С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік
университетінің ғылыми журналы
Научный журнал Павлодарского государственного
университета им. С. Торайгырова

1997 жылы құрылган
Основан в 1997 г.

Ï Ì Ó
ÕÀÁÀÐ Ø ÛÑÛ

ÂÅÑÒ Í ÈÊ Ï ÃÓ

ФИЗИКО - МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

1 2015

Научный журнал Павлодарского государственного университета
имени С. Торайгырова

СВИДЕТЕЛЬСТВО
о постановке на учет средства массовой информации
№ 4533-Ж
выдано Министерством культуры, информации и общественного согласия
Республики Казахстан
31декабря 2003 года

МАЗМҰНЫ

МАЗМҰНЫ

CONTENT

УДК 372.851.06

Б. Н. Дроботун[1], В. А. Гайдак[2]

[1]д.п.н., профессор, кафедра «Математика и информатика», [2]студент, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар

СТОУНОВСКОЕ ПРОСТРАНСТВО БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ СОВЕРШЕННЫХ ДИЗЪЮНКТИВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ (I)

В данной работе определяется булева алгебра совершенных дизъюнктивных нормальных форм от n переменных, предлагается описание стоуновского пространства этой алгебры, исходя из полученного описания прослеживаются основные этапы доказательства теоремы Стоуна о представлении булевых алгебр и даются ее аналоги применительно к конечным булевым алгебрам.

Ключевые слова: Буллева алгебра, Стоуновское пространство, изоморфизм, совершенная дизъюнктивная нормальная форма, идеал, ультрафильтр.

1. Теория булевых алгебр представляет в настоящее время одну из наиболее развитых областей современной алгебры, имеющей многочисленные применения как теоретического, так и прикладного характера. Аккумулируя в себе возможности проявления алгебраических, порядковых и топологических структур, концепция булевой алгебры представляет собой идеальное поле для развертывания и мотивационно-обусловленного изучения многих понятий, канонических конструкций и технологий, свойственных классическим алгебрам, на более высоком уровне их абстрактного восприятия.

Одной из наиболее ярких и значимых теорем теории булевых алгебр является теорема Стоуна о представлении, согласно которой любая булева алгебра с точностью до изоморфизма, является подалгеброй булевой алгебры всех подмножеств некоторого непустого множества, т.е. алгеброй множеств. Эта теорема занимает одно из центральных мест в многообразии теорем, описывающих, с точностью до изоморфизма, абстрактно заданные математические объекты «на языке» структурных свойств конкретных(традиционно обусловленных) классических систем. Явившись формальным обобщением аналогий, свойственных классическим теоретико-множественным, логико-алгебраическим и теоретико-вероятностным представлениям и превознося их на более высокий уровень абстрактного

восприятия, концепция булевой алгебры нашла, благодаря теореме Стоуна, свою универсальную характеризацию «на языке» теории множеств, т.е. «на языке» классических представлений, породивших эту концепцию.

В данной статье, как первой части работы, посвященной получению аналогов теоремы Стоуна о представлении булевых алгебр для класса конечных булевых алгебр и описанию стоуновских пространств этих алгебр, определяется булева алгебра совершенных дизъюнктивных нормальных форм от n переменных и, применительно к этой алгебре, дается характеризация базовых понятий и построений, сопутствующих доказательству теоремы Стоуна.

В статье используется общепринятая теоретико-множественная и логико-алгебраическая терминология и символика [1 – 4].

2. Класс булевых алгебр определяется, как класс алгебраических систем сигнатуры $\sigma = \langle F_1^2; F_2^2; F_3^1; c_1; c_2 \rangle$ и задается аксиоматически посредством следующих предложений этой сигнатуры:

1. $(\forall x)(\forall y)(F_1^2(x; y) = F_1^2(y; x))$;

2. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(F_1^2(F_1^2(x; y); z) = F_1^2(x;\ F_1^2(y; z)))$;

3. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(F_1^2(x; F_2^2(y; z)) = F_2^2(F_1^2(x; y)\ F_1^2(x; z)))$;

4. $(\forall x)(\forall y)(F_3^1(F_1^2(x; y)) = F_2^2(F_3^1(x); F_3^1(y))$;

5. $(\forall x)\ (F_1^2(x; x) = x)$;

6. $(\forall x)(\forall y)(F_1^2(F_2^2(x; F_3^1(x)); y) = y$;

7. $(\forall x)F_3^1(F_3^1(x)) = x$;

8. $(\forall x)F_2^2(x; (F_3^1(x)) = c_1$;

9. $(\forall x)F_1^2(x; (F_3^1(x)) = c_2$.

Для получения конкретной булевой алгебры из этого класса на непустом множестве M задается такая интерпретация φ функциональных и константных символов сигнатуры σ, при которой аксиомы 1-9 превращаются в истинные высказывания, т.е. становятся тождествами на этом множестве. В частности, если, посредством интерпретации φ, функциональным символам $F_1^2; F_2^2$ и F_3^1 поставлены в соответствие бинарные алгебраические операции

$\cap$; $\cup$ и унарная алгебраическая операция C, а константным символам c_1 и c_2 - выделенные элементы α и β множества M, то эти операции и элементы должны быть определены на множестве M таким образом, чтобы соответствующие аксиомам 1 – 9 высказывания:

1′ $(\forall a \in M)(\forall b \in M)(a \sqcup b = b \sqcup a)$;

2′ $(\forall a \in M)(\forall b \in M)(\forall c \in M)((a \sqcup b) \sqcup c = a \sqcup (b \sqcup c))$

3′ $(\forall a \in M)(\forall b \in M)(\forall c \in M)(a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c))$;

4′ $(\forall a \in M)(\forall b \in M)((C(a \sqcup b) = C(a) \sqcap C(b))$;

5′ $(\forall a \in M)(a \sqcup a) = a)$;

6′ $(\forall a \in M)(\forall b \in M)(a \sqcap C(a)) \sqcup b = b)$;

7′ $(\forall a \in M)\ C(C(a)) = a)$;

8′ $(\forall a \in M)(a \sqcap C(a) = \alpha)$;

9′ $(\forall a \in M)(a \sqcup C(a) = \beta)$,

являлись тождествами на M. В частности, согласно тождествам 1′ - 3′, операция $\cup$ должна быть коммутативной, ассоциативной, а операции $\cup$ и $\cap$ должны быть связаны законом дистрибутивности. В дальнейшем выделенные элементы α и β, следуя исторически сложившейся традиции, будут обозначаться через 0 и 1. Таким образом, булева алгебра – это алгебраическая система

$\boldsymbol{M} = \langle M; \sqcup; \sqcap; C; 0; 1\rangle$

сигнатуры σ, основные операции и выделенные элементы которой удовлетворяют свойствам 1′ - 9′.

К числу базовых понятий теории булевых алгебр относится понятие атома [2,3]. Это понятие определяется следующим образом.

Пусть $\boldsymbol{B} = \langle B; \sqcup; \sqcap; C; 0; 1\rangle$ – произвольная булева алгебра. На основном множестве B этой алгебры вводится бинарное отношение $\sqsubseteq$ по следующему правилу:

$$(\forall a; b)((a \sqsubseteq b) \Leftrightarrow (a \sqcap b = a)). \qquad (1)$$

Нетрудно проверить, что это отношение является отношением частичного порядка, при этом элементы 0 и 1 являются, соответственно, наибольшим и наименьшим элементами частично упорядоченного множества $\langle B; \sqsubseteq\rangle$.

Ненулевой элемент $\alpha \in B$ называется атомом булевой алгебры B, если

$$(\forall b \in B)((b \sqsubseteq a) \Rightarrow ((b = a) \text{или} (b = 0))). \qquad (2)$$

3. Одним из традиционных примеров булевых алгебр является алгебра

$\boldsymbol{B}(M) = \langle B(M); \cup; \cap; \overline{\square}; \emptyset; M\rangle$,

где: $B(M)$ – булеан непустого множества M, т.е. множество всех подмножеств этого множества: $\cup$; $\cap$ и $^{-}$ – обычные теоретико-множественные операции объединения, пересечения и взятия дополнения (элементов из $\emptyset$ и M в множестве $B(M)$, как интерпретации функциональных символов F_1^2; F_2^2 и F_3^1 сигнатуры σ, соответственно. Константные символы c_1 и c_2 этой сигнатуры интерпретируются посредством элементов $\emptyset$ и M из множества $B(M)$, которые играют в $B(M)$ роли выделенных элементов. Аксиомы 1 – 9 при указанной интерпретации примут вид известных теоретико-множественных (соотношений) тождеств. В частности, аксиомы 3 и 4 примут вид равенств:

$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$ и $C(x \cup y)\ C(x) \cap C(y)$,

верных при любых $x; y; z \in B(M)$, т.е. тождеств на $B(M)$, которые могут быть доказаны, к примеру, методом включений.

Если $M = \{a_1; a_2; \dots; a_t\}$ – конечное t–элементное множество, то булеан $B(M)$ этого множества содержит 2^t подмножеств множества M, при этом, как нетрудно видеть, атомами булевой алгебры

$\boldsymbol{B}(M) = \langle B(M); \cup; \cap; \overline{\square}; \emptyset; M\rangle$

являются одноэлементные подмножества $\{a_i\}$ множества M, $i = 1; 2; \dots t$, и любое подмножество $A = \{a_{i_1}; a_{i_1}; \dots; a_{i_t}\}$ этого множества, $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_t \le k$, является объединением конечного числа атомов:

$A = \cup_{j=1}^{t} \{a_{i_j}\}$.

Взяв, в качестве множества M, n – ую декартову степень множества $E = \{0; 1\}$, т.е. множество

$E^n = \{\tilde{\sigma}^n = (\sigma_1; \sigma_2; \dots; \sigma_n) / \sigma_i \in E, i = 1; 2; \dots; n\}$ –

двоичных наборов длины n, получим булеву алгебру

$\boldsymbol{B}(E^n) = \langle B(E^n); \cup; \cap; \overline{\square}; \emptyset; E^n\rangle$.

Применительно к этой булевой алгебре, роль отношения $\subseteq$ будет играть обычное отношение $\subseteq$ – теоретико-множественного включения, а атомами этой булевой алгебры, как отмечалось выше, будут являться одноэлементные подмножества $\{\tilde{\sigma}^n\}$ множества E^n. Так как число двоичных наборов длины n равно 2^n, то эта булева алгебра имеет 2^n атомов и, следовательно, является конечной 2^{2^n} – элементной булевой алгеброй.

4. В работе [5] определяется булева алгебра совершенных дизъюнктивных нормальных форм (булева алгебра С.Д.Н.Ф.) от переменных $X_1; X_2; \dots; X_n$, как некоторый изоморфный образ алгебры Линденбаума $L_n/\sim_P$ для исчисления высказываний.

Ниже предлагается непосредственное (прямое) определение алгебры С.Д.Н.Ф.

Запись двоичного набора $(\sigma_1;\sigma_2;\dots;\sigma_n)$, в дальнейшем, будет сокращаться до записи $(\sigma_1;\sigma_2;\dots;\sigma_n)$. С каждым двоичным набором $\tilde{\sigma}^n=(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n)$ связывается натуральное число

$$\gamma(\tilde{\sigma}^n)=\sum_{i=1}^{n}(2^{n-i}\cdot\sigma_i),$$

которое называется номером этого набора. На множестве E^n определяется бинарное отношение $\le_л$ по следующему правилу:

$$(\forall\tilde{\sigma}^n\in E^n)(\forall\tilde{\delta}^n\in E^n)((\tilde{\sigma}^n\le_л\tilde{\delta}^n)\Leftrightarrow(\gamma(\tilde{\sigma}^n)\le\gamma(\tilde{\delta}^n))).$$

Нетрудно видеть, что отношение $\le_л$ задает на множестве E^n линейный порядок. Расположение двоичных наборов из E^n в порядке возрастания их γ номеров будем называть, далее, стандартным.

