивті алгоритмді талдауда есепті бөлімге бөлуге қажетті операцияның санын санау, әрбір бөлімдегі алгоритмнің орындалуы және есепті толық шешудегі әрбір бөлімнің нәтижесін біріктіру керек. Осы ақпараттарды және неше бөлік екенінің саны, олардың өлшемінен алгоритмнің күрделілігінің рекурренттік қатынасын шығарамыз.

Алгоритмдерді әртүрлі белгілер бойынша жіктеуге болады. Мысалы, жалпы комбинаторлық алгоритмдер, тағы алгоритмдер, максимальды ағынды іздеу алгоритмдері, максимальды жұп сәйкестігін іздеу алгоритмдері, жолды іздеу алгоритмдері, Бұтақтармен жұмыс алгоритмдері, сұрыптау алгоритмдері, сығу алгоритмдері, үлестірілген жүйелер алгоритмдері, операциялық жүйелердегі алгоритмдер, тиімділеу алгоритмдері және т.б.

Есептеу моделіне байланысты сандық, логикалық, продукциялық, нейрожелілік, параллель, полиномдық, құмырсқа, генетикалық және т.б. бөлінеді.

Алгоритмдердің тиімділігі: Алгоритм қандай да бір машинада командалардың жинағы түрінде орындалады. Бір есепті орындауға арналған екі немесе бірнеше алгоритмдердің орындалу жылдамдығын салыстыру үшін қолданылатын критерий (өлшем) *жүйелік тиімділік* деп аталады. Бір компьютерде бірдей деректер жинағымен бұл алгоритмдерді

орындату арқылы олардың орындалуына кеткен салыстырмалы уақытты анықтауға болады. Ол үшін ішкі жүйелік сағат қолданылады.

*Ішкі жүйелік сағатты қолданып уақытты бағалау* бұл бір ғана есептің орындалуына арналған алгоритмдердің әрқайсысының жүйелік тиімділігінің өлшемі болады.

Кейбір алгоритмдердің орындалуында жадқа қойылған шектеулер проблема тудырады. Орындалу барысында ұзақ уақыт сақтау үшін бастапқы көлемді қысу қажет болады. *Қандай да бір алгоритм пайдаланатын ішкі жадтың салыстырмалы санының өлшемі – бұл кеңістіктің тиімділігі (space efficiency)*. Бұл критерий алгоритмді қандай типті компьютер орындай алатынын және алгоритмнің толық жүйелік тиімділігін көрсетеді. Жана компьютерлік жүйелердің жадтарының көлемінің ұлғаюна байланысты бұл критерий маңызды болмай қалды.

Үшінші тиімділік критерийі – бұл *есептеу тиімділігі (computational efficiency)*, ол алгоритмнің ішкі құрылымын қарастырады, оның жасалуын және алгоритмде қолданылатын итерациялар мен меншіктеу операторларын салыстыратын тесттердің санын да талдайды. Бұл өлшем типі нақты компьютерге тәуелсіз және бұл критерий алгоритмнің есептелу күрделілігін  $n$ -ге, яғни коллекциядағы деректер элементтеріне қатысты өлшейді.

Тізімдер мен бұтақтар сияқты коллекциялардың жалпы кластарының деректерін өңдеу үшін алгоритмнің тиімділігінің өлшемі ретінде *салыстыру* қолданылады.

Әдетте күрделі алгоритмнің ең жаман және ең жақсы жағдайлары үшін әртүрлі есептеу тиімділігі болады, сондықтан әр жағдай үшін есептеу тиімділігін өлшеу үшін, яғни алгоритмнің орындалу уақытының өлшемін анықтау үшін Big-0 нотациясын есептейміз [3].

*Big-0 нотациясы.* Алгоритмнің есептеу тиімділігі өңделетін деректердің санымен, яғни алгоритмдегі басты операциялардың санымен анықталады. Бұл операциялар деректің типіне, санына, реттелуіне тәуелді болады. Көп жағдайда сұрыптау алгоритмдерінде (тізімдер мен бұтақтарда) алгоритм тиімділігін өлшемі ретінде салыстыру қолданылады. Ол массив элементтерінің санына тәуелді.

Мысалы массивтегі минимал элементті табу – бұл қарапайым алгоритм, оның негізгі операциясы элементтерді салыстыру.  $n$  элементі бар массив үшін алгоритм  $n-1$  салыстыруды қажет етеді, оның тиімділігінің өлшемі  $n$ -ге пропорционал. Басқа алгоритмдер күрделі. Алмастырып салыстыру алгоритмінде жалпы салыстыру саны:

$f(n) = (n - 1) + (n - 2) + \dots + 3 + 2 + 1 = n(n - 1)/2$  арифметикалық қатармен анықталады.  $f(n)$  функциясы салыстырумен ассоциацияланады. Бұл алгоритмнің салыстыру саны  $n^2$  болады.

Big-0 нотациясын есептеу тиімділігінің өлшемін беру үшін қолданады. Алгоритмнің есептеу күрделілігінің (оны  $f(n)$  функциясы немесе салыстырулар саны дейді) реті  $O(g(n))$ -ге тең болады, мысалы алмастырып сұрыптаудың есептеу күрделілігі  $O(n^2)$  тең. Сзықты алгоритмнің күрделілігі тізімнің размеріне пропорционал болады, оның  $O(g(n))$  – реті  $O(n)$  тең.  $O(n^2)$  реті бар алгоритмдер квадраттық деп аталады. Алгоритмдер деректердің бастапқы сұрыпталуына тәуелді болады. Әдетте Big-0 мәні деректер құрылымының алгоритмі үшін көптеген полиномдық, логарифмдік және экспоненциальдық функциялардың арасынан таңдалады.

Классикалық деректер құрылымы үшін бұл функциялар алгоритмдердің есептелу күрделілігінің жоғарғы шекарасын береді.

Мына кестеде сұрыптау алгоритмдердегі салыстырулар саны  $n^2$  мен  $n \log_2 n$  салыстырылады. Алмастырып сұрыптауға қарағанда  $O(n \log_2 n)$  сұрыптау алгоритмі тиімдірек.

Кесте 1 – Сұрыптау алгоритмдердегі салыстырулар саны

N	$(1/2)N^2$	$S(N) = N^2/2 - N - 2$
10	50	45
100	5.000	4.950
1000	500.000	499.500
5000	12.500.000	12.497.500
10000	50.000.000	49.995.000
N	$N^2$	$N \log_2 N$
5	25	11,6
10	100	33,2
100	10000	664,3
1000	1000000	9965,7
10000	100000000	132877,1

*Алгоритмнің күрделілігі.* Big-0-бағалау алгоритмнің орындалу уақытының өлшемін *(runtime) береді*. Әдетте алгоритмнің жақсы және нашар жағдайлар үшін есептеу тиімділіктері әртүрлі, сондықтан әр нақты жағдай үшін Big-0 мәні есептеледі.

Егер алгоритм реті –  $O(1)$  болса, оның реті коллекциядағы элементтер санына тәуелсіз болады. Бұл алгоритм тұрақты уақыт бірлігі ішінде орындалады, мысалы егер массив соның көрсететін индекс сақталса, массив элементіне мән меншіктеу реті  $O(1)$  болады.

Алгоритм  $O(n)$  *сызықты (linear)*. Оның күрделілігі тізім размеріне пропорционал.

Реті  $\log_2 n$  болатын алгоритмдер *логарифмдік (logarithmic)* деп аталады. Мұндай күрделілік тізімдерді бірнеше рет ішкі тізімдерге  $1/2$ ,

1/4, 1/8 етіп бөлгенде туындайды. Мысалы бинарлық бұтақтарда іздеу алгоритмдерінің күрделілігі орташа және нашар жағдайлар үшін  $O(\log_2 n)$  болады.