Пусть $\tilde{\sigma}^n=(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n)\in E^n$. Положим:

$$\boldsymbol{A}^{\tilde{\sigma}^n}=\boldsymbol{A}^{\tilde{\sigma}^n}(X_1;X_2;\dots;X_n)=X_1^{\sigma_1}\&X_2^{\sigma_2}\&\dots\&X_n^{\sigma_n},$$

где $X_i^{\sigma_i}=\begin{cases}X_i,\text{если }\sigma_i=1\\ \bar{X}_i,\text{если }\sigma_i=0\end{cases}$, $i=1;2;\dots;n$, т.е. $\boldsymbol{A}^{\tilde{\sigma}^n}$ - формула алгебры высказываний от переменных $X_1;X_2;\dots;X_n$. Формулу $\boldsymbol{A}^{\tilde{\sigma}^n}$ будем записывать в виде $X_1^{\sigma_1}X_2^{\sigma_2}\dots X_n^{\sigma_n}$, опуская знак & (логического умножения). С каждым подмножеством π множества E^n свяжем формулу

$$\boldsymbol{A}_\pi=\boldsymbol{A}_\pi(X_1;X_2;\dots;X_n)=\vee_{\tilde{\sigma}^n\in\pi}\boldsymbol{A}^{\tilde{\sigma}^n}(X_1;X_2;\dots;X_n) \qquad (3)$$

алгебры высказываний. При этом, если $\pi=\emptyset$. То будем считать, что $\boldsymbol{A}_\emptyset(X_1;X_2;\dots;X_n)$ – логическая константа 0.

Формулы вида (3), соответствующие непустым подмножествам π множества E^n, называются совершенными дизъюнктивными нормальными формулами (С.Д.Н.Ф.)

Следуя общепринятой практике, операцию $\vee$ будем называть логическим сложением и, в соответствии с этим, подформулы $\boldsymbol{A}^{\tilde{\sigma}^n}(X_1;X_2;\dots;X_n)$ формулы (3) будем называть логическими слагаемыми.

Имеет место следующее утверждение [6].

Теорема 1. Для любой, не тождественно равной 0 формулы $\boldsymbol{A}(X_1;X_2;\dots;X_n)$, существует равносильная ей С.Д.Н.Ф. $\boldsymbol{B}(A_1;A_2;\dots;A_n)$, при этом,

$$\boldsymbol{B}(X_1;X_2;\dots;X_n)=\vee_{\tilde{\sigma}^n=(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n)\in\pi_A}X_1^{\sigma_1}X_2^{\sigma_2}\dots X_n^{\sigma_n},$$

где $\pi_A=\{(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n)/((\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n)\in E^n)\&(\boldsymbol{A}(\sigma_1;\sigma_2;\dots;\sigma_n)=1)\}$.

Очевидно, что формула

$$\boldsymbol{A}_{\pi_A}(X_1;X_2;\dots;X_n)=\vee_{\tilde{\sigma}^n=(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n)\in\pi_A}X_1^{\sigma_1}X_2^{\sigma_2}\dots X_n^{\sigma_n} \qquad (4)$$

находится по формуле $\boldsymbol{A}(X_1;X_2;\dots;X_n)$ однозначно с точностью до следования логических слагаемых $X_1^{\sigma_1}X_2^{\sigma_2}\dots X_n^{\sigma_n}$, $(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n)\in\pi_A$.

С целью обеспечения однозначности представления не тождественно равной нулю формулы $\boldsymbol{A}(X_1;X_2;\dots;X_n)$ посредством равносильной ей С.Д.Н.Ф. $\vee_{(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n)\in\pi_A}X_1^{\sigma_1}X_2^{\sigma_2}\dots X_n^{\sigma_n}$ будем предполагать, что логические слагаемые в формуле (4) следуют в порядке возрастания их γ- номеров, т.е. в стандартном порядке расположения двоичных наборов, соответствующих этим слагаемым.

На множестве

$$\boldsymbol{A}_{E^n}^{\square}=\{\boldsymbol{A}_\pi(X_1;X_2;\dots;X_n)/\pi\in E^n\}$$

определим бинарные операции $\cap$; $\cup$ и унарную операцию C по следующим правилам:

1. $\boldsymbol{A}_{\pi_1}(X_1;\dots;X_n)\sqcup\boldsymbol{A}_{\pi_2}(X_1;\dots;X_n)=\boldsymbol{A}_{\pi_1\cup\pi_2}(X_1;\dots;X_n)$;
2. $\boldsymbol{A}_{\pi_1}(X_1;\dots;X_n)\sqcap\boldsymbol{A}_{\pi_2}(X_1;\dots;X_n)=\boldsymbol{A}_{\pi_1\cap\pi_2}(X_1;\dots;X_n)$;
3. $\mathrm{C}\,(\boldsymbol{A}_{\pi_1}(X_1;X_2;\dots;X_n))=\boldsymbol{A}_{E^n\setminus\pi_1}(X_1;X_2;\dots;X_n)$

для любых $\pi_1;\pi_2;\pi\in B(E^n)$.

К примеру, если $n=3$, $\pi_1=\{(000);(001);(111)\}$ и $\pi_2=\{(001);(011);(110);(111)\}$, то

1′ $\boldsymbol{A}_{\pi_1}\sqcup\boldsymbol{A}_{\pi_2}=\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3\vee\bar{X}_1\bar{X}_2X_3\vee\bar{X}_1X_2X_3\vee X_1X_2\bar{X}_3\vee X_1X_2X_3$;

2′ $\boldsymbol{A}_{\pi_1}\sqcap\boldsymbol{A}_{\pi_2}=\bar{X}_1\bar{X}_2X_3\vee X_1X_2X_3$;

3′ $\mathrm{C}(\boldsymbol{A}_{\pi_1})=\bar{X}_1X_2\bar{X}_3\vee\bar{X}_1X_2X_3\vee X_1\bar{X}_2X_3\vee X_1\bar{X}_2\bar{X}_3\vee X_1X_2\bar{X}_3$.

Отсюдаследует,чтосистема $\boldsymbol{A}_{E^n}^{\square}=\langle\boldsymbol{A}_{E}^{\square};\sqcup;\sqcap;\mathrm{C};0;1\rangle$,где $0=\boldsymbol{A}_\emptyset(X_1;X_2;\dots;X_n)$ и $1=\boldsymbol{A}_{E^n}(X_1;X_2;\dots;X_n)$ является алгеброй сигнатуры $\sigma=\langle F_1^2;F_2^2;F_3^1;c_1;c_2\rangle$ при соответственной интерпретации символов этой сигнатуры на основном множестве A(E^n) этой системы.

Нетрудно проверить, что эта алгебра является булевой алгеброй.

Проверим, к примеру, что аксиома 4, при вышеуказанной интерпретации сигнатуры σ, выполняется на системе $\boldsymbol{A}_{E^n}^{\square}$.

Применительно к этой интерпретации, для $x=\boldsymbol{A}_{\pi_1}$; $y=\boldsymbol{A}_{\pi_2}$, , аксиома 4 примет вид:

$$\mathrm{C}(\boldsymbol{A}_{\pi_1}\sqcup\boldsymbol{A}_{\pi_2})=(\,\mathrm{C}(\boldsymbol{A}_{\pi_1})\sqcap\mathrm{C}(\boldsymbol{A}_{\pi_2})).$$

Покажем, что это равенство действительно имеет место:

$$\mathrm{C}(\boldsymbol{A}_{\pi_1}\sqcup\boldsymbol{A}_{\pi_2})\overset{①}{=}\mathrm{C}(\boldsymbol{A}_{(\pi_1\cup\pi_2)})\overset{②}{=}\boldsymbol{A}_{E^n\setminus(\pi_1\cup\pi_2)}\overset{③}{=}$$
$$=\boldsymbol{A}_{(E^n\setminus\pi_1)\cap(E^n\setminus\pi_2)}\overset{④}{=}\boldsymbol{A}_{E^n\setminus\pi_1}\sqcap\boldsymbol{A}_{E^n\setminus\pi_2}\overset{⑤}{=}\mathrm{C}(\boldsymbol{A}_{\pi_1})\sqcap\mathrm{C}(\boldsymbol{A}_{\pi_2})). \qquad (5)$$

Заметим, что в цепочке равенств (5):

– переходы ① и ④ сделаны на основе определений 1. и 2. операций $\cup$ и $\cap$, соответственно;

– переходы ② и ⑤ - на основе определения 3. операции C;

– переход ③ сделан на основе применения закона де Моргана $E^n \backslash (\pi_1 \cup \pi_2) = (E^n \backslash \pi_1) \cap (E^n \backslash \pi_2)$_2) для алгебры множеств.

Проверка остальных аксиом осуществляется аналогичным образом.

5. Дадим характеризацию отношения $\sqsubseteq$ и понятия атома применительно к булевой алгебре $\boldsymbol{A}_{E^n}^{\square} = \langle A_{E^n}^{\square}; \sqcup; \sqcap; C; 0; 1 \rangle$ – совершенных дизъюнктивных нормальных форм.

Предложение 1. Пусть $\boldsymbol{A}_{\pi_1}; \boldsymbol{A}_{\pi_2} \in A_{E^n}^{\square}$. Тогда

$$(\boldsymbol{A}_{\pi_1} \sqsubseteq \boldsymbol{A}_{\pi_2}) \Leftrightarrow (\pi_1 \subseteq \pi_2).$$

Доказательство. $(\boldsymbol{A}_{\pi_1} \sqsubseteq \boldsymbol{A}_{\pi_2}) \Leftrightarrow^{①} (\boldsymbol{A}_{\pi_1} \sqcap \boldsymbol{A}_{\pi_2} = \boldsymbol{A}_{\pi_1}) \Leftrightarrow^{②}$

$$\Leftrightarrow^{②} (\boldsymbol{A}_{\pi_1 \cap \pi_2} = \boldsymbol{A}_{\pi_1}) \Leftrightarrow^{③} (\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1) \Leftrightarrow^{④} \pi_1 \subseteq \pi_2 \qquad (6)$$

Отметим, что в цепочке равносильных переходов (6):

– переход ① обусловлен определением (1) отношения $\sqsubseteq$;

– переход ② – определением операции $\cap$ на множестве $A_{E^n}^{\square}$;

– переход ③ – однозначностью определения формулы $\boldsymbol{A}_\pi$ по подмножеству π множества E_n.

– переход ④ – определениями теоретико-множественных операции $\cap$ – пересечения и отношения $\sqsubseteq$ – включения.

Предложение 2. Формула A_π является атомом булевой алгебры $\boldsymbol{A}_{E^n}^{\square}$ тогда и только тогда, когда $\pi = \{\tilde{\sigma}^n\}$ для некоторого двоичного набора $\tilde{\sigma}^n \in E^n$.

Доказательство: Пусть A_π является атомом булевой алгебры $\boldsymbol{A}_{E^n}^{\square}$. Тогда, согласно определения (2) имеем:

$$(\boldsymbol{A}_{\pi'} \sqsubseteq \boldsymbol{A}_\pi) \Rightarrow (\boldsymbol{A}_{\pi'} = \boldsymbol{A}_\pi) \text{ или } (\boldsymbol{A}_{\pi'} = 0)) \qquad (7)$$

для любой формулы $\boldsymbol{A}_{\pi'} \in \boldsymbol{A}_E^{\square}$.

Так как $\boldsymbol{A}_{\pi'} \neq 0$, то $\pi \neq \emptyset$, т.е. найдется хотя бы один набор $\tilde{\sigma}^n \in \pi$, такой, что

$$\{\tilde{\sigma}^n\} \subseteq \pi. \qquad (8)$$

Из включения (8), с учетом предложения 1, получаем:

$$\boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}^n\}} \sqsubseteq \boldsymbol{A}_\pi,$$

т.е. посылка имеющего место импликативного соотношения (7) является верной для формулы $\boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}^n\}}$ взятой в качестве A_(π^'). Следовательно, верным является и заключение этого соотношения, т.е. $\boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}^n\}} \sqsubseteq \boldsymbol{A}_\pi$ или $\boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}^n\}} = 0$. Т.к. $\boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}^n\}} \neq 0$, то остается только возможность $\boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}^n\}} = \boldsymbol{A}_\pi$, т.е. $\pi = \{\tilde{\sigma}^n\}$.

Пусть теперь π={δⁿ} для некоторого δⁿ ε Eⁿ. Покажем, что A_π – атом, т.е. что для любого $\boldsymbol{A}_{\pi'} \in E^n$ из того, что

$$(\boldsymbol{A}_{\pi'} \sqsubseteq \boldsymbol{A}_\pi) \Rightarrow ((\boldsymbol{A}_{\pi'} = \boldsymbol{A}_\pi) \text{или } (\boldsymbol{A}_{\pi'} = 0)).$$

Действительно, пусть $\boldsymbol{A}_{\pi'} \in E^n$ и $\boldsymbol{A}_{\pi'} \sqsubseteq \boldsymbol{A}_\pi$. Тогда, согласно (1), получаем $\pi' \subseteq \pi = \{\tilde{\sigma}^n\}$. Отсюда следует, что $\pi' = \{\tilde{\sigma}^n\}$ или $\pi = \emptyset$, т.е. $\boldsymbol{A}_{\pi'} = \boldsymbol{A}_\pi$ или $\boldsymbol{A}_{\pi'} = 0$.

6. Известно, что число атомов конечной булевой алгебры определяет тип ее изоморфизма, т.е. если конечные булевы алгебры B_1 и B_2 имеют одно и тоже число атомов, то они изоморфны, при этом, любое биективное отображение множества атомов первой булевой алгебры на множество атомов второй булевой алгебры может быть продолжено до изоморфизма.

Нетрудно видеть, что отображение φ´, из множества атомов булевой алгебры $A(E^n)$ на множество атомов булевой алгебры $B(E^n)$, определенное по правилу:

$$\varphi'(\boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}^n\}}) = \{\tilde{\sigma}^n\}, \qquad (9)$$

для любого атома $A\{\delta^n\} \varepsilon A_E n$, является биективным и, следовательно, может быть продолжено до изоморфизма алгебры $A(E^n)$ на алгебру $B(E^n)$.

Дадим описание этого изоморфизма. Заметим, что если $\boldsymbol{A}_\pi \in A_{E^n}^{\square}$ и

$\pi = \{\tilde{\sigma}_1^n; \tilde{\sigma}_2^n; \dots; \tilde{\sigma}_t^n\}$, то

$$\boldsymbol{A}_\pi = \boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}_1^n\}} \sqcup \boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}_2^n\}} \sqcup \dots \sqcup \boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}_t^n\}}. \qquad (10)$$

Представление (10), имеющее место для любого элемента $\boldsymbol{A}_\pi \in A_{E^n}^{\square}$, предопределяет механизм распространения биекции φ´, на все множество $A_{E^n}^{\square}$. А именно, определим отображение $\varphi : A_{E^n}^{\square} \to B(E^n)$, следующим образом:

$$\varphi(\boldsymbol{A}_\pi) = \varphi'(\boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}_1^n\}}) \cup \varphi'(\boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}_2^n\}}) \cup \dots \cup \varphi'(\boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}_t^n\}}) \qquad (11)$$

Тогда из равенства (10) с учетом определения (9) – отображения φ´, будем иметь:

$$\varphi(\boldsymbol{A}_\pi) = \{\tilde{\sigma}_1^n\} \cup \{\tilde{\sigma}_2^n\} \cup \dots \cup \{\tilde{\sigma}_t^n\} = \{\tilde{\sigma}_1^n; \tilde{\sigma}_2^n; \dots; \tilde{\sigma}_t^n\} = \pi.$$

Отсюда получаем следующее утверждение.

Предложение 3. Отображение $\varphi : A_{E^n}^{\square} \to B(E^n)$, определенное по правилу

$$(\forall \boldsymbol{A}_\pi \in A_E^{\square})(\varphi(\boldsymbol{A}_\pi) = \pi)$$

является изоморфным отображением булевой алгебры $A_E n$ на булеву алгебру $B_E n$.

Доказательство. Очевидно, что отображение φ биективно. Проверка того, что это отображение «сохраняет» операции также не вызывает затруднений. Покажем, к примеру, что

$$\varphi(\boldsymbol{A}_{\pi_1} \sqcup \boldsymbol{A}_{\pi_2}) = \varphi(\boldsymbol{A}_{\pi_1}) \cup \varphi(\boldsymbol{A}_{\pi_2}).$$

Действительно,

$$\varphi(\boldsymbol{A}_{\pi_1} \sqcup \boldsymbol{A}_{\pi_2}) =^{①} \varphi(\boldsymbol{A}_{\pi_1 \cup \pi_2}) =^{②} \pi_1 \cup \pi_2 =^{③} \varphi(\boldsymbol{A}_{\pi_1}) \cup \varphi(\boldsymbol{A}_{\pi_2}) \qquad (12)$$

Заметим, что в цепочке равенств (12):

– переход ① осуществлен на основе определения операции $\cup$;

– переходы ② и ③ – на основе определения отображения φ.

«Сохранность» остальных операций и выделенных элементов проверяется аналогичным образом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Сикорский, Р. С.** Булевы алгебры. – М. : Мир, 1969. – 376 с.

2 **Владимиров, Д. А.** Булевы алгебры. – М. : Наука, 1969. – 320 с.

3 **Гончаров , С. С.** Счетные булевы алгебры и разрешимость. – Новосибирск : Научная книга, 1966. – 364 с.

4 **Гончаров, С. С., Дроботун, Б. Н., Никитин, А. А.** Методические аспекты изучения алгебраических систем в высшем учебном заведении. Новосибирск : изд-во НГУ, 2007. – 251 с.

5 **Гончаров, С. С., Дроботун, Б. Н., Никитин, А. А.** Основания дидактики обучения логико-алгебраическим дисциплинам в высшей школе. Часть I . Научно-теоретические и идейно-методологические предпосылки. Моногр. – Новосибирск : изд-во Учреждения Российской академии образования «Институт педагогических исследований одаренности детей», 2011. – 275 с.

6 **Яблонский, С. В., Гаврилов, Г. П., Кудрявцев, В. П.** Функции алгебры логики и классы Поста. – М. : Наука, 1966. – 112 с.

Материал поступил в редакцию 19.03.15.

Б. Н. Дроботун, В. А. Гайдак

Кемел дизьюнктивті нормальді формалардың буль алгебрасының стоундық кеңістігі (I)

С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар.
Материал 19.03.15 редакцияға түсті.

B. N. Drobotun, V. A. Gajdak

A Stone space of the Boolean algebra of perfect disjunctive normal forms (I)

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.
Material received on 19.03.15.

Берілген мақалада – Стоун теоремасымен байланысты, негіздік ұғымдардың және канондық конструкциялардың демонстрациялық-методологиялық көрсетілу туралы жұмыстың бірінші бөлігі қарастырылған. Осы мақалада кемел дизьюнктивті нормальді формалардың буль алгебрасы анықталады, ақырлы буль алгебраларға қолданылған Стоун теоремасының аналогтары қарастырылады.

This article is the first part of the work devoted to the demonstration and methodological support of basic concepts and canonical structures related to Stone's theorem on the representation of Boolean algebra. In this article there is defined a Boolean algebra of perfect disjunctive normal forms and considered the Stone's theorem analogues applied to a finite Boolean algebra.

УДК 372.851.06

Б. Н. Дроботун[1], В. А. Гайдак[2]

[1]д.п.н., профессор, кафедра «Математика и информатика», [2]студент, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар

СТОУНОВСКОЕ ПРОСТРАНСТВО БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ СОВЕРШЕННЫХ ДИЗЪЮНКТИВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ (II)

Данная статья представляет собой вторую часть работы, посвященной демонстрационно-методологическому сопровождению базовых понятий и канонических конструкций, связанных с теоремой Стоуна о представлении булевых алгебр. В этой статье даётся описание стоуновского пространства булевой алгебры совершенных дизъюнктивных нормальных форм, и, исходя из полученного описания, прослеживаются основные этапы доказательства теоремы Стоуна о представлении булевых алгебр.

Ключевые слова: Буллева алгебра, Стоуновское пространство, изоморфизм, совершенная дизъюнктивная нормальная форма, идеал, ультрафильтр.

7. Данная статья представляет собой вторую часть работы, посвященной получению аналогов теоремы Стоуна о представлении булевых алгебр для класса конечных булевых алгебр и описанию стоуновских пространств этих алгебр применительно к построенной в работе [1] булевой алгебре совершенных дизъюнктивных нормальных форс (С.Д.Н.Ф.) от *n* переменных.

В этой статье дается описание понятий идеала и фильтра применительно к булевой алгебре С.Д.Н.Ф. и на примере этой алгебры предлагается опыт демонстрационно-методологического анализа основных этапов построения ее стоуновского пространства.

С целью удобства ссылок, в этой статье продолжается, начатая в [1], нумерация разделов, предложений и формул.

8. Согласно предложению 3, булева алгебра $A_E n$ с точностью, до изоморфизма φ может быть представлена посредством булевой алгебры подмножеств множества E^n. В теореме Стоуна о представлении булевых алгебр [2] утверждается, что любая булева алгебра изоморфна подалгебре булевой алгебры подмножеств множества *I (B)* – всех максимальных идеалов алгебры B. Изоморфное вложение Φ алгебры B в булеву алгебру

B(I(B)) определяется следующим образом:

$$(\forall a \in B)(\ \Phi(a) = U_a), \tag{13}$$

где $U_a = \{I/I \in\ I(B) \text{ и } a \notin I\}$ - множество всех максимальных идеалов алгебры B, не содержащих элемента a.

Специфика построения булевой алгебры $A_E n$ - С.Д.Н.Ф. дает креативную возможность продемонстрировать на примере этой алгебры технологические особенности доказательства теоремы Стоуна и выявить (возможные) аналоги в определении изоморфизма φ и канонического изоморфизма Φ, как изоморфизмов, представляющих эту булеву алгебру посредством алгебр подмножеств различных множеств E^n и B(I(B)), соответственно.

9. Понятие идеала главного и максимального идеалов булевой а Подмножество I основного множества B булевой алгебры B называется идеалом этой алгебры, если:

1. $0 \in I$;
2. $(\forall x \in I)(\forall y \in I)(x \sqcup y \in I)$;
3. $(\forall x \in I)(\forall y \in B)\ (y \sqsubseteq x \Rightarrow y \in I)$.

Нетрудно видеть, что основное множество B алгебры B является идеалом. Этот идеал называется несобственным. Идеалы, отличные от B , называются собственными.

Собственный идеал I называется [3]: главным, если в I есть наибольший элемент; максимальным, если не существует собственного идеала I´ этой алгебры, расширяющего I, т.е. такого, что $I \subset I' \subset B$; простым, если для любого элемента $a \in B$ или $a \in I$ или $C(a) \in I$.

Если a – наибольший элемент главного идеала I алгебры B, т.е. $I = \{b/b \in\ \boldsymbol{B} \text{ и } b \sqsubseteq a\}$, то говорят, что идеал I порождается элементом a. Идеал, порожденный элементом a, будет обозначаться, далее через I_a.Отметим также что, унарные отношения: «быть простым» и «быть максимальным» являются равносильными на множестве всех идеалов любой булевой алгебры [3, 4].

Дадим характеризацию главного и максимального идеалов, применительно к булевой алгебре $A_E n$.

Предложение 4. Идеал I булевой алгебры $A_E n$ является :

а) главным тогда и только тогда, когда существует такой элемент $\boldsymbol{A}_\pi \in A_E$, что $I = \{\boldsymbol{A}_{\pi'}/\pi' \subseteq \pi\}$.

б) максимальным тогда и только тогда, когда существует такой двоичный набор $\tilde{\sigma}^n \in E^n$, что

$$I = \{\boldsymbol{A}_{\pi'}/\pi' \subseteq E^n \backslash \{\tilde{\sigma}^n\}\}.$$

Доказательство. а) ⇒ Если $\boldsymbol{A}_\pi \in A_{E^n}$ и $I = \{\boldsymbol{A}_{\pi'}/\pi' \subseteq \pi\}$, то в соответствии с характеризацией отношения ≤, приведенной в предложении 1, получаем:

$I = \{\boldsymbol{A}_{\pi'}/\boldsymbol{A}_{\pi'} \sqsubseteq \boldsymbol{A}_\pi\}$, т.е. $\boldsymbol{A}_\pi$ - наибольший элемент идеала I.

Аналогичным образом получаем обратную импликацию.

б) ⇒ Применяя метод от противного, предположим, что I - максимальный идеал, но, тем не менее, для любого $\tilde{\sigma}^n \in E^n$ существует элемент $\boldsymbol{A}_{\pi(\tilde{\sigma}^n)} \in I$ такой, что

$$\pi(\tilde{\sigma}^n) \not\subseteq E^n \backslash \{\tilde{\sigma}^n\}. \tag{14}$$

Т.к. $\pi(\tilde{\sigma}^n) \subseteq E^n$, то из (14) получаем, что $\tilde{\sigma}^n \in \pi(\tilde{\sigma}^n)$. Но тогда $\pi^* = \cup_{\tilde{\sigma}^n \in E^n} \pi(\tilde{\sigma}^n) = E^n$ следовательно:

$$\cup_{\tilde{\sigma}^n \in E^n} \boldsymbol{A}_{\pi(\tilde{\sigma}^n)} = \boldsymbol{A}_{\pi^*} = \boldsymbol{A}_{E^n} = 1. \tag{15}$$

Из цепочки равенств (15), с учетом замкнутости идеала I относительно конечных объединений, получаем, что

$1 \in I$ или $I = A_E n$ т.е. идеал I является несобственным, что противоречит его максимальности.