Реті  $O(n^2)$  болатын алгоритмдер *квадраттық (quadratic)* деп аталады. Шағын  $n$  үшін ғана практикада қолданылады.  $n$  екіге артқан сайын алгоритмнің орындалу уақыты 4-ке артады. Реті  $O(n^3)$  болатын алгоритмдер өте баяу орындалады, *кубтық (cubic)* уақытты қажет етеді.  $n$  екіге артқан сайын алгоритмнің орындалу уақыты 8 есе артады. Оның мысалына графтарға қолданылатын реті  $O(n^3)$  болатын Уоршел алгоритмі жатады. Күрделілігі  $O(2^n)$  тең алгоритмде *экспоненциальды күрделілік (exponential complexity)* болады. Өте баяу орындалатындықтан өте аз  $n$  үшін қолданылады.

Төмендегі кестеде аталған алгоритмдердің ретінің бағалауы берілген, аз мәнді  $n$  үшін кубтық, экспоненциальдық алгоритмдерді қолдану тиімсіз.

Кесте 2 – Алгоритмдер ретін бағалау

N	$\text{LOG}_2 N$	$N \text{ LOG}_2 N$	$N^2$	$N^3$	$2^N$
2	1	2	4	8	4
4	2	8	16	64	16
8	3	24	64	512	256
16	4	64	256	4096	65536
32	5	160	1024	32768	4294967296
128	7	896	16384	2097152	$3.4 \times 10^{38}$
1024	10	10240	1048576	1073741824	$1.8 \times 10^{308}$
65536	16	1048576	4294967296	$2.8 \times 10^{14}$	ҚОЛДАНАМЫЗ! [5].

### ҚОРЫТЫНДЫ

Қорытындылай келе, қазіргі кезде «алгоритм» ұғымы тек математикалық есеп шешу әдісімен ғана шектелмейді. Оның мағынасы әлдеқайда кең. Әрбір компьютер алдын-ала берілген алгоритммен, яғни жоспарлы жұмыс істей білетінін ұғынып, болашақта көп тәжірибе алатыныма сенімдімін.

Сонымен Алгоритм – информатика мен есептеу техникасының іргелі ұғымдарының бірі. Техникалық құрылғыларды дұрыс пайдалана алу үшін есеп шешу жолы, яғни орындалатын іс-әрекеттердің тізбегі әрі түсінікті, әрі нақты болуы қажет.

### ПАЙДАЛАНҒАН ДЕРЕКТЕР ТІЗІМІ

- 1 Дискретті математика және кибернетиканың математикалық мәселелері. Том 1. – М. : Ғылым, 1974. – 455 б.
- 2 **Аладьев, В. З.** Основы информатики / В. З. Аладьев, М. Л. Шишанов // М., 1999. – 345 с.
- 3 **Новиков, Ф. А.** Дискретті математика. – С. Петербург, М., Харьков, Минск, 2001. – 480 с.
- 4 **Лавров, Н. А.** Жиындар теориясында математикалық логикаға және алгоритмдер теориясына арналған есептер / Н. А. Лавров, Л. А. Максимова // М. : Ғылым, 1975. – 550 б.
- 5 ИФМ журналы. – 2014. – № 5. – 150 б.

Материал 06.01.16 баспаға түсті.

*Г. С. Джарасова, Б. Сырнай*

### Обзор терминов теории алгоритмов, часто используемых в интеллектуальных системах

Павлодарский государственный университет  
имени С. Торайгырова, Павлодар.  
Материал поступил в редакцию 06.01.16.

*G. Jarassova, B. Sirnay*

### Review of the terms of the theory of algorithms commonly used in intelligent systems

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.  
Material received on 06.01.16.

*В данной статье рассматривается компьютерное моделирование, позволяющее улучшить организацию лабораторных занятий, улучшить методическое обеспечение, а также образовательный уровень студентов по дисциплине «Математика», его виды и основные этапы создания компьютерной модели.*

*This article describes computer simulation that allows to improve the organization of laboratory lessons, the methodological support, as well as the educational level of students on discipline «Mathematics», its types and the basic stages of creating a computer model.*

**Б. Ш. Разахова<sup>1</sup>, Т. Н. Скабаева<sup>2</sup>**<sup>1</sup>к.т.н., <sup>2</sup>магистрант

Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университеті, Астана қ.

e-mail: <sup>1</sup>razakhova\_bsh@enu.kz, <sup>2</sup>t.skabayeva@mail.ru**ЭЛЕМЕНТАРЛЫҚ МАТЕМАТИКА ПӘНІ БОЙЫНША  
БІЛІМ ҚОРЫН НОРМАЛДАУ**

*Жұмыста элементарлық математика есептерін шығаруға қатысты білім қорын нормалау мәселесі талқыланды.*

*Кілтті сөздер: элементарлық математика, білім қорын нормалау мәселелер.*

**КІРІСПЕ**

Математика ғылымы жаратылыстану-ғылыми, инженерлік-техникалық және гуманитарлық зерттеулерде негізгі рөл атқарады. Ол білім берудің барлық салаларында сапалы есептеулер мен зерттеулер жүргізудің құралы ғана емес, сонымен қатар ұғымдар мен мәселелерді дұрыс әрі нақты тұжырымдау, пайымдаудың, терең зерттеудің әдісі болып қалыптасты [1]. Элементарлық математика да соның негізінде жатыр.

Элементарлық математика курсының мақсаты студенттердің жоғары математиканы меңгеруіне қажетті мектеп математикасының негізгі ұғымдарын тереңдету, жаңа материалдармен толықтыру, есептер шығаруға, талдау жасауға машықтау, сөз байлығын кеңейту, математикалық терминдерді пайдаланып еркін сөйлеуге, өз пікірін дәлелдеуге үйрету және шығармашылық талабын дамыту мен жұмыс істеуге баулу, жеке тұлға ретінде қалыптастыру болып табылады [2].

Математикалық білім беруді бәсекеге қабілетті, жан-жақты, терең ойлы, зерделі болашақ кәсіби маманды даярлап шығуда іргелі пән ретінде қарастыруға болады. Сонымен бірге элементарлық математика әр түрлі қолданбалы есептерді шешудің бірден-бір көзі ретінде танылады. Сондықтан аталмыш курстың міндеті тек анықтама, теорема, олардың дәлелдеулері, арасындағы байланыс, есептерді шешу тәсілдері сияқты мәліметтерді беріп қана қоймай, оларды өмірмен байланыстыра отырып, нақтылы мәселені шешуге жұмсау, қолдану болып табылады. Сонымен қатар курстың міндетіне студенттерге логикалық ойлау мен математикалық мәдениетін дамыту, таным көкжиегін кеңейту жатады. Ол арқылы студент өздігінен ғылыми-зерттеу жұмыстарын, математикалық талдау жасауды, компьютерде математикалық

модельдеу жолдарын құруды, белгілі бір есепке, мәселеге, құбылысқа математикалық моделін жасау арқылы бағдарламалау жолын тандайды.

Қазіргі таңда отандық және шетел электронды оқу құралдары математиканың әртүрлі саласындағы білімді формальдау негізінде әзірленіп, қолданысқа еніп келеді. Дегенмен, әрбір есебі мен қарастыратын сұрағы белгілі бір алгоритмдерге немесе математиканың белгілі бір саласына қатысты ұғымдар мен түсініктер, теоремалар немесе ой қорытулар арқылы шығаруға не шешуге келмейтін, элементарлық математика бойынша білімді формальдап, электронды оқытуға негіздеп өңдеу сұрағы ашық күйінде қалып отыр.