10. В соответствии с правилом (13) определения канонического изоморфизма Φ, применительно к булевой алгебре $A_E n$, элементу $\boldsymbol{A}_\pi \in A_{E^n}$ будет ставится в соответствие множество $U_{\boldsymbol{A}_\pi}$ всех максимальных идеалов алгебры $A_E n$, не содержащих этого элемента. В связи с этим, дадим характеризацию множества $U_{\boldsymbol{A}_\pi}$.

Предложение 5. Пусть A_π - произвольный элемент булевой алгебры $A_E n$. Любой максимальный идеал I этой алгебры, не содержащий элемента A_π, порождается элементом $C(\boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}^n\}})$ для некоторого $\tilde{\sigma}^n \in \pi$.

Доказательство. Пусть I - максимальный идеал алгебры $A_E n$ и $\boldsymbol{A}_\pi \notin I$. Согласно предложению 4.б)

$$I = \{\boldsymbol{A}_{\pi'}/\pi' \subseteq E^n \backslash \{\tilde{\sigma}^n\}\} \tag{16}$$

для некоторого $\tilde{\sigma}^n \in E^n$. Покажем, что $\tilde{\sigma}^n \in \pi$. Т.к. любой максимальный идеал является простым и $\boldsymbol{A}_\pi \notin I$, то $C(\boldsymbol{A}_\pi) \in I$. В соответствии с определением унарной операции C на множестве $A_E n$, $C(\boldsymbol{A}_\pi) = \boldsymbol{A}_{E^n \backslash \pi}$,т.е. $\boldsymbol{A}_{E^n \backslash \pi} \in I$. Отсюда, с учетом равенства (16) получаем, что

$$E^n \backslash \pi \subseteq E^n \backslash \{\tilde{\sigma}^n\}. \quad (17)$$

Из включения (17) получаем, что $\tilde{\sigma}^n \notin E^n \backslash \pi$.

Исходя из предложения 4, получаем, что если $\boldsymbol{A}_\pi \in A_{E^n}$ и $\pi = \{\tilde{\sigma}_1^n; \tilde{\sigma}_2^n; \dots; \tilde{\sigma}_t^n\}$, то $U_{\boldsymbol{A}_\pi} = \{I_{C(\boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}_1^n\}})}; I_{C(\boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}_2^n\}})}; \dots; I_{C(\boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}_t^n\}})}\}$.

Продемонстрируем далее биективность канонического отображения Ф и сохранность операций при действии этого отображения применительно к булевой алгебре A_{E^n}.

Предложение 6. Если π_1 и π_2 - произвольные подмножества множества E^n и $\pi_1 \neq \pi_2$, то $U_{\boldsymbol{A}_{\pi_1}} \neq U_{\boldsymbol{A}_{\pi_2}}$.

Доказательство: Т.к. $\pi_1 \neq \pi_2$, то существует хотя бы один такой набор δ^n, что

а) $\tilde{\sigma}^n \in \pi_1$ и $\tilde{\sigma}^n \notin \pi_2$;

б) $\tilde{\sigma}^n \notin \pi_1$ и $\tilde{\sigma}^n \in \pi_2$.

В силу симметрии возможностей а) и б), будем считать, что реализуется возможность а).

Тогда, применяя предложение 4, из $\tilde{\sigma}^n \in \pi_1$ получаем, что $I_{C(\boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}^n\}})} \in U_{\boldsymbol{A}_{\pi_1}}$, а из $\tilde{\sigma}^n \notin \pi_2$ – что $I_{C(\boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}^n\}})} \notin U_{\boldsymbol{A}_{\pi_2}}$. Тем самым, $U_{\boldsymbol{A}_{\pi_1}} \neq U_{\boldsymbol{A}_{\pi_2}}$.

Предложение 7. Пусть Ф - отображение из множества A_{E^n} в множество *B (I(B))* определенное по правилу (13). Тогда

1) $\Phi(\boldsymbol{A}_{\pi_1} \sqcup \boldsymbol{A}_{\pi_2}) = \Phi(\boldsymbol{A}_{\pi_1}) \cup \Phi(\boldsymbol{A}_{\pi_2})$;

2) $\Phi(\boldsymbol{A}_{\pi_1} \sqcap \boldsymbol{A}_{\pi_2}) = \Phi(\boldsymbol{A}_{\pi_1}) \cap \Phi(\boldsymbol{A}_{\pi_2})$;

3) $\Phi(C(\boldsymbol{A}_{\pi_1})) = I(B) \backslash \Phi(\boldsymbol{A}_{\pi_1})$

для любых $\boldsymbol{A}_{\pi_1}; \boldsymbol{A}_{\pi_2} \in A_{E^n}$.

Доказательство: Исходя из правила (13) определения отображения Ф заключаем, что доказательства равенств 1) – 3) равносильны доказательствам теоретико-множественных равенств:

1′) $U_{\boldsymbol{A}_{\pi_1} \sqcup \boldsymbol{A}_{\pi_2}} = U_{\boldsymbol{A}_{\pi_1}} \cup U_{\boldsymbol{A}_{\pi_2}}$;

2′) $U_{\boldsymbol{A}_{\pi_1} \sqcap \boldsymbol{A}_{\pi_2}} = U_{\boldsymbol{A}_{\pi_1}} \cap U_{\boldsymbol{A}_{\pi_2}}$;

3′) $\Phi(C(\boldsymbol{A}_{\pi_1})) = I(B) \backslash U_{C(\boldsymbol{A}_{\pi_1})}$,

соответственно.

Приведем, для примера, доказательство равенства 2′). Применяя метод включения, убеждимся в том, что:

а) $U_{\boldsymbol{A}_{\pi_1} \sqcap \boldsymbol{A}_{\pi_2}} \subseteq U_{\boldsymbol{A}_{\pi_1}} \cap U_{\boldsymbol{A}_{\pi_2}}$

и

б) $U_{\boldsymbol{A}_{\pi_1}} \cap U_{\boldsymbol{A}_{\pi_2}} \subseteq U_{\boldsymbol{A}_{\pi_1} \sqcap \boldsymbol{A}_{\pi_2}}$.

а) Пусть $I \in U_{\boldsymbol{A}_{\pi_1} \sqcap \boldsymbol{A}_{\pi_2}}$. Тогда:

$$I \in U_{\boldsymbol{A}_{\pi_1} \sqcap \boldsymbol{A}_{\pi_2}} \Rightarrow^{①①} \boldsymbol{A}_{\pi_1} \sqcap \boldsymbol{A}_{\pi_2} \notin I \Rightarrow^{②②} C(\boldsymbol{A}_{\pi_1} \sqcap \boldsymbol{A}_{\pi_2}) \in I \Rightarrow^{③③} \Rightarrow (C(\boldsymbol{A}_{\pi_1}) \sqcup C(\boldsymbol{A}_{\pi_2})) \in I \Rightarrow^{④④} C(\boldsymbol{A}_{\pi_1}) \in I \text{ и } C(\boldsymbol{A}_{\pi_2}) \in I \Rightarrow^{⑤⑤} \boldsymbol{A}_{\pi_1} \notin I \text{ и } \boldsymbol{A}_{\pi_2} \notin I \Rightarrow^{⑥⑥} I \in U_{\boldsymbol{A}_{\pi_1}} \text{ и } I \in U_{\boldsymbol{A}_{\pi_2}} \Rightarrow^{⑦⑦} I \in U_{\boldsymbol{A}_{\pi_1}} \cap U_{\boldsymbol{A}_{\pi_2}}. \quad (18)$$

Отметим, что в импликативной цепочке (18):

– переходы ①① и ⑥⑥ основываются на определении множества $U_{\boldsymbol{A}_\pi}$, ($\boldsymbol{A}_\pi \in A_{E^n}$);

– переходы ②② и ⑤⑤ сделаны на основании того, что всякий ультрафильтр булевой алгебры является простым;

– переход ③③ основывается на аксиоме 4 в определении класса булевых алгебр;

– переход ④④ - на свойстве 3) определении идеала;

– переход ⑦⑦ - на основании определения теоретико-множественной операции ∩.

б) Аналогично.

Предложения 4, 5, 6 и 7 воспроизводят основные этапы доказательства теоремы Стоуна о представлении булевых алгебр применительно к алгебре A_{E^n}.

Заметим, что в общем случае канонический изоморфизм Ф: *B→B(I(B))* является изоморфным вложением булевой алгебры B в булеву алгебру *B(I(B))*. Если же *B* - конечная булева алгебра, то каноническое отображение Ф определяет изоморфизм B на B(I(B)).

В частности, число атомов алгебры A_{E^n} равно 2^n, т.е. она содержит 2^{2^n} элементов. Согласно предложению 4, число максимальных идеалов этой алгебры равно 2^n и, следовательно, число элементов алгебры *B(I(B))*, как и алгебры A_{E^n}, также равно 2^{2^n}.

11. Проиллюстрируем введенные понятия применительно к алгебре A_{E^n} и описанные, применительно к этой алгебре, этапы доказательства теоремы Стоуна на примере булевой алгебры A_{E^2} наборы (длины 2), расположенные в стандартном порядке. Тогда:

формулы $\boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}_0^2\}} = \bar{X}_1\bar{X}_2$; $\boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}_1^2\}} = \bar{X}_1X_2$; $\boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}_2^2\}} = X_1\bar{X}_2$; $\boldsymbol{A}_{\{\tilde{\sigma}_3^2\}} = X_1X_2$.

2. Атомы $\bar{X}_1\bar{X}_2$; $\bar{X}_1X_2$; $X_1\bar{X}_2$; X_1X_2 определяют максимальные идеалы $I_{C(\bar{X}_1\bar{X}_2)}$; $I_{C(\bar{X}_1X_2)}$; $I_{C(X_1\bar{X}_2)}$; $I_{C(X_1X_2)}$. Т.к.

$C(\bar{X}_1\bar{X}_2) = \bar{X}_1X_2 \vee X_1\bar{X}_2 \vee X_1X_2$; $C(\bar{X}_1X_2) = \bar{X}_1\bar{X}_2 \vee X_1\bar{X}_2 \vee X_1X_2$;

$C(X_1\bar{X}_2) = \bar{X}_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2 \vee X_1X_2$; $C(X_1X_2) = \bar{X}_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2 \vee X_1\bar{X}_2$, то:

$I_{C(\bar{X}_1\bar{X}_2)} = \{0;\ \bar{X}_1X_2;\ X_1\bar{X}_2;\ X_1X_2;\ \bar{X}_1X_2 \vee X_1\bar{X}_2;\ \bar{X}_1X_2 \vee X_1X_2;\ ;$

$X_1\bar{X}_2 \vee X_1X_2; \bar{X}_1X_2 \vee X_1\bar{X}_2 \vee X_1X_2\}$;

$I_{C(\bar{X}_1X_2)} = \{0; \bar{X}_1\bar{X}_2;\ X_1\bar{X}_2;\ X_1X_2;\ \bar{X}_1\bar{X}_2 \vee X_1\bar{X}_2;\ \bar{X}_1\bar{X}_2 \vee X_1X_2;$

$X_1\bar{X}_2 \vee X_1X_2; X_1\bar{X}_2 \vee X_1\bar{X}_2 \vee X_1X_2\}$;

$I_{C(X_1\bar{X}_2)} = \{0;\ \bar{X}_1\bar{X}_2;\ \bar{X}_1X_2;\ X_1X_2;\ \bar{X}_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2;\ \bar{X}_1\bar{X}_2 \vee X_1X_2;$

$\bar{X}_1X_2 \vee X_1X_2; \bar{X}_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2 \vee X_1X_2\}$;

$I_{C(X_1X_2)} = \{0; \bar{X}_1\bar{X}_2;\ \bar{X}_1X_2;\ X_1\bar{X}_2;\ \bar{X}_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2;\ \bar{X}_1\bar{X}_2 \vee X_1\bar{X}_2;$

$\bar{X}_1X_2 \vee X_1\bar{X}_2; \bar{X}_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2 \vee X_1\bar{X}_2\}$.