**НЕГІЗГІ БӨЛІМ**

Отандық мектеп бітірушілердің білімін стандартты бағалау бағытындағы саясатында, мысалы ҰБТ (ЕНТ), ОЖСБ (ВОУД) үшін стандартты жағдайларға бағынбайтын математикалық есептерді шығаруға қатысты білім қорын формальдау әдістері мен модельдерін әзірлеп, олардың негізінде интеллектуалды оқыту жүйесін (ИОЖ) жасау өзекті мәселе болып табылады. ИОЖ сенімділігі мен қабылданатын шешімдер сапасын динамикалық білім қоры мен мультипроцессорлық есептеу ортасында өлшем ақпараттарын өңдеудің жоғары өндіріштік құралдары арқылы арттыруға болады.

Сонымен, элементарлық математика пәні бойынша білімді формальдау және өңдеу мәселесінің өзектілігі келесі ғылыми-әдістемелік сұрақтар арқылы негізделеді:

- 1) элементарлық математика есептерінің стандартты шығару жолдары жоқ;
- 2) стандартты емес әдістерді қолданып математикалық есептерді шығару барысында білім алушының логикалық-математикалық деңгейін бағалау әдістері жоқ;
- 3) стандартты емес есептер мен стандартты емес әдістерді өңдеуге арналған білімдер модельдерін құрудың ақпараттық технологиялары дамыған.

Элементарлық математика курсының мазмұнын формальдау үшін келесі ақпараттық өңдеу сұрақтарының шешімін табу керек:

- элементарлық математика пәні бойынша білімді жинақтау және жинақтаған білімді нормальдау;
- білімді формальдау моделін құру және алгоритмдерін анықтау.

Біз ұсынып отырған жұмысымызда осы екі сұрақтың алғашқысына технологиялық жауап беруге тырысамыз.

Білім қорын нормальдауға қатысты технологиялық мәліметтер. Деректерді модельдеудің үш амалы (иерархты, желілік, реляциялық)

пайдаланушыға байланыстарды көрсету мен өңдеуге мүмкіндік беретін әдістерімен айырылады. Иерархиялық модель – қорлар арасындағы байланысты реттелген графтар арқылы сипаттауға болады. Қандайда бір программалау тілінде иерархиялық деректер қоры құрылымын есептеу үшін тармақ мәліметтер типі пайдаланылады. Желілік модель – деректердің элементтерінің еркін графтар түріндегі өзара байланысын білдіреді. Желілік деректер қорының схемасын сипаттауға екі тип пайдаланылады: жазба және байланыс. Реляциялық модель - деректердің реляциялық моделін JBM фирмасының қызметкері Эдгар Код ұсынған және ол қатынас ұғымына негізделеді [3].

Реляциялық деректер қоры дегеніміз өзара байланысқа түскен екі өлшемді кесте. Әр кесте бір нәрсе, зат, құбылыс т.б. туралы деректі, ақпаратты қамтиды. Мұндай деректер қоры өзара байланысқан реляциялық кестелерден құралады. Деректер қорын жасаудан бұрын қалап алған пәндік сала бойынша сипаттамасы болуы қажет. Олар нақты объектілер мен процесстерді қамтуы керек, қолданушыға қажетті сұраныстарды қанағаттандыратын қажетті ақпаратқа ие болуы керек.

Білім қорын нормалдау – деректер қорымен жұмыс істеуге арналған реляциялық жобалаудың ең алғашқы сатысы болып табылады. Нормалдау кезеңінде қорда сақталатын деректерге қатысты өрістер құрылымы, олардың типтері мен өлшемдері, әр өрісте ақпаратты не үшін сақтайтындығы туралы сұрақтарға жауап алынады. Осындай сипаттау барысында деректер қорын жобалау кезінде пәндік сала қорының құрамы мен құрылысы анықталады. Олар деректер қорына енгізіліп, қолданушыға қажет болған сұранысты қамтамасыз етуі керек. Пәндік сала деректерінің құрылымы ақпараттық-логикалық модель түрінде көрсетілуі мүмкін.

Реляциялық деректер қоры нормалдау теориясы 1974 жылы әзірленген. Бұл теорияға сәйкес алты нормалдық формалар ерекшеленеді, олар бірінші, екінші, үшінші, төртінші, бесінші, нормаль формалар және Бойс-Кодд нормаль формасы деп аталады. Соңғы аталған форма үшінші мен төртінші нормаль формалар арасында жатады.

Деректер қоры нормалданған деп аталады, егер оның кестелері (ең болмағанда, кестелердің басым бөлігі) ең кіші дегенде үшінші нормаль формада көрсетілген болса. Көп жағдайларда кестелер төртінші нормаль формаға дейін нормалданады, ал кейде әдейі нормалдау дәрежесін арттырмайды. Деректер қорын нормалдаудың негізгі мақсаты – ақпараттардың аса көп болуын және қайталануын жою болып табылады. Дұрысында, нормалдау кезінде әрбір мән қорда жалғыз рет қана сақталуы керек және бұл мән қорда сақталатын басқа деректерден есептелініп алынбауы қажет. Әрбір нормаль формалар қанағаттандыруы қажет негізгі талаптарға шолу жасап өтейік.

Бірінші нормаль форма (1НФ):

- қайталанатын (мағынасы бірдей ақпараттарды сақтайтын) бағандарға тыйым салынады;
- бағандар (тізімдегі типтер мәнін сақтайтын) жиынының көп болуына тыйым салынады;
- кесте үшін бастапқы кілтті талап етеді, яғни әрбір жолды бірмәнді анықтайтын баған немесе бағандар комбинациясын анықтауды талап етеді;
- бірінші нормаль формада ДҚ кестесінің әрбір өрісі бөлінбейтін (атомдық) болуын және қайталанатын топтардың болмауын талап етеді. Топтардың қайталанбауы өрісті одан кіші өрістерге бөліктеу мүмкін еместігін білдіреді.

Екінші нормаль форма (2НФ):

- кестенің кілттік емес бағандары алғашқы кілттен тұтастай тәуелді;
- егер кесте 1НФ-да болса және оның алғашқы кілті бір бағаннан тұрса, онда бұл кесте 2НФ-да автоматты түрде болады.

Үшінші нормаль форма (3НФ):

- кестенің кілттік емес бағандары алғашқы кілттен ғана тәуелді, бірақ басқа кілттік емес бағандардан тәуелді болмайды;
- кестені 3НФ-ға келтіру үшін кестеден есептеу бағандарын, яғни мәндерін басқа бағандарға қайсыбір әрекет жасау арқылы алуға болатын бағандарды жою керек.

Бойс-Кодд нормаль форма (БКНФ):

- кестеде тек жалғыз ғана алғашқы кілт болуы керек;
- егер 3НФ-та жолды бірмәнді идентификациялауға мүмкіндік беретін екінші баған (бағандар комбинациясы) бар болса, онда кестені БКНФ-ке келтіру үшін мұндай деректерді басқа кестеге көшіру керек.