Таким образом, $I(A_{E^2}) = \{I_{C(\bar{X}_1\bar{X}_2)}; I_{C(\bar{X}_1X_2)}; I_{C(X_1\bar{X}_2)}; I_{C(X_1X_2)}\}$.

3. Множество A_{E^2} содержит 2^{2^2}, т.е. 16 элементов:

$A_{E^2}) = \{0;\ \bar{X}_1\bar{X}_2;\ \bar{X}_1X_2; X_1\bar{X}_2;\ X_1X_2;\ \bar{X}_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2;\ \ \bar{X}_1\bar{X}_2 \vee X_1\bar{X}_2;$

$\bar{X}_1\bar{X}_2 \vee X_1X_2; \bar{X}_1X_2 \vee X_1\bar{X}_2;\ \bar{X}_1X_2 \vee X_1X_2;\ X_1\bar{X}_2 \vee X_1X_2;$

$\bar{X}_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2 \vee X_1\bar{X}_2;\ \ \bar{X}_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2 \vee X_1X_2;\ \ \bar{X}_1\bar{X}_2 \vee X_1\bar{X}_2 \vee X_1X_2;$

$\bar{X}_1X_2 \vee X_1\bar{X}_2 \vee X_1X_2;\ 1\}$.

Т.к. 0 принадлежит каждому из максимальных идеалов, а 1 не принадлежит ни одному из них, то:

$\Phi(0)=\varnothing$;

$\Phi(1)= I\ (A_{E^2})$.

Т.к. элемент $\bar{X}_1\bar{X}_2$ не принадлежит только максимальному идеалу $I_{C(\bar{X}_1\bar{X}_2)}$, а элемент $\bar{X}_1\bar{X}_2$ - только максимальному идеалу $I_{C(\bar{X}_1\bar{X}_2)}$, то

$\Phi(\bar{X}_1\bar{X}_2) = \{I_{C(\bar{X}_1\bar{X}_2)}\}$;

$\Phi(X_1\bar{X}_2) = \{I_{C(X_1\bar{X}_2)}\}$.

Аналогичным образом:

– т.к. элемент $\bar{X}_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2$ не принадлежит максимальным идеалам $I_{C(\bar{X}_1\bar{X}_2)}$ и $I_{C(\bar{X}_1X_2)}$ и является элементом двух других, то

$\Phi(\ \bar{X}_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2) = \{\ I_{C(\bar{X}_1\bar{X}_2)}\ ;\ I_{C(\bar{X}_1X_2)}\}$;

- т.к. элемент $\bar{X}_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2 \vee X_1\bar{X}_2$ не принадлежит максимальным идеалам $I_{C(\bar{X}_1\bar{X}_2)}$; $I_{C(\bar{X}_1X_2)}$; $I_{C(X_1\bar{X}_2)}$ и принадлежит максимальным идеалам $I_{C(X_1X_2)}$, то

$\Phi(\bar{X}_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2 \vee X_1\bar{X}_2) = \{\ I_{C(\bar{X}_1\bar{X}_2)}\ ;\ I_{C(\bar{X}_1X_2)}; I_{C(X_1\bar{X}_2)}\}$.

Заметим, что $\bar{X}_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2 \vee X_1\bar{X}_2 = (\bar{X}_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2) \sqcup (X_1\bar{X}_2)$.

С учетом вышеприведенных примеров, получаем равенство

$\Phi((\bar{X}_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2) \sqcup (X_1\bar{X}_2)) = \Phi(\bar{X}_1\bar{X}_2 \vee \bar{X}_1X_2) \sqcup \Phi(X_1\bar{X}_2)$,

демонстрирующее на конкретном примере свойство «сохранности» операции $\cup$ при действии канонического гомоморфизма Ф.

12. является двойственным по отношению к понятию идеала и определяется следующим образом.

Подмножество F основного множества B алгебры B называется фильтром, если:

1. $1 \in F$;
2. $(\forall x \in F)\ (\forall y \in F)(x \sqcap y) \in F)$;
3. $(\forall x \in F)\ (\forall y \in B)(x \sqsubseteq y \Rightarrow y \in F)$;

Фильтр F алгебры B называется главным, если в F есть наименьший элемент. Из определения фильтра, с очевидностью, следует, что основное множество B алгебры B является фильтром. Этот фильтр называется несобственным, а фильтры, отличные от B, - собственными фильтрами этой алгебры

$F = \{\boldsymbol{A}_{\pi'}/\tilde{\sigma}^n \in \pi'\}$.

Нетрудно проверить, что I – собственный идеал булевой алгебры B тогда и только тогда, когда подмножество $C(I) = \{C(x)/x \in I\}$ является собственным фильтром этой алгебры. Это свойство идеалов и фильтров и обуславливает их двойственность по отношению друг к другу. Собственный фильтр F называется ультрафильтром, если выполняется дополнительное условие:

$(\forall x \in B\ )(x \in F$ или $C(x) \in F)$.

Исходя из этого условия, можно заключить, что собственный идеал I является максимальным тогда и только тогда, когда фильтр *C(I)* является ультрафильтром.

Множество всех ультрафильтров булевой алгебры B обозначается через *F(B)*. На множестве *F(B)* вводится структура топологического пространства [4;5], посредством выбора в качестве базиса открытых множеств совокупности подмножеств $V_\alpha=\{F/\ F \in F(B)$ и $a \in F\}$. Полученное топологическое пространство является компактным и хаусдорфомым [4,5] и называется стоуновским пространством булевой алгебры B.

13. Дадим реализацию общей схемы построения стоуновского пространства применительно к булевой алгебре A_{E^n} - С.Д.Н.Ф.

Двойственными версиями предложений 4. – 7. будут являться следующие утверждения.

Предложение 4′. Фильтр F булевой алгебры A_{E^n} является :

а) главным тогда и только тогда, когда существует такой элемент $\boldsymbol{A}_\pi \in A_{E^n}$, что

$F = \{\boldsymbol{A}_{\pi'}/\pi \subseteq \pi'\}$;

б) ультрафильтром тогда и только тогда, когда существует такой двоичный набор $\tilde{\sigma}^n \in E^n$, что

$F = \{A_{\pi'} / \tilde{\sigma}^n \in \pi'\}$.

Предложение 5′. Пусть A_π - произвольный элемент булевой алгебры A_{E^n}. Любой ультрафильтр F этой алгебры, содержащий элемент A_π, порождается элементом $A_{\tilde{\sigma}^n}$ для некоторого $\tilde{\sigma}^n \in \pi$.

Исходя из предложения 5′, получаем что, если $A_\pi \in A_{E^n}$, что и $\pi = \{\tilde{\sigma}_1^n; \tilde{\sigma}_2^n; \dots; \tilde{\sigma}_t^n\}$, то $V_{A_\pi} = \{F_{A_{\{\tilde{\sigma}_1^n\}}}; F_{A_{\{\tilde{\sigma}_2^n\}}}; \dots; F_{A_{\{\tilde{\sigma}_t^n\}}}\}$.

Предложение 6′. Если π_1 и π_2 - произвольные подмножества множества E^n и $\pi_1 \neq \pi_2$, то $\pi_1 \neq \pi_2$, то $V_{A_{\pi_1}} \neq V_{A_{\pi_2}}$.

Предложение7′. Пусть A_{π_1}; A_{π_2} и A_π - произвольные элементы множества A_En. Тогда

1) $F_{A_{\{\tilde{\sigma}_1^n\}}} \in V_{A_{\{\tilde{\sigma}_1^n\}}}$;

2) $V_{A_{\pi_1} \sqcup A_{\pi_2}} = V_{A_{\pi_1}} \cup V_{A_{\pi_2}}$;

3) $V_{A_{\pi_1} \sqcap A_{\pi_2}} = V_{A_{\pi_1}} \cap V_{A_{\pi_2}}$;

4) $V_{C(A_\pi)} = F(A_{E^n}) \setminus V_{A_\pi}$.

В соответствии с общей схемой определения стоуновского пространства булевой алгебры, совокупность подмножеств

$\mathcal{B} = \{V_{A_\pi} / A_\pi \in A_{E^n}\}$ множества F(A_{E^n}) является базой стоуновского пространства St(A_{E^n}) алгебры A_{E^n}. отметим, что из пунктов 1) и 2) предложения 7′ следует, что совокупность $\mathcal{B}$, действительно, является базой [5]. Пункт 4) этого предложения показывает, что любое подмножество базы является открыто замкнутым. Нетрудно проверить, что полученное пространство St(A_{E^n}) является хаусдорфовым [4,5]. Доказательство этого утверждения (для случая произвольной булевой алгебры) принимает, применительно к алгебре A_{E^n} следующий вид.

Пусть $F_{A_{\{\tilde{\sigma}_1^n\}}}$; $F_{A_{\{\tilde{\sigma}_2^n\}}} \in F(A_{E^n})$ и $F_{A_{\{\tilde{\sigma}_1^n\}}} \neq F_{A_{\{\tilde{\sigma}_2^n\}}}$. Тогда существует такой элемент $A_\pi \in A_{E^n}$, что

$A_\pi \in F_{A_{\{\tilde{\sigma}_1^n\}}}$ и $A_\pi \notin F_{A_{\{\tilde{\sigma}_2^n\}}}$

или

$A_\pi \notin F_{A_{\{\tilde{\sigma}_1^n\}}}$ и $A_\pi \in F_{A_{\{\tilde{\sigma}_2^n\}}}$.

В силу симметрии возможностей 1) и 2) будем предполагать, что реализуется первая из них. Тогда, из того, что $A_\pi \in F_{A_{\{\tilde{\sigma}_1^n\}}}$ следует, что

$F_{A_{\{\tilde{\sigma}_1^n\}}} \in V_{A_\pi}$. (18)

Т.к. $A_\pi \notin F_{A_{\{\tilde{\sigma}_2^n\}}}$ и $F_{A_{\{\tilde{\sigma}_2^n\}}}$ - ультрафильтр, то $C(A_\pi) \in F_{A_{\{\tilde{\sigma}_2^n\}}}$ и, следовательно, $F_{A_{\{\tilde{\sigma}_2^n\}}} \in V_{C(A_\pi)}$. (19)

Покажем, что

$V_{A_\pi} \cap V_{C(A_\pi)} = \emptyset$. Действительно:

$V_{A_\pi} \cap V_{C(A_\pi)} \overset{①}{=} V_{A_\pi \sqcap C(A_\pi)} \overset{②}{=} V_{A_{\pi \cap (E^n \setminus \pi)}} \overset{③}{=} V_{A_\emptyset} \overset{④}{=} V_0 \overset{⑤}{=} \emptyset$ (20)

Заметим, что в цепочке равенств (20):

– переход ① обусловлен равенством 3) предложения 7′;

– переход ② – определениями операций ∩ и C алгебры A_{E^n};

– переход ③ – теоретико-множественным равенством $\pi \cap (E^n \setminus \pi) = \emptyset$;

– переход ④ – тем, что $A_\emptyset$ есть логическая константа 0;

– переход ⑤ – определением множества V_0 и тем, что 0 не является элементом любого ультрафильтра.

Таким образом, любые различные элементы $F_{A_{\{\tilde{\sigma}_1^n\}}}$ и $F_{A_{\{\tilde{\sigma}_2^n\}}}$ множества F(A_{E^n}) имеют непересекающиеся окрестности.

Отметим, что, в связи с конечностью множества F(A_{E^n}), любое его покрытие системой открытых множеств будет конечным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Дроботун, Б. Н., Гайдак, В. А.** Стоуновское пространство булевой алгебры совершенных дизъюнктивных нормальных форм (I).//Вестник ПГУ, серия физико-математическая.

2 **Владимиров, Д. А.** Булевы алгебры. – М. : Наука, 1969. – 320 с.

3 **Гончаров, С. С.** Счетные булевы алгебры и разрешимость. – Новосибирск : Научная книга, 1966. – 364 с.

4 **Гончаров, С. С., Дроботун, Б. Н., Никитин, А. А.** Методические аспекты изучения алгебраических систем в высшем учебном заведении. – Новосибирск : изд-во НГУ, 2007. – 251 с.

5 **Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. – М. : Наука, 1972. – 496 с.

Материал поступил в редакцию 19.03.15.

Б. Н. Дроботун, В. А. Гайдак

Кемел дизьюнктивті нормальді формалардың буль алгебрасының стоундық кеңістігі (ІІ)

С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар.
Материал 19.03.15 баспаға түсті.