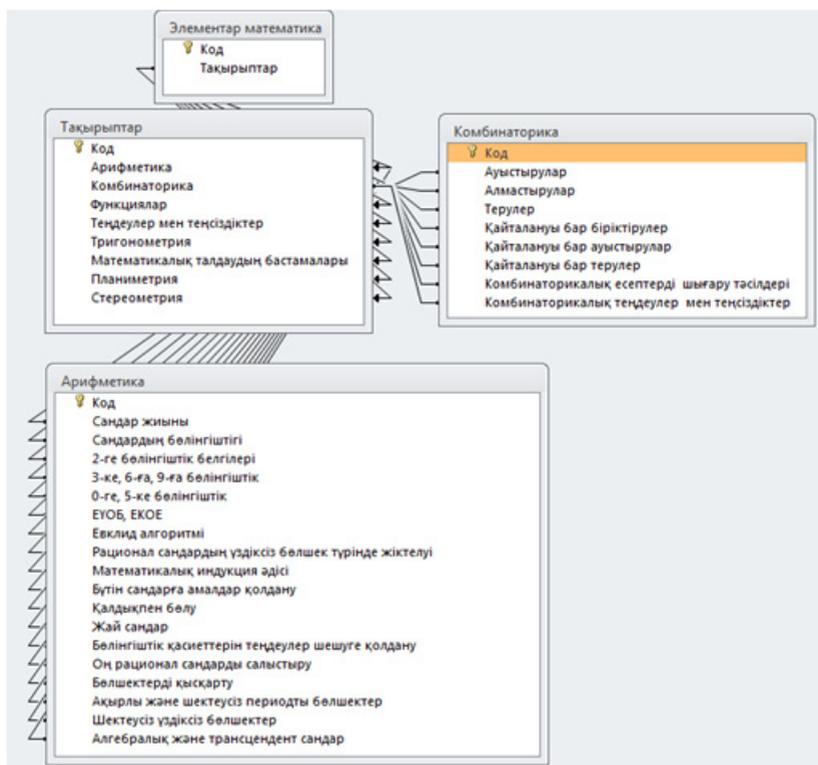
Төртінші нормаль форма (4НФ):

- кестені БКНФ-тен 4НФ-ке келтіру үшін бұл кестедегі көпмәнді тәуелділіктерді жою керек;
- кестедегі кезкелген жолды қосу немесе жою үшін бұл кестедегі басқа жолдарды қосу / жою / модификациялау қажет болмау керек.

Бесінші нормаль форма (5НФ):

- 4НФ-тегі кестені, біріктіргенде бастапқы кестені алуға болатындай, үш немесе одан да көп кестелерге бөлуге мүмкін болса;
- 5НФ-те барлық тәуелді қосылғыштар жойылады;
- көп жағдайларда кестені 5НФ-ке дейін нормалдағаннан практикалық пайда бола бермейді.

Элементарлық математика пәні бойынша білім қоры



Сурет 1

Элементарлық математика мазмұнын 8 тақырыпқа топтауға болады: Арифметика, Комбинаторика, Функциялар, Теңдеулер мен теңсіздіктер, Тригонометрия, Математикалық талдау бастамалары, Планиметрия, Стереометрия [2].

Осы топтар негізгі кестелерді құрайды.

Теңдеулер мен теңсіздіктер	Функциялар
Теңдеулерді түрлендіргенде түбірлердің жоғалуы және бөгде түбірдің пайда болуы	Функция ұғымы мен анықтамасы
Мәндес теңдеулер	Функцияның қандай берілу жолдары
Берілген теңдеудің салдары болып табылатын теңдеулер	Негізгі функциялар
Теңдеулер дизъюнкциясы	Функцияның анықталу облысы
теңдеулерді шешудің қандай әдіс-тәсілдері	Функцияның мәндерінің облысы
Қиас мүшелерін біріктіріп шығару әдісі	Функцияның графигі, тәуелділігі
Теңдеудің екі жағын да бір өрнекке көбейтудің ережелері	Функцияның жоғарыдан, төменнен шектелгендігі
Белгісізді ауыстыру әдісі	Функцияның монотондығы
Қарапайым иррационал теңдеулер	Функцияның жұп, тақтығы
Логарифмдік және керсеткіштік теңдеулер	Функцияның периодтылығы
Потенциалдау әдісі	Функциялардың композициясы
Логарифмдеу әдісі	Кері функция
Жаңа логарифм негізіне көшу әдісі	Функцияның өсу, кемуі
Логарифмнің қасиеттері	Сызықтық функция
Керсеткіштік теңдеулер	Квадраттық функция
Иррационал теңсіздіктер	Дәрежелік функция
Логарифмдік және керсеткіштік теңсіздіктер	Рационал функция
Мәндес теңдеулер мен теңсіздіктер жүйесі	Функция графигін салу тәсілдері
Квадрат теңсіздіктер	Симметриялық түрлендірулер
Екі белгісіз бар бірінші және екінші дәрежелі теңсіздіктер жүйесі	
Бір белгісізді жоғары ретті алгебралық теңсіздіктер	

Математикалық талдаудың бастамалары	Тригонометрия
Функцияның туындысының анықтамасы	$\sin x = a, \cos x = a$ теңдеуін шешу
Туындының геометриялық және физикалық мағынасы	$\operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a$ теңдеуін шешу
Функцияның нүктеде, аралықта дифференциалдануы	$\sin f(x) = a, f(\sin x) = a$ түріндегі теңдеуін шешу
Дифференциалдаудың негізгі ережелері	$\sin x, \cos x$ -ке қатысты біртекті теңдеулер
Негізгі элементарлы функциялардың туындылары	Көмекші бұрышты енгізу арқылы тригонометриялық теңдеуді шешу
Күрделі функцияның туындысы	Белгісізін ауыстыру әдістері
Туындының қолданылуы	Көбейткіштерге жіктеу әдісі
алғашқы функция	Теңдеудің оң және сол жағын бағалау әдісі
Анықталмаған интеграл	Кері тригонометриялық функциялар, графикалары мен қасиеттері
Ньютон-Лейбниц формуласы	Кері тригонометриялық функциялар арасындағы қатыстар
Қисық сызықты трапецияның ауданы	Синустар, косинустар, тангенстер мен котангенстер теңдігі
Қарапайым дифференциалдық теңдеу	Тригонометриялық функциялардың дәрежесін төмендету
Функционалдық теңдеулер	Тригонометриялық теңсіздіктерді шешу жолдары
	Тригонометриялық теңдеулер мен теңсіздіктер жүйесі
	Тригонометриялық теңсіздіктерді түрлеріне қарай жіктеу

Сурет 2

Сонымен, деректерді нормальдау үшін қандай кестелер, өрістер және олардың типтері мен өлшемдерін анықтап алу керек. Содан кейін әрбір кесте 1НФ-ке келтіріледі. Содан кейін алынған кестелер екінші, үшінші нормаль формаларға келтіріледі. Содан кейін ғана қарастырып отырған деректер қоры нормальданды деп айта аламыз.

Нормальдау үдерісінде өзара тәуелді көптеген кестелер алынуы мүмкін. Олардың арасындағы тәуелділіктерді шатастырып алмау керек. Деректерді нормальдау үдерісі кестелердегі деректердің артықтарын жою болып табылады.

Біздің бірінші жақындауымызда алған кестелеріміз 2НФ-ке келтірілген, элементарлық математикадан тақырыптар мен сұрақтар қорының өзі 9 кестелерден тұрады. Бірінші кесте жалпы тақырыптарды, ал қалған кестелер әр тақырыптың атауын сақтап, негізгі сұрақтары бөліктерге бөлшектенеді. Жоғарыда Планиметрия мен Стереометрия тақырыптарын келтірмедік (өйткені, оларды нормальдау үдерісі өзгеше емес). Негізгі кестелердің әрқайсысы 23-ке дейін жолдар камтиды. Демек, келесі алынатын кестелер саны 200-ге дейін жетеді.