B. N. Drobotun, V. A. Gajdak

A Stone space of the Boolean algebra of perfect disjunctive normal forms (II)

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.
Material received on 19.03.15.

Берілген мақалада - Стоун теоремасымен байланысты, негіздік ұғымдардың және канондық конструкциялардың демонстрациялық-методологиялық көрсетілу туралы жұмыстың екінші бөлігі ұсынылған. Осы мақалада кемел дизьюнктивті нормальді формалардың буль алгебрасының стоундық кеңістігінің сипаттамасы беріледі, алынған сипаттамаға сүйене, отырып, Стоун теоремасының дәлелдеуінің негізгі кезеңдері беріледі.

This article is the second part of the work devoted to the demonstration and methodological support of basic concepts and canonical structures related to Stone's theorem on the representation of Boolean algebra. In this article is given a description of the Stone space of Boolean algebra of perfect disjunctive normal forms and from the resulting description are traced the main stages of the proof of Stone theorem on the representation of Boolean algebras.

УДК 512 (075,8)

Б. Н. Дроботун[1], Д. М. Темирханова[2]

[1]д.п.н., профессор, кафедра «Математика и информатика», [2]студент, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар

КЛАССИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ С ПОЗИЦИЙ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ (I)

Данная статья представляет собой первую часть работы, посвященной выявлению аналогов базовых концепций общей теории алгебраических систем применительно к классическим алгебрам и освоению канонических понятий и конструкций классических алгебр, как генетических прообразов этих конструкций.

Ключевые слова: группа, кольцо, алгебраическая система, конгруэнция, изоморфизм, гомоморфизм, идеал, нормальная подгруппа.

1. Разработка концепции логического исчисления, изначально связанная с использование алгебраических методов, предопределила неизбежность синтеза идей алгебры и математической логики. Как отмечалось в работе [1], посвященной выявлению и анализу связей между алгеброй и логикой, алгебра на протяжении многих столетий, как бы по совместительству выполняла роль (математической) логики и теории алгоритмов: «…алгебра, которая является одной из древнейших математических наук на самом деле демонстрировала примеры точных, в том числе и формальных, логических преобразований…» [1, с. 133].

Синтез идей алгебры и логики, применительно к классическим алгебрам: группам, кольцам, полям, векторным пространствам, булевым и порядковым структурам, обусловил разработку общей теории алгебраических систем и метода формальных аксиоматических теорий.

В связи с этим, генетическими прообразами фундаментальных концепций и методов общей теории алгебраических систем явились базовые понятия и канонические конструкции, свойственные классическим алгебрам и структурам.

В данной работе предпринимается опыт ретроспективного подхода к изучению классических алгебр и структур с позиций общей теории алгебраических систем и применения метода формальных аксиоматических теорий.

В соответствии с этим, классы групп, колец, полей и других классических алгебр и структур определяются, как классы алгебраических систем подходящих сигнатур посредством совокупностей предложений этих сигнатур, выбираемых в качестве аксиом. Естественная интерпретация символов соответствующих сигнатур на основных множествах классических алгебр трансформирует эти аксиомы в тождества. Понятно, что наличие именно этих тождеств должно обеспечивать адаптацию общих концепций подсистемы, конгруэнции, изоморфизма и гомоморфизма алгебраических систем и их фактор-систем до уровня исторически обусловленной формы определения аналогов этих концепций, применительно к классическим алгебрам и структурам.

Основной целью данной работы является выявление и описание инструментально-технологических схем и механизмов, посредством которых осуществляется эта адаптация для классов групп и колец.

Отметим, что в [2] в подразделах 4.1.5 и 4.1.6 намечен, в общих чертах, подход к введению концепции фактор-группы и сопутствующих ей понятий на основе понятия конгруэнтности.

2. Напомним основные понятия, сопутствующие концепции алгебраической системы [3,4], с целью обеспечения корректности выявления их традиционных прообразов в классических алгебрах.

Пусть M - произвольное непустое множество и

$$M^n = \{(a_1; a_2; \dots; a_n)/a_i \in M, i = 1; 2; \dots; n\}$$

n-ая декартова степень этого множества.

Под n-местной алгебраической операцией, заданной на множестве M, понимается отображение $f: M^n \to M$. Образ n-ки $(a_1; a_2; \dots; a_n) \in M^n$ обозначается через $f(a_1; a_2; \dots; a_n)$ и называется результатом операции f применительно к n-ке $(a_1; a_2; \dots; a_n)$. Если n=2, то операция f называется бинарной, если n=1, то – унарной. Нульместные операции, определенные на множестве M, т.е. некоторые конкретные элементы этого множества, называются выделенными элементами.

Если $M_1 \leq M$ и $(\forall a_1; a_2; \dots; a_n \in M_1)(f(a_1; a_2; \dots; a_n) \in M_1)$, то подмножество M_1 называется замкнутым относительно операции f. Замкнутость M_1 относительно операции f позволяет ввести на этом подмножестве алгебраическую операцию $f \restriction M_1$ по следующему правилу

$$(\forall a_1; a_2; \dots; a_n \in M_1)\ (f \restriction M_1(a_1; a_2; \dots; a_n) = f(a_1; a_2; \dots; a_n)),$$

которая называется ограничением операции f на подмножество M_1. Совокупность всех n-местных алгебраических операций, определенных на множестве M, будем обозначать через $\boldsymbol{F}^{(n)}(M)$. Положим $\boldsymbol{F}(M) = \cup_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{F}^{(n)}(M)$.

Под n-местным предикатом, заданным на множестве M, понимается отображение P множества M^n в двухэлементное множество {л;и}. Через $P(a_1;a_2;\dots a_n)$, будем называть образ n-ки $(a_1; a_2; \dots; a_n) \in M^n$. Если $P(a_1; a_2; \dots; a_n) =$ и, то будем говорить, что элементы $a_1;a_2;\dots a_n$ множества M находятся в отношении P.

Совокупность всех n-местных предикатов, определенных на M, будем обозначать через $P^n(M)$. Положим $\boldsymbol{F}(M) = \cup_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{F}^{(n)}(M)$.

Заметим, что если $P \in \boldsymbol{P}^{(n)}(M)$ и $M_1 \subseteq M$, то для задания ограничения $P \restriction M_1$ предиката P на подмножестве M_1 никаких дополнительных условий на это подмножество не налагается, т.к. $P \restriction M_1 = P \cap M_1^n$.

Сигнатурой типа

$$\langle k; l; r; m_1; m_2; \dots; m_k; n_1; n_2; \dots; n_l \rangle \tag{1}$$

называется упорядоченный набор $\sigma = \boldsymbol{F}; \boldsymbol{P}; \boldsymbol{C} \rangle$,

$\boldsymbol{F} = \{F_1^{m_1}; F_2^{m_2}; \dots; F_k^{m_k}\}$ – множество функциональных символов (имен для алгебраических операций);

$\boldsymbol{P} = \{P_1^{m_1}; P_2^{m_2}; \dots; P_k^{m_k}\}$ – множество предикатных символов (имен для предикатов);

$\boldsymbol{C} = \{c_1; c_2; \dots; c_r\}$ – множество константных символов (имен для выделенных элементов).

Под интерпретацией сигнатуры σ типа (1) на множестве M понимается отображение

$$\varphi: \sigma \to \boldsymbol{F}(M) \cup \boldsymbol{P}(M) \cup M$$

такое, что

$$\varphi(F_i^{m_i}) \in \boldsymbol{F}^{(m_i)}(M); \qquad \varphi(P^{n_j}) \in \boldsymbol{P}^{(n_j)}(M); \qquad \varphi(c_s) \in M,$$

$$i = 1; 2; \dots; k,\ j = 1; 2; \dots; l,\ s = 1; 2; \dots; .r.$$

В дальнейшем вместо записей $\varphi(F_i^{m_i})$; $\varphi(P^{n_j})$ $\varphi(c_s)$ будем использовать записи $\overset{\varphi}{F}{}_i^{m_i}$; $\overset{\varphi}{P}{}^{n_j}$; $\overset{\varphi}{c}_s$ и через $\overset{\varphi}{\sigma}$ будем обозначать множество

$$\{\overset{\varphi}{F}{}_1^{m_1}; \overset{\varphi}{F}{}_2^{m_2}; \dots; \overset{\varphi}{F}{}_k^{m_k}; \overset{\varphi}{P}{}_1^{n_1}; \overset{\varphi}{P}{}_2^{n_2}; \dots; \overset{\varphi}{P}{}_l^{n_l}; \overset{\varphi}{c}_1; \overset{\varphi}{c}_2; \dots; \overset{\varphi}{c}_r\}.$$

Под алгебраической системой сигнатуры σ будем понимать упорядоченную пару $\langle M; \overset{\varphi}{\sigma}\rangle$, где M где M - непустое множество и φ - интерпретация сигнатуры σ на этом множестве. Т.к. множество $\overset{\varphi}{\sigma}$ есть множество алгебраических операций, предикатов и выделенных элементов, выбранных, соответственно, из множеств $F(M)$; $P(M)$ и M посредством интерпретации φ, то, в содержательном плане, алгебраическая система есть непустое множество M вместе с некоторыми совокупностями алгебраических операций и предикатов , заданных на этом множестве, и совокупностью выделенных из этого множества элементов. Множество M называется основным множеством системы $\boldsymbol{M} = \langle M; \overset{\varphi}{\sigma}\rangle$, а алгебраические операции $\overset{\varphi}{F}{}_i^{m_i}$ и предикаты $\overset{\varphi}{P}{}^{n_j}$ – основными операциями и предикатами этой системы $(i=1;2;\dots;k,\ j=1;2;\dots;l)$.

Непустое подмножество M_1 основного множества M алгебраической системы M называется замкнутым в этой системе, если оно замкнуто относительно каждой основной ее операции и содержит все выделенные из M элементы. Нетрудно видеть, что если подмножество M_1 замкнуто в системе $\mathbf{M} = \langle M; {}^{\varphi}\sigma\rangle$, то множество

$${}^{\varphi}\sigma \restriction M_1 = \{{}^{\varphi}F_1^{m_1} \restriction M_1; {}^{\varphi}F_2^{m_2} \restriction M_1; \dots; {}^{\varphi}F_k^{m_k} \restriction M_1; {}^{\varphi}P_1^{n_1} \restriction M_1; {}^{\varphi}P_2^{n_2} \restriction M_1; \dots; {}^{\varphi}P_l^{n_l} \restriction M_1; {}^{\varphi}c_1; {}^{\varphi}c_2; \dots; {}^{\varphi}c_r\}$$

представляет собой множество алгебраических операций и предикатов, определенных на множестве M_1, и выделенных элементов этого подмножества, соответственно, т.е.

$$\mathbf{M}_1 = \langle M_1; {}^{\varphi}\sigma \restriction M_1\rangle = \langle M_1; {}^{\varphi}\sigma\rangle -$$

алгебраическая система сигнатуры σ. Такие системы, как структурные части алгебраической системы M, называются ее подсистемами.

3. Построение фактор-систем алгебраических систем основывается на понятии конгруэнции. Это понятие вводится следующим образом.

Пусть P – произвольное бинарное отношение, заданное на непустом множестве M и M и $F \in \mathbf{F}^{(m)}(M)$. Отношение P называется стабильным относительно операции F, если оно удовлетворяет условию:

$$(\forall a_1; a_2; \dots; a_m \in M)(\forall b_1; b_2; \dots; b_m \in M)((a_1 P b_1 \& a_2 P b_2 \& \dots$$
$$\dots \& a_m P b_m) \to (F(a_1; a_2; \dots; a_m) P F(b_1; b_2; \dots; b_m)). \qquad (2)$$

Из этого определения следует, что если P - отношение эквивалентности, стабильное относительно операции F, и $M/P = \{[a]_P / a \in M\}$ – фактор-множество множества M по отношению P, то соответствие

$$F/P: (M/P)^m \to M/P,$$

определенное по правилу:

$$(\forall [a_1]_P; \dots; [a_m]_P \in M/P)\,(F/P([a_1]_P; \dots; [a_m]_P) =$$
$$= [F(a_1; a_2; \dots; a_m)]_P) \qquad (3)$$

является алгебраической операцией на фактор-множестве M/P.

Пусть теперь $\mathbf{M} = \langle M; {}^{\varphi}\sigma\rangle$ - алгебраическая система сигнатуры σ и P - отношение эквивалентности, заданное на ее основном множестве M. Отношение P называется отношением конгруэнтности или конгруэнтностью на M, если оно стабильно относительно каждой основной операции этой системы.