ЗНФ болу үшін кестелерде кілттік емес өрістер арасында транзитивтілік тәуелділіктер болмауы керек. Біздің кестелерде кезкелген өрістің мәні басқа өрістерден тәуелді болмауын қамтамасыз ету керек. Алайда, элементарлық математика есептері шығару тәсілдеріне қатысты барлық тақырыптар бойынша әдістерді қамтуды талап етеді. Оның бір мысалы ретінде, Тақырыптар кестесіндегі тәуелділіктерді келесі түрде көрсетуге болады:

Код	1
Арифметика	Сандар жүйесі
Комбинаторика	Ауыстырулар
Функциялар	Функция ұғымы мен анықтамасы
Теңдеулер мен теңсіздіктер	Теңдеулерді түрлендіргенде түбірлердің жоғалуы және бөгде түбірдің пайда болуы
Тригонометрия	сілкіне, соқпа теңдеуін шешу
Математикалық талдудың бастамалары	Функцияның тұндысының анықтамасы
Планиметрия	Планиметрияның негізгі ұғымдары мен аксиомалары: сәуле, нүсінді, бұрыш, бұрыштардың өлшеудің градустық және радиандық шамалары, бұрыштардың жіктелуі
Стереометрия	Көпжақтар: призма, параллелепипед, куб, пирамида

Өрі қарайғы еңбегіміз формальды математикалық әдістер көмегімен реляциялық деректер қорының кестелерін ЗНФ-ке дейін нормалдауға арналады. Нәтижесінде элементарлық математика есептерін шығаруға қатысты білім қорын қайталанбайтын, ақпаратты тиімді үлестіруге мүмкіндік беретін мәселенің шешімін аламыз.

### ҚОРЫТЫНДЫ

Ұсынып отырған жұмысымызда элементарлық математика пәні бойынша білімді формалдау және өңдеу мәселесінің біріншіден – элементарлық математика есептерінің стандартты шығару жолдары, екіншіден – стандартты емес әдістерді қолданып математикалық есептерді шығару барысында білім алушының логикалық-математикалық деңгейін бағалау әдістері туралы технологиялық шешім берілді.

### ПАЙДАЛАНҒАН ДЕРЕКТЕР ТІЗІМІ

1 Жаратылыстану-математикалық бағытта бейіндік оқытудың әдістемелік ерекшеліктері. Әдістемелік құрал – Астана : Ы. Алтынсарин атындағы Ұлттық білім академиясы, 2013. – 89 б.

2 Элементар математикадан математикалық мамандықтарға арналған оқу-әдістемелік кешені / Құраст. Ахметов Д. М. – Өскемен : ШҚМУ баспасы, 2005. – 32б.

3 Базы данных: теория и практика: Учебник для вузов / Б. Я. Советов., В. В. Цехановский, В. Д. Черотовской. – М. : Высшая школа, 2005. – 463 с. ил.

Материал 06.01.16 баспаға түсті.

*Б. Ш. Разахова, Т. Н. Скабаева*

### Нормирование остаточных знаний по элементарной математике

Евразийский национальный университет  
имени Л. Н. Гумилева, г. Астана.

Материал поступил в редакцию 06.01.16.

*B. Razakhova, T. Skabayeva*

### Rationing the residual knowledge in elementary mathematics

L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana.

Material received on 06.01.16.

*В работе рассмотрена проблема нормирования остаточных знаний по решению задач элементарной математики.*

*The paper considers the problem of rationing the residual knowledge for solving the problems in elementary mathematics.*

**Н. С. Уалиев<sup>1</sup>, А. К. Серубай<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>к.ф.-м.н, <sup>2</sup>магистрант

Жетысуский государственный университет имени И. Жансугурова

г. Талдыкорган

e-mail: 140892a@mail.ru

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ КОНЦЕПЦИИ WEB 3.0 В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ**

*Актуальным вопросом современной системы образования является создание условий самостоятельного обучения. В статье рассмотрены вопросы проектирования образовательной среды с использованием современных информационно-коммуникационных технологий в частности применение возможностей концепции Web 3.0, которые способствуют достижению эффективных результатов в образовательном процессе. Интернет ресурсы и технические устройства современного мира расширяют возможности организации учебного процесса. Получение качественного образования с учетом индивидуальных потребностей стало толчком к изменению традиционной системы образования. Раскрыты возможности технологии Web 3.0 для реализации лично-ориентированного обучения.*

*Ключевые слова: Web-технологии, технология Web 3.0, лично-ориентированное обучение, самоорганизация образовательного процесса.*

### **ВВЕДЕНИЕ**

Исследования в области образовательного процесса подвергают критике традиционную систему образования. Процесс внедрения новых технологий в образовательный процесс, использование возможностей средств информационно-коммуникационных технологий позволяет расширить возможности образовательной среды. Новый этап развития образовательной системы формируется в результате разработок в области информационно-коммуникационных технологий, которые за последние десять лет подверглась большим изменениям. В последние годы набор технологий и социальное общение через сеть Интернет перетерпела ряд важнейших изменений в результате, которого произошел переход от простого доступа к технологии до участия в технологии. Разработка и внедрение в образовательный процесс

современных информационно-образовательных ресурсов должны повысить качество обучения, благодаря возможностям: визуализации материала, повышение интерактивности обучения, доступность знаний, оперативный контроль, помощь экспертов.

### **ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ**

Сервисы, предоставляемые Интернет послужили толчком к развитию Web-ориентированных концепций и технологий, что привело современное информационное поле к качественному скачку в поисках и обработке информации. Для выявления особенностей различных поколений Web-технологий необходимо рассмотреть сравнительный анализ существующих версий – Web 1.0, 2.0, 3.0 и их особенности в использовании в образовательном процессе.

Технология Web 1.0 состояние сети Интернет в 90-х годах XX века. Для этого периода характерны параметры, отвечающие начальным этапам становления технологии: уровень компьютерной грамотности пользователей низкий, ограниченное количество Интернет сервисов, медленное подключение. Веб-сайтам первого поколения были присущи следующие основные черты:

- содержимое веб-страниц – статичное;
- разработчики сайта являются одновременно администраторами и создателями контента;
- использование нестандартных тегов, которые поддерживал определенный тип браузера;
- для корректного отображения данных необходимо учитывать версию браузера и разрешение монитора;
- обратная связь осуществлялась благодаря гостевым книгам и чатам.

Условно, окончанием эпохи технологии первого поколения считается 2001 год, произошел обвал акций интернет-компаний. Созданные сайты остались, но в дальнейшем созданные сайты отвечали другим требованиям [1].

Следующий этап становления Web-концепции характеризовался как – методика проектирования систем. Особенностью технологии Web 2.0. является принцип привлечения пользователей. Пользователи не только используют созданный контент, но они играют роль администратора, который может обрабатывать и дополнять уже созданный сайт.

Концепция Web 3.0 предполагает создание «надежного, гибкого, оптимизируемого и при этом «дружественного» по отношению к пользователям набора технологий и стандартов, которые позволили бы любому пользователю, где бы он ни находился, идентифицировать любое находящееся поблизости от него устройство и создать сеть с ним. Это станет возможным даже в отсутствие у него, каких бы то ни было технических знаний» [2].

Суть предложенной концепции заключается в том, что пользователи, являются активными участниками и создателями метаданных. Семантическая сеть, таким образом, решает самую актуальную проблему развития Интернета – поиск значимой информации. Главное отличие сервисов Web 3.0 состоит в коллективной реализации контента, который контролируется экспертным сообществом, тем самым обеспечивая высококачественный образовательный ресурс. Технология Web 3.0. предполагает реализацию специализированных дифференцированных сайтов по областям применения. Web 3.0. представляется как социальное сообщество фундаментальным отличием, которого является автоматический вывод рекомендаций.

В настоящее время технология Web 3.0 получила широкое распространение. Ярчайшими представителями перехода на концепцию технологии Web 3.0 стали такие известные проекты как: Digg (с условием введения модерации и корректировки информационного потока), YouTube и юмористический видеосервис Funny Or Die, а также сервис Google Wave.

Таблица 1 – Сравнение технологий Web 1.0, Web 2.0 и Web 3.0

Параметры характеристик	Web 1.0	Web 2.0	Web 3.0
Общее описание	Интерактивная паутина	Программируемая паутина	Паутина связанных данных
Единица представления	Веб-страница	Веб-приложение	Пространство данных
Единица обмена данными	Адрес страницы (URL)	Адрес веб-приложения (URL)	URI ресурса, сущности, объекта
Представляемые услуги	Поиск (результаты поиска не точны)	Сообщества (блоги в социальных сетях)	Поиск (результаты поиска точны)
Модель развертывания системы	Централизованная	Централизованная, с делегированием части полномочий пользователем (регистрация нового пользователя автоматически приводит к созданию среды для него)	Распределенная, с выделенными централизованными функциями
Модель данных	Логическая (иерархическая, на основе DOM)	Логическая (иерархическая, на основе XML)	Концептуальная (графы RDF)
Пользовательский интерфейс	Динамически генерируемый (server-side) статичный интерфейс (client-side)	Динамически генерируемый (server-side), с возможностью частичного изменения на стороне клиента (XSLT, XQuery/XPath)	Полностью динамический интерфейс, представляемый возможностью самоописания RDF

Запросы данных	Полнотекстовый поиск	Полнотекстовый поиск	Полнотекстовый поиск + поиск в графовых структурах с помощью SPARQL (Structured Graph Pattern Query Language)
Web как средство массовой информации	Представляет мнение автора/издателя	Отражает мнение социальной группы, состоящей из равноправных авторов и комментаторов	Представляет мнение социальной группы, подкрепленное экспертными оценками

Графы RDF (**Resource Description Framework** – среда описания ресурса) – это модель представления данных, которая была разработана консорциумом глобальной сети. Графы RDF является частью концепции семантической паутины.

Ресурсом RDF является сущность. Сущность может быть представлена в виде информационной или неинформационной. Множество RDF-утверждений образует ориентированный граф. Вершинами этого графа являются субъекты и объекты, а рёбра представляют отношения [3].

Семантическая сеть – представляют собой модели хранения понятий (слов, высказываний) в семантической *памяти*. Их организация и структурирование основаны на содержательном описании понятий и слов, обозначающих эти понятия и составляющих содержание семантической памяти.

Пользователь сети, до этого времени единолично создавал контент, по главной идее технологии Web 3.0 с этого момента, данная работа будет проводиться коллективно. Пользователи контента имеет статусы по уровню использования сети и уровню компетентности, появляется новое направление пользователей эксперты области знаний.

Ежедневный информационный поток заполняется различной непроверенной информацией, которая создается пользователями различного уровня знаний, по этой причине стал острым вопрос создания Web-концепции создаваемый профессионалами. Поднять имеющиеся Интернет ресурсы на качественно новый уровень станет возможным, когда профессионалы, эксперты будут проверять изложенные пользователями факты и материалы, редактировать заголовки и ошибки. По сути, будет происходить фильтрация информационного потока.

В условиях нововведений в современном мире не остается без внимания оптимизация учебного процесса с использованием новых подходов и технологий [4].

Переход от традиционных форм обучения к самоорганизуемым. Личностно-ориентированное обучение – направление определителем, которого является самоорганизация образовательного процесса. Цель, которого создание у

обучаемого механизмов самоорганизации, саморазвития, адаптации, становление самобытного личностного образа. Через самостоятельное получение знаний студент контролирует уровень и качество своего образования. Личностно-ориентированное обучение предполагает самостоятельное изучение значительного объема информации, что способствует проникновению новых технологий в образовательный процесс. Возможности новых технологий гораздо шире традиционных форм обучения. Доступность, открытость, интерактивность, коллективизм, социально-коммуникационные сервисы предоставляемые технологией Web 3.0 становятся естественной образовательной средой, целесообразность использования которой в учебных целях не вызывает сомнения.

Для облегчения процесса получения новых знаний необходимо применение концепции технологии Web 3.0, но благодаря данной концепции появляются новые сервисы и технологии, предоставляющие возможности хранения данных и усовершенствованных способов обработки информации – облачные вычисления.

Облачные вычисления – это концепция, которая подразумевает обеспечение повсеместного и удобного доступа к сетевым ресурсам пользователя [5].

Использование технологии Web 3.0. в образовательном процессе является весьма перспективным, поскольку данная технология на начальных стадиях предусматривает защиту от недостоверной информации или некачественных материалов на открытых образовательных ресурсах, возможность редактирования преподавателем, экспертом предоставляемых ресурсов, используемых в обучении.

В связи с развитием систем коммуникаций и доступности сети Интернет благодаря спутниковому и беспроводному соединению стало возможным применение в образовательной системе мобильных технологий. Средства мобильной связи: смартфоны, планшеты и прочее усилили процесс коннекта и расширили возможности пользователей. Обучаемый, в любой точке мира и в удобное время может воспользоваться необходимыми ресурсами, установить связь с экспертом, получить доступ к необходимым библиотекам и хранить данные в облачных вычислениях. Применение мобильных технологий в образовательной системе реализует поддержку электронного непрерывного обучения.

Возможности концепции Web 3.0. в образовательном процессе:

- организация распределенных электронно-образовательных ресурсов;
- передача учебной, методической, научной и справочной информации в текстовом, графическом, звуковом и видео-форматах;
- просмотр медиа составляющих материалов;

- визуальное представление и воспроизведение учебной информации в различных форматах (текст, графика, анимация, звук, видео);
- постоянный доступ к образовательному контенту;
- свободный доступ к учебной, методической и справочной информации с использованием компьютерной техники и Интернет соединения;
- совместная деятельность вне зависимости от географического расположения участников образовательного процесса;
- консультации со специалистами, педагогами и обсуждение материалов;
- оперативная обратная связь;
- организация контроля оценочных мероприятий в электронном формате с возможностью доступа с любого технического устройства (компьютер, смартфон, планшет);
- хранение и резервное копирование информации различных видов;
- организация телеконференций (аудиоконференций и видеоконференций) в режиме реального времени;
- обмен информацией одновременно с большим числом пользователей по определенной теме (форумы, чаты, сообщества);
- организация исследовательской работы научных и учебных центров.

Совместное обучение, по концепции технологии Web 3.0 может осуществляться в различных контекстах. Созданный контент будет ориентирован на многопользовательские сервисы, в его структуре будет легче организовать «групповое обучение».

Технология Web 3.0 предоставляет возможности более быстрой визуализации данных, расширяют возможности взаимодействия в трехмерном пространстве, повышают элементы наглядности материалов всего образовательного процесса. Трехмерный Web позволит студентам наглядно увидеть все лабораторные эксперименты и практические работы, что повысит уровень практических умений.

Проекты образования 3.0 ставят перед собой следующие цели:

- повышения качества образования. Улучшение результатов обучения. Самостоятельная обработка нового материала и получение новых знаний;
- создание реального и виртуального форм общения между участниками образовательного процесса;
- обеспечение методической рефлексии благодаря работе экспертной комиссии контента.

Технология Web 3.0 акцентирует особое внимание на:

- повышение мотивации обучения;
- информатизацию образовательного процесса, включая все структурные подразделения. Использование электронных журналов, дневников, электронных учебников, развитие дистанционных технологий.

- обеспечение сетевого взаимодействия, участие в разработке и применении образовательного сегмента, использование сетевых сообществ.
- вариативность и дифференцированность содержания образования;
- использование в образовательном процессе исследовательских и игровых технологий [6].

#### ВЫВОДЫ

Концепция технологии Web 3.0 предполагает изменение архитектуры сетевого взаимодействия в соответствие с требованиями современного мира и системы образования в частности. Сеть, созданная экспертами, ведет к повышению качества информации и избавляет от недостоверной, что соответствует концепции технологии.