Если P конгруэнтность на M, то на фактор-множестве M/P может быть введена структура алгебраической системы сигнатуры σ. Интерпретация

$$\eta: \sigma \to \mathbf{F}(M/P) \cup \mathbf{P}(M/P) \cup M/P$$

определяется , при этом, по следующим правилам:

3.1 $_i)(\forall [a_1]_P; \dots; [a_{m_i}]_P \in M/P)({}^{\eta}F_i^{m_i}([a_1]_P; \dots; [a_{m_i}]_P) =$

$= [{}^{\eta}F_i^{m_i}(a_1; a_2; \dots; a_{m_i})]_P)$, $i = 1; 2; \dots; k$;

3.2 $_j(\forall [a_1]_P; \dots; [a_{n_j}]_P \in M/P)({}^{\eta}P_j^{n_j}([a_1]_P; \dots; [a_{n_j}]_P) = \text{и}) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (\exists b_1 \in [a_1]_P) \dots (\exists b_{n_j} \in [a_{n_j}]_P)({}^{\varphi}P_j^{n_j}(b_1; \dots; b_{n_j}) = \text{и})$, $j = 1; \dots; l$;

3.3 $_s)$ ${}^{\eta}c_s = [{}^{\varphi}c_s]_P$, $s = 1; 2; \dots; r$.

Заметим, что для каждого i, правило 3.1 i) является соответственным аналогом правила (3), т.е. посредством этого правила действительно на фактор-множестве M/P определяется алгебраическая операция ${}^{\eta}F_i^{m_i}$, $i = 1; 2; \dots; k$.

Полученная алгебраическая система $\mathbf{M/P} = \langle M/P; {}^{\eta}\sigma\rangle$ называется фактор-системой алгебраической системы M по конгруэнтности P.

4. Пусть $\mathbf{M}_1 = \langle M_1; {}^{\varphi}\sigma\rangle$ и $\mathbf{M}_2 = \langle M_2; {}^{\psi}\sigma\rangle$ – алгебраические системы сигнатуры σ и Φ: $M_1 \to M_2$ – отображение основного множества M_1 системы M_1 в основное множество M_2 системы M_2. Отображение Φ называется гомоморфным отображением (или гомоморфизмом) M_1 в M_2, если выполняются следующие условия:

4.1 $_i)\Phi({}^{\varphi}F_i^{n_i}(a_1; a_2; \dots; a_{n_i})) = {}^{\psi}F_i^{n_i}(\Phi(a_1); \Phi(a_2); \dots; \Phi(a_{n_i}))$

для любых элементов $a_1; a_2; \dots; a_{ni}$ множества M_1 и любого $i = 1; 2; \dots; k$;

4.2 j) $({}^{\varphi}P_i^{m_j}(a_1; a_2; \dots; a_{m_i}) = \text{и}) \to$

$\to ({}^{\psi}P_j^{m_j}(\Phi(a_1); \Phi(a_2); \dots; \Phi(a_{m_j})) = \text{и})$ для любых элементов $a_1; a_2; \dots; a_{mj}$ множества M_1 и любого $j = 1; 2; \dots; l$;

4.3 s) $\Phi({}^{\varphi}c_s) = {}^{\psi}c_s$ для любого $s = 1; 2; \dots; r$.

Если в определении гомоморфизма алгебраических систем под отображением Φ понимать биективное отображение M_1 на M_2 и условие 4. 2 j) для каждого $j = 1; 2; \dots; l$ заменить на условие

3.2 j') $({}^{\varphi}P_j^{m_j}(a_1; a_2; \dots; a_{m_j}) = \text{и}) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow ({}^{\psi}P_j^{m_j}(\Phi(a_1); \Phi(a_2); \dots; \Phi(a_{m_j})) = \text{и})$ для любых элементов $a_1; a_2; \dots; a_{mj}$ множества M, то получим определение изоморфного отображения алгебраической системы M_1 на алгебраическую систему M_2.

Если существует изоморфное отображение системы M_1 на систему M_2 ,то говорят, что эти системы изоморфны (символически $\mathbf{M}_1 \cong \mathbf{M}_2$).

Далее, в рамках нижеприведенных теорем даются общие представления об основных связях между понятиями алгебраической системы, подсистемы, конгруэнции, фактор-системы, гомоморфизма и изоморфизма в общей теории алгебраических систем.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{M}_1 = \langle M_1; {}^{\varphi}\sigma\rangle$ и $\mathbf{M}_2 = \langle M_2; {}^{\psi}\sigma\rangle$ – алгебраические системы сигнатуры σ и Φ - гомоморфное отображение системы M_1 в систему M_2 . Тогда:

1) бинарное отношение P_Φ, определенное на множестве M_1 по правилу

$$(\forall a; b \in M_1)(aP_\Phi b \Leftrightarrow (\Phi(a) = \Phi(b))$$

является конгруэнцией на этом множестве;

2) подмножество

$$Im\Phi = \{b/(b \in M_2)\&(\exists a \in M_1)(b = \Phi(a))\}$$

множества M_2 замкнуто в системе M_2 .

В связи с пунктом 1) этой теоремы, любой гомоморфизм $\Phi: M_1 \rightarrow M_2$ однозначно определяет фактор-систему M_1/P_Φ.

Аналогично, гомоморфизм Φ однозначно определяет подсистему

$$Im\Phi = \langle Im\Phi;\ {}^{\psi}\sigma \restriction Im\Phi\rangle = \langle Im\Phi;\ {}^{\psi}\sigma\rangle$$

системы M_2 .

Теорема 2. (Теорема о гомоморфизмах алгебраических систем).

Пусть Φ: $M_1 \rightarrow M_2$- гомоморфизм системы $M_1 = \langle M_1; {}^{\varphi}\sigma\rangle$ в систему $M_2 = \langle M_2; {}^{\psi}\sigma\rangle$. Тогда:

1) $M_1/P_\Phi \cong Im\Phi$;

2) для гомоморфизма Φ существует представление вида

$$\Phi = \varepsilon_{P_\Phi} \circ \tau \circ l_{Im\Phi},$$

где:

ε_{P_Φ} - естественное гомоморфное отображение M_1 на M_1/P_Φ;

τ – изоморфизм M_1/P_Φ на $I_{m\Phi}$;

$l_{Im\Phi}$ – изоморфное вложение $Im\Phi$ в M_2.

5. Класс групп, как класс алгебраических систем сигнатуры

$$\sigma = \langle F_1^2;\ F_2^1; c_1\rangle,$$

может быть задан посредством следующих аксиом:

5.1) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(F_1^2(F_1^2(x;y);z) = F_1^2(x;\ F_1^2(y;z)))$;

5.2) $(\forall x)\ (F_1^2(x;c_1) = F_1^2(c_1;x) = x)$;

5.3) $(\forall x)(F_1^2(x;F_2^1(x)) = F_1^2(F_2^1(x);x) = c_1)$

как предложений сигнатуры σ.

Согласно общему определению алгебраической системы, любая группа есть система вида $G = \langle G; {}^{\varphi}\sigma\rangle$, где G - некоторое непустое множество и φ: σ→ F (G)∪G – интерпретация сигнатуры σ на множестве G.

Применительно к этой интерпретации, аксиомы 5.1) – 5.3) трансформируются в тождества:

5.1′) $(\forall a;b;c \in G)({}^{\varphi}F_1^2({}^{\varphi}F_1^2(a;b);c) = {}^{\varphi}F_1^2(a;\ {}^{\varphi}F_1^2(b;c)))$;

5.2′) $(\forall a \in G)\ ({}^{\varphi}F_1^2(a;{}^{\varphi}c_1) = {}^{\varphi}F_1^2({}^{\varphi}c_1;a) = a)$;

5.3′) $(\forall a \in G)({}^{\varphi}F_1^2(a;{}^{\varphi}F_2^1(a)) = {}^{\varphi}F_1^2({}^{\varphi}F_2^1(a);a) = {}^{\varphi}c_1)$.

Сокращая, как это обычно делается, запись ${}^{\varphi}F(x;y)$ до $x\,{}^{\varphi}F_1^2 y$, а запись ${}^{\varphi}F_2^1(x)$ до записи $x^{{}^{\varphi}F_2^1}$ и используя вместо обозначений ${}^{\varphi}F_1^2$ и ${}^{\varphi}F_2^1$ для бинарной и унарной операций, соответственно, обозначения * (· или ° и ′(-1)или), приходим к одному из следующих традиционных определений группы.

Группой называется непустое множество G вместе с определенными на нем бинарной и унарной алгебраическими операциями · ; ^(-1) и выделенным элементом e, соответственно, которые удовлетворяют следующим условиям:

5.1′′) $(\forall a \in G)(\forall b \in G)(\forall c \in G)((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c))$;

5.2′′) $(\forall a \in G)\ (a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e)$;

5.3′′) $(\forall a \in G)(a \cdot e = e \cdot a = a)$.

Другими словами, группой называется непустое множество G вместе с определенными на нем бинарной и унарной алгебраическими операциями · $^{(-1)}$ и выделенным элементом e, при этом:

– операция · является ассоциативной;

– элемент e, относительно операции · , является нейтральным;

– любой элемент $a \in G$ является симметризуемым и элемент $a^{(-1)}$ является симметричным к a.

Заметим, что класс групп может быть определен аксиоматически, и как класс алгебраических систем другой сигнатуры. В частности, этот класс может быть задан предложениями:

а) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(F_1^2(F_1^2(x;y);z) = F_1^2(x;\ F_1^2(y;z)))$;

б) $(\forall x)\ (\forall y)(\exists u)(\exists v)((F_1^2(x;u) = y)\&(F_1^2(v;x) = y))$ сигнатуры $\sigma' = \langle F_1^2\rangle$, взятыми в качестве аксиом.

Если ψ - интерпретация сигнатуры σ′ на непустом множестве G, то, полагая ${}^{\psi}F_1^2(x;y) = x * y$, приходим к другому традиционному определению группы.

Группой называется непустое множество G вместе с определенными на нем бинарной алгебраической операцией *, удовлетворяющей следующим условиям:

а′) $(\forall a \in G)(\forall b \in G)(\forall c \in G)((a * b) * c = a * (b * c))$;

б′) $(\forall a \in G)(\forall b \in G)(\exists c \in G)(\exists d \in G)((a * c = b)\&(d * c = b))$.

Другими словами, группой называется непустое множество G вместе с определенной на нем ассоциативной алгебраической операцией * такой, что уравнения $a*x=b$ и $y*a=b$ (относительно x и y, соответственно) разрешимы в этом множестве.

Доказательство эквивалентности двух приведенных выше подходов к определению группы приводятся, к примеру, в [4].

В соответствии с определением подсистемы алгебраической системы, любая подсистема $M_1 = \langle M_1; {}^{\varphi}\sigma\rangle$ системы $M = \langle M; {}^{\varphi}\sigma\rangle$ однозначно определяется замкнутым в M подмножеством M_1 множества M. Таким образом, каждое подмножество G_1 основного множества G группы G, замкнутое в G определяет подсистему G_1 этой группы, как алгебраичкеской системы. С связи с этим, предположение о том, что всякая такая подсистема группы является ее подгруппой, представляется вполне естественным. Тем не менее, в общем случае, это не так. Здесь все зависит от сигнатуры, в которой определяется класс групп. В частности, если класс групп задается в сигнатуре $\sigma = \langle F_1^2;\ F_2^2; c_1 \rangle$, то любая подсистема группы, как алгебраическая система этой сигнатуры, будет ее подгруппой, если же в сигнатуре $\sigma' = \langle F_1^2 \rangle$, то – нет.

Действительно, при реализации первого подхода, условия $G_1 \cdot G_1 \subseteq G_1$ и $G_1^{-1} \subseteq G_1$ (здесь $G_1 \cdot G_1 = \{a \cdot b/(a \in G_1)\&(b \in G_1)\}$, необходимые и достаточные для того, чтобы подсистема $G_1^{-1} = \{a^{-1}/a \in G_1\}$), была подгруппой группы $\mathbf{G}_1 = \langle G_1; {}^{\varphi}\sigma \rangle$ выполняются в силу замкнутости подмножества G_1 в G, автоматически.