На основе проведенного анализа можно сделать вывод, что применение в образовательном процессе технологии Web 3.0 является целесообразным. Активно вовлекая в образовательный процесс всех его участников, технология предоставляет возможности организации учебного контента отвечающий требованиям и задачам пользователя. Повышение мотивации к обучению, расширение возможностей визуального представления задач, доступность, открытость предоставляемая технологией Web 3.0 изменяет представление о сети Интернет.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 **Трайнев, В. А.** Новые информационные коммуникационные технологии в образовании / В. А. Трайнев, В. Ю. Теплышев, И. В. Трайнев // М. : «Дашков и К», 2013. – 2-изд. – 320 с.
- 2 **Бакалов, В. П.** Дистанционное обучение. Концепция, содержание, управление / В. П. Бакалов, Б. И. Крук, О. Б. Журавлева // Изд. : Горячая Линия – Телеком, 2008. – 108 с.
- 3 **Голицына, И. Н.** Мобильное обучение как новая технология в образовании / И. Н. Голицына, Н. Л. Половникова // Educational Technology & Society. – 14(1). – 2011.
- 4 **Зенкина, С. В.** Педагогические основы ориентации информационно-коммуникационной среды на новые образовательные результаты // Дисс. д-ра пед. наук. – М., 2007.
- 5 **Зенкина, С. В.** Информационно-коммуникационная среда, ориентированная на новые образовательные результаты // М., 2007.
- 6 Mark Watson Scripting Intelligence: Web 3.0 Information, Gathering and Processing. – Apress, 2009. – 351 p.

Материал поступил в редакцию 06.01.16.

*H. C. Уалиев, А. Қ. Серубай*

**Оқу үдерісінде Web 3.0 тұжырымдамасының мүмкіндіктерін зерттеу**

І. Жансүгіров атындағы

Жетісу мемлекеттік университеті, Талдықорған қ.

Материал 06.01.16 баспаға түсті.

*N. S. Ualiyev, A. K. Serubay*

**Research of the possibilities of the concept of Web 3.0 in educational process**

I. Zhansugurov Zhetysu State University, Taldykorgan.

Material received 06.01.16.

*Заманауи білім беру жүйесінің өзекті мәселесі өз бетінше білім алу. Мақалада ақпараттық-коммуникациялық технологияларды пайдалана отырып білім беру ортасын жобалау мәселелері қарастырылған атап айтқанда Web 3.0 тұжырымдамасының мүмкіндіктерін қолдану, олар білім беру үдерісінде тиімді нәтижелерін қол жеткізуге ықпал етеді. Қазіргі әлемнің Интернет ресурстары мен техникалық құрылғылары оқу процесін ұйымдастыру мүмкіндіктерін кеңейтуде. Жеке қажеттіліктерін ескере отырып сапалы білім алу дәстүрлі білім беру жүйесінің өзгеруіне түрткі болды. Жеке бағыттап оқытуды жүзеге асыру үшін Web 3.0 технологиясының мүмкіндіктері анықталған.*

*The topical issue of modern system of education is independent learning. In the article the questions of designing of the educational environment with the use of modern information and communication technologies, in particular the use of the concept of Web 3.0, which contributes to the achievement of effective results in the educational process. Internet resources and technical devices of the modern world extend the capabilities of the educational process. Quality education tailored to individual needs was the impetus to change the traditional system of education. The potentialities of Web 3.0 technologies for the implementation of student-centered learning are revealed.*

**ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ**  
**НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ПГУ ИМЕНИ С. ТОРАЙГЫРОВА**  
**«ВЕСТНИК ПГУ. Серия физико-математическая»**

Редакционная коллегия просит авторов при подготовке статей для опубликования в журнале руководствоваться следующими правилами.

Научные статьи, представляемые в редакцию журнала, должны быть оформлены согласно базовым издательским стандартам по оформлению статей в соответствии с ГОСТ 7.5-98 «Журналы, сборники, информационные издания. Издательское оформление публикуемых материалов», пристатейных библиографических списков в соответствии с ГОСТ 7.1-2003 «Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления».

Статьи должны быть поданы для опубликования в строгом соответствии со следующими правилами:

**1. ПО СТРУКТУРЕ САМОЙ СТАТЬИ:**

В журнал принимаются статьи набранные на компьютере, напечатанные на одной стороне листа с межстрочным интервалом 1,5, с полями 30 мм со всех сторон листа, электронный носитель со всеми материалами в текстовом редакторе «Microsoft Office Word (97, 2000, 2007, 2010) для WINDOWS».

Статья должна содержать:

**УДК** по таблицам универсальной десятичной классификации (шрифт 14 кегль, не жирными заглавными буквами)

**Сведения об авторах** статьи должны содержать И. О. Фамилия на следующей строке ученую степень, ученое звание, место работы (учебы), город (страна для зарубежных авторов) на следующей строке e-mail:

(ФИО прописными буквами жирным шрифтом, абзац 1 см по левому краю, шрифт 14 кегль; остальное не жирным шрифтом)

**Заголовок статьи** должен отражать содержание статьи, тематику и результаты проведенного научного исследования. В заголовок статьи необходимо вложить информативность, привлекательность и уникальность научного творчества автора (не более 12 слов, заглавными буквами, жирным шрифтом, абзац 1 см по центру, шрифт 14 кегль, на трех языках: русский, казахский, английский)

**Аннотация** – краткая характеристика назначения, содержания, вида, формы и других особенностей статьи. Должна отражать основные и ценные, по мнению автора, этапы, объекты, их признаки и выводы проведенного исследования. (рекомендуемый объем аннотации – 30-60 слов, прописными буквами, нежирным шрифтом 12 кегль, абзацный отступ слева и справа 1 см, на трех языках: русский, казахский, английский)

**Ключевые слова** – набор слов, отражающих содержание текста в терминах объекта, научной отрасли и методов исследования. (Рекомендуемое количество ключевых слов – 5-7, количество слов внутри ключевой фразы – не более 3, оформляется как аннотация, на одном языке – языке статьи).

**Основной текст статьи** излагается в определенной последовательности его частей, включает в себя:

слово **ВВЕДЕНИЕ** / КІРІСПЕ / INTRODUCTION (нежирными заглавными буквами, шрифт 14 кегль, в центре)

Необходимо отразить результаты предшествующих работ уче-ных, что им удалось, что требует дальнейшего изучения, какие есть альтернативы (если нет предшествующих работ – указать приоритеты или смежные исследования). Освещение библиографии позволит отгородиться от признаков заимствования и присвоения чужих трудов. Любое научное изыскание опирается на предыдущие (смежные) открытия ученых, поэтому обязательно ссылаться на источники, из которых берется информация. Также можно описать методы исследования, процедуры, оборудование, параметры измерения, и т.д. (нежирными прописными буквами, шрифт 14 кегль, не более 1 страницы)

слова **ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ** / НЕГІЗГІ БӨЛІМ / MAIN PART (нежирными заглавными буквами, шрифт 14 кегль, в центре)

Это отражение процесса исследования или последовательность рассуждений, в результате которых получены теоретические выводы. В научно-практической статье описываются стадии и этапы экспериментов или опытов, промежуточные результаты и обоснование общего вывода в виде математического, физического или статистического объяснения.

При необходимости можно изложить данные об опытах с отрицательным результатом. Затраченные усилия исключают проведение аналогичных испытаний в дальнейшем и сокращают путь для следующих ученых. Следует описать все виды и количество отрицательных результатов, условия их получения и методы его устранения при необходимости.

Проводимые исследования предоставляются в наглядной форме, не только экспериментальные, но и теоретические. Это могут быть таблицы,

схемы, графические модели, графики, диаграммы и т.п. Формулы, уравнения, рисунки, фотографии и таблицы должны иметь подписи или заголовки. *(нежирными прописными буквами, шрифт 14 кегль, не более 3-8 страниц, формулы следует набирать в Microsoft Equation Editor; иллюстрации, перечень рисунков представляются в формате TIF или JPG с разрешением не менее 300 dpi.)*

слово **ВЫВОДЫ / ҚОРЫТЫНДЫ / CONCLUSION** *(нежирными заглавными буквами, шрифт 14 кегль, в центре)*

Собираются тезисы основных достижений проведенного исследования. Они могут быть представлены как в письменной форме, так и в виде таблиц, графиков, чисел и статистических показателей, характеризующих основные выявленные закономерности. Выводы должны быть представлены без интерпретации авторами, что дает другим ученым возможность оценить качество самих данных и позволит дать свою интерпретацию результатов *(нежирными прописными буквами, шрифт 14 кегль, не более 1 страницы).*

слова **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ / ПАЙДАЛАНҒАН ДЕРЕКТЕР ТІЗІМІ / REFERENCES** *(Нежирными заглавными буквами, шрифт 14 кегль, в центре, не более 5-20 ссылок: книг, статей, интернет-сайтов используемых в статье. Очередность источников определяется следующим образом: сначала последовательные ссылки, т.е. источники на которые вы ссылаетесь по очередности в самой статье, затем дополнительные источники, на которых нет ссылок – т.е. источники, которые не имели место в статье, но рекомендованы вами для кругозора читателям, как смежные работы, проводимые параллельно.)*

## 2. ПО СЕКЦИЯМ:

**СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИКА»** – принимаются статьи теоретического и прикладного характера узкой направленности. К ним, например, относятся статьи следующего характера: доказательства полученных новых утверждений или новые способы доказательств известных утверждений, обобщение результатов, их сравнение и анализ; получение новых решений известных задач математики или формулировка (постановка) новых задач и способов их решения; приложение известных теоретических и практических математических исследований в смежных отраслях как физика, информатика, биология, химия и т.д.

**СЕКЦИЯ «ФИЗИКА»** – принимаются статьи теоретического и прикладного характера. К ним, например, относятся статьи следующего характера: построение математической и компьютерной модели физических процессов, новых методов решения; обобщение известных результатов, их

сравнение и анализ; физическое описание или сравнение явлений природы, встречающихся в астрономии, биологии, химии, инженерии и т.д.

**СЕКЦИЯ «ИНФОРМАТИКА».** К ним, например, относятся статьи следующего характера: компьютерная реализация математических задач, физических, экономических, химических, биологических и т.п. процессов; составление программных продуктов для реализации социальных, экологических, демографических и других проектов.

**СЕКЦИЯ «НАУЧНО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ОТРАСЛЯМ»** (не путать с методикой преподавания). К ним относятся статьи следующего характера: отслеживание, анализ, сравнение теоретических и прикладных исследований в области математики, физики, информатики; обзор и разработка программных средств, форм организации обучения для развития и стимулирования научной деятельности в образовательных учреждениях и т.п.

## ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

Все статьи должны сопровождаться двумя рецензиями доктора или кандидата наук.

Редакция не занимается литературной и стилистической обработкой статьи. При необходимости статья возвращается автору на доработку. За содержание статьи несет ответственность Автор. Статьи, оформленные с нарушением требований, к публикации не принимаются. Датой поступления статьи считается дата получения редакцией ее окончательного варианта.

Статьи публикуются по мере поступления.

Периодичность издания журналов – четыре раза в год (ежеквартально).

Статью (бумажная, электронная версии, оригинал квитанции об оплате) следует направлять по адресу: 140008, Казахстан, г. Павлодар, ул. Ломова, 64, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, Издательство «Кереку», каб. 137.

Тел. 8 (7182) 67-36-69, (внутр. 1147), факс: 8 (7182) 67-37-05.

E-mail: kereky@mail.ru

Оплата за публикацию в научном журнале составляет 5000 (Пять тысяч) тенге.

**Наши реквизиты:**

РГП на ПХВ Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова РНН 451800030073 БИН 990140004654	РГП на ПХВ Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова РНН 451800030073 БИН 990140004654
АО «Цеснабанк» ИИК KZ57998FTB00 00003310 БИК TSESKZK A Кбе 16 Код 16 КНП 861	АО «Народный Банк Казахстана» ИИК KZ156010241000003308 БИК HSBKZKZK X Кбе 16 Код 16 КНП 861

**ОПИСАНИЕ СТАТЬИ ИЗ  
СБОРНИКА НАУЧНЫХ ТРУДОВ КОНФЕРЕНЦИЙ**

<b>К-во авторов</b>	<b>Примеры</b>
1	1 <b>Тургумбаев, М. Ж.</b> О коэффициентах двойных рядов Фурье по мультипликативным системам // Материалы III Республиканской научной конференции по теории приближения и вложения функциональных пространств. – Караганда, 1998. – С. 140-144.
2 и более	1 <b>Данилова, Н. Е.</b> Моделирование процессов в следящем приводе с исполнительным двигателем постоянного тока при независимом возбуждении / Н. Е. Данилова, С. Н. Ниссенбаум // Инноваций в образовательном процессе: сб. тр. науч.-практич. конф. – Чебоксары: ЧПИ (ф) МГОУ, 2013. – Вып. 1Г. – С. 158-160.

**ОБРАЗЦЫ ОФОРМЛЕНИЯ БИБЛИОГРАФИИ**

**ОПИСАНИЕ КНИГ**

<b>К-во авторов</b>	<b>Примеры</b>
1	1 <b>Эльсгольц, Л. Э.</b> Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления: [учебник]. – М. : Наука, 1965. – 424 с. 2 <b>Фихтенгольц, Г. М.</b> Курс дифференциального и интегрального исчисления: [учебник]. В 3-х томах. Т. 1. – 7-е изд. стер. – М. : Наука, 1970. – 607 с.
2 и более	1 <b>Луговая, Г. Д.</b> Функциональный анализ. Специальные курсы: [учебное пособие] / Г. Д. Луговая, А. Н. Шерстнев. – М. : ЛКИ, 2008. – 255 с. 2 <b>Канторович, Л. В.</b> Функциональный анализ: [учебник] / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – 2-е изд., перераб. – М. : Наука, 1977. – 741 с. 3 <b>Виленкин, Н. Я.</b> Дифференциальные уравнения: [учебное пособие] / Н. Я. Виленкин, М. А. Доброхотова, А. Н. Сафонов. – М. : Просвещение, 1984. – 176 с.

**ОПИСАНИЕ СТАТЬИ ИЗ НАУЧНОГО ЖУРНАЛА**

<b>К-во авторов</b>	<b>Примеры</b>
1	1 <b>Рахимжанова, А. К.</b> О политике безопасности компьютерных сетей в корпоративных инфраструктурах // Вестник ПГУ. Серия физико-математическая. – 2013. – №2. – С. 98-103.
2 и более	1 <b>Зацепин, П. М.</b> Комплексная безопасность потребителей эксплуатационных характеристик строений / П. М. Зацепин, Н. Н. Теодорович, А. И. Мохов // Промышленное и гражданское строительство. – 2009. – № 3. – С. 42.

Теруге 14.03.2016 ж. жіберілді. Басуға 28.03.2016 ж. қол қойылды.  
Форматы 70x100 1/16. Кітап-журнал қағазы.  
Көлемі шартты 6,9 б.т. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.  
Компьютерде беттеген М. А. Шрейдер  
Корректорлар: А. Р. Омарова, З. С. Исакова  
Тапсырыс № 2829

Сдано в набор 14.03.2016 г. Подписано в печать 28.03.2016 г.  
Формат 70x100 1/16. Бумага книжно-журнальная.  
Объем 6,9 ч.-изд. л. Тираж 300 экз. Цена договорная.  
Компьютерная верстка М. А. Шрейдер  
Корректоры: А. Р. Омарова, З. С. Исакова  
Заказ № 2829

«Кереку баспасынан басылып шығарылған  
С. Торайғыров атындағы  
Павлодар мемлекеттік университеті  
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

«КЕРЕКУ» баспасы  
С. Торайғыров атындағы  
Павлодар мемлекеттік университеті  
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.  
67-36-69  
e-mail: kereku@psu.kz