В качестве примера, подтверждающего отрицательный ответ при втором подходе, можно рассмотреть мультипликативную группу $\mathbf{Q}^* = \langle Q^*; \cdot \rangle$- рациональных чисел, как алгебраическую систему сигнатуры $\sigma' = \langle F_1^2 \rangle$. тогда подмножество Z* - целых чисел, отличных от нуля, будет замкнуто в Q* , т.е. система Z*= Z*; · сигнатуры σ´ будет подсистемой системы Q* , но, очевидно, что подгруппой группы Q* эта подсистема не будет, т.к. далеко не каждое уравнение $a \cdot x = b$, где $a; b \in Z^*$ разрешимо в Z^*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Ершов, Ю. Л.** Алгебра и логика : старые и новые связи. //Философия науки, 2004, №4 (23), с. 132-142.

2. **Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И.** Основы теории групп. – М. : Наука, 1982.

3. **Мальцев А. И.** Алгебраические системы. – М. : Наука, 1970.

4. **Гончаров, С. С., Дроботун, Б. Н., Никитин, А. А.** Методические аспекты изучения алгебраических систем в высшим учебном заведении : Моногр. – Новосибирск : изд-во НГУ. Научное издание, 2007.

Материал поступил в редакцию 19.03.15.

Б. Н. Дроботун, Д. М. Темірханова

Алгебралық жүйенің бірыңғай теориясы бағытындағы классикалық алгебра (I)

С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.

Материал 19.03.15 баспаға түсті.

B. N. Drobotun, D. M. Temirhanova

Classical algebra from the standpoint of general theory of algebraic systems (I)

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.

Material received on 19.03.15.

Осы мақалада алгебралық жүйенің ортақ қағидасының негіздік тұжырымдамасының аналогының басын ашу классикалық алгебра және канондық ұғымның классикалық алгебра конструкциясын игерушілігіне, осы конструкцияның генетикалық прообраздаға арналған бастапқы бөлігін ұсынады.

This article is the first part of the work devoted to the identification of analogues of the basic concepts of the general theory of algebraic systems in relation to the classical algebra of canonical and development of concepts and structures of classical algebra as genetic pre-images of these structures.

УДК 512 (075,8)

Б. Н. Дроботун[1], Д. М. Темирханова[2]
[1]д.п.н., профессор, кафедра «Математика и информатика», [2]студент, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар

КЛАССИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ С ПОЗИЦИЙ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ (II)

Данная статья представляет собой вторую часть работы, посвященной выявлению аналогов базовых концепций общей теории алгебраических систем применительно к классическим алгебрам и освоению канонических понятий и конструкций классических алгебр, как генетических прообразов этих конструкций.

Ключевые слова: группа, кольцо, алгебраическая система, конгруэнция, изоморфизм, гомоморфизм, идеал, нормальная подгруппа.

В данной статье, как непосредственном продолжении статьи [1], сохраняется нумерация разделов, предложений и формул.

6. Рассмотрим далее, каким образом и в какие классические аналоги теории групп трансформируется понятие конгруэнтности общей теории алгебраических систем.

Условие (2) и понятие конгруэнтности, определенные в общей теории алгебраических систем, для класса групп, как алгебраических систем сигнатуры $\sigma = \langle F_1^2; F_2^1; c_1 \rangle$ принимают следующий вид.

Отношение эквивалентности Р, определенное на основном множестве *G* группы $G = \langle G; {}^{\varphi}\sigma \rangle$ будет являться отношением конгруэнтности на этой группе, если выполняются условия:

$6.2_1)$ $(\forall a_1; a_2 \in G)(\forall b_1; b_2 \in G)((a_1 P b_1 \& a_2 P b_2) \rightarrow$
$\rightarrow {}^{\varphi}F_1^2(a_1; b_1) P\, {}^{\varphi}F_1^2(a_2; b_2))$;

$6.2_2)$ $(\forall a; b \in G)(aPb \rightarrow {}^{\varphi}F_2^1(a) P\, {}^{\varphi}F_2^1(b))$.

С учетом соглашений о порядке записи выражений ${}^{\varphi}F_1^2(a; b)$ и ${}^{\varphi}F_2^1(a;)$ условия 6.2_1) и 6.2_2) могут быть представлены следующим образом:

$6.2'_1)$ $(\forall a_1; a_2 \in G)(\forall b_1; b_2 \in G)((a_1 P b_1 \& a_2 P b_2) \rightarrow$
$\rightarrow (a_1 \cdot b_1) P\, (a_2 \cdot b_2))$;

$6.2'_2)$ $(\forall a; b \in G)(aPb \rightarrow a^{-1} P b^{-1})$.

Покажем, что при адаптировании понятия конгруэнции применительно к классу групп, как алгебраических систем сигнатуры *σ*, достаточно потребовать выполнения только условия ($6.2'_1$).

Предложение 1. Пусть *P* – отношение эквивалентности, заданное на основном множестве *G* группы $G = \langle G; \cdot;\ {}^{-1}; e \rangle$, удовлетворяющее условию ($5.2'_1$). Тогда *P* – конгруэнтность на G.

Доказательство. Условие $6.2'_1$ определяет стабильность эквивалентности Р относительно основной операции ·. Докажем, что условие $6.2'_2$, как условие стабильности этой эвивалентности относительно второй основной операции $^{-1}$ является следствием аксиом (условий 5.1´´) - 5.3´´)), задающих понятие группы, и данного условия $6.2'_1$.

Действительно, пусть $a; b \in G$ и aPb. Т.к. $b^{-1}Pb^{-1}$, в силу рефлексивности отношения Р, то:

$$(b^{-1}Pb^{-1} \& aPb) \Rightarrow^{①} (b^{-1} \cdot a) P (b^{-1} \cdot b) \Rightarrow^{②} (b^{-1} \cdot a) P e \qquad (4)$$

Отметим, что в импликативной цепочке (4):

– переход ① сделан на основе условия $5.2'_1$;

– переход ② - основе условия 6.2´´) определения группы.

Аналогичным образом:

$$(((b^{-1} \cdot a) P e) \& (a^{-1} P a^{-1})) \Rightarrow^{①} ((b^{-1} \cdot a) \cdot a^{-1}) P (e \cdot a^{-1}) \Rightarrow^{②}$$
$$\Rightarrow^{②} (b^{-1} \cdot (a \cdot a^{-1})) P (e a^{-1}) \Rightarrow^{③} (b^{-1} \cdot e) P (e a^{-1}) \Rightarrow^{④}$$

$$\Rightarrow^{④} b^{-1} P a^{-1} \Rightarrow^{⑤} a^{-1} P b^{-1}. \qquad (5)$$

Отметим также, что в цепочке импликаций (5):

– переход ① осуществлен на основе данного условия $6.2'_1$);

– переход ② - на основе условия 5.1´´) определения группы;

– переход ③ сделан на основе условия 5.2´´) определения группы;

– переход ④ - с использованием условия 5.3´´) определения группы;

– переход ⑤ сделан на основе симметричности отношения *P*.

С целью выявления прообраза (генетического аналога) понятия конгруэнции в теории групп, докажем следующие утверждения.

Предложение 2. Пусть *P* - отношение конгруэнтности на группе *G* $= \langle G; \cdot;\ {}^{-1}; e \rangle$ и $[e]_P = \{a / a \in G\ \& aPe\}$ – класс эквивалентности, порожденный нейтральным элементом е этой группы. Тогда:

а) $[e]_P$ замкнуто в G;

б) подсистема $[e]_P = \langle [e]_P; \cdot;\ {}^{-1}; e \rangle$ является нормальной подгруппой группы *G*.

Доказательство. Для доказательства замкнутости подмножества $[e]_P$ в группе *G*, как алгебраической системе сигнатуры σ, нужно проверить, что это подмножество замкнуто относительно каждой из основных операций системы G и содержит ее выделенный элемент, т.е., что:

а.1) если $a; b \in [e]_P$, то $a \cdot b \in [e]_P$;

а.2) если $a \in [e]_P$, то $a^{-1} \in [e]_P$;

а.3) $e \in [e]_P$,

для любых элементов $a; b \in G$.

Заметим, что условие а.3) «автоматически» выполняется, т.к. ePe, в силу рефлексивности бинарного отношения *P*.

Доказательство пунктов а) и б) аналогичны технологическим приемам доказательства предложения 1. Для примера, доказательство пункта а.1) будет выглядеть следующим образом.

Пусть $a; b \in G$. Тогда:

$$(a \in [e]_P \& b \in [e]_P) \Rightarrow (aPe)\&(bPe) \Rightarrow (a \cdot b) P (e \cdot e) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a \cdot b) P e \Rightarrow (a \cdot b) \in [e]_P.$$

б) Из замкнутости подмножества $[e]_P$ в *G* следует, что подсистема $[e]_P$ является подгруппой группы *G*. Для доказательства того, что подгруппа $[e]_P$ является нормальной, достаточно проверить, что на этой подгруппе выполняется условие:

$$(\forall g \in G)(\forall a \in G)((a \in [e]_P) \rightarrow (g^{-1} \cdot a \cdot g \in [e]_P)).$$

Действительно, пусть

$g; a \in G$ и $a \in [e]_P$. Тогда, как и в доказательстве пункта а):

- из $g^{-1}Pg$ и aPe получаем $(g^{-1} \cdot a)P(g^{-1} \cdot e)$ или $(g^{-1} \cdot a)Pg^{-1}$;

- из $(g^{-1} \cdot a)Pg^{-1}$ и gPg получаем $((g^{-1} \cdot a) \cdot g)P(g^{-1} \cdot g)$ или $(g^{-1} \cdot a \cdot g)Pe$, т.е. $g^{-1} \cdot a \cdot g \in [e]_P$.

Обратным по отношению к предложению 2.б) является следующее утверждение.

Предложение 3. Если H = $\langle H; \cdot; \quad ^{-1}; e\rangle$ – нормальная подгруппа группы $G = \langle G; \cdot; \quad ^{-1}; e\rangle$, то отношение P_H, определенное на множестве G по правилу:

$(\forall a; b \in G)(aP_Hb \leftrightarrow b^{-1} \cdot a \in H)$, является отношением конгруэнтности на G .

Доказательство. Нетрудно проверить, что отношение P является отношением эквивалентности на множестве G. Согласно предложению 1, для доказательства того, что эквивалентность P является отношением конгруэнтности на G достаточно проверить, что она стабильна относительно операции $\cdot$.

Пусть $a_1; a_2; b_1; b_2 \in G$, $a_1P_Hb_1$ и $a_2P_Hb_2$. Отсюда, в соответствии с определением отношения P_H, получаем, что $b_1^{-1} \cdot a_1 \in H$ и $b_2^{-1} \cdot a_2 \in\in H$. Покажем, что $(b_1 \cdot b_2)^{-1} \cdot (a_1 \cdot a_2) \in H$.

Действительно.

$(b_1 \cdot b_2)^{-1} \cdot (a_1 \cdot a_2) = b_2^{-1} \cdot b_1^{-1} \cdot a_1 \cdot a_2 =$

$$= b_2^{-1}(b_1^{-1} \cdot a_1)(b_2 \cdot b_2^{-1})a_2 = (b_2^{-1} \cdot (b_1^{-1} \cdot a_1) \cdot b_2) \cdot (b_2^{-1} \cdot a_2). \quad (6)$$

Т.к. $b_1^{-1} \cdot a_1 \in H$ и H – нормальная подгруппа группы G , то $b_2^{-1} \cdot (b_1^{-1} \cdot a_1) \cdot b_2 \in H$. Кроме того, $b_2^{-1} \cdot a_2 \in H$. Таким образом, $(b_2^{-1} \cdot (b_1^{-1} \cdot a_1) \cdot b_2) \cdot (b_2^{-1} \cdot a_2) \in H$ и, следовательно, согласно цепочке равенств (6), $(b_1 \cdot b_2)^{-1} \cdot (a_1 \cdot a_2) \in H$.

Предложение 4. Пусть $\mathcal{K}$ – множество всех конгруэнций группы G и $\mathcal{H}$ – множество всех ее нормальных подгрупп. Тогда соответствие $\lambda: \mathcal{K} \to \mathcal{H}$, определенное по правилу

$(\forall P \in \mathcal{K})(\lambda(P) = [e]_P)$

является биективным отображением $\mathcal{K}$ на $\mathcal{H}$.

Доказательство. Пусть $P \in \mathcal{K}$. по предложению 2.б), $[e]_P$ нормальная подгруппа группы G , т.е. $\lambda(P) \in \mathcal{H}$. Согласно предложению 3, по нормальной подгруппе $[e]_P$ определяется конгруэнция $P_{[e]_P}$. Для доказательства биективности соответствия λ достаточно доказать, что $P_{[e]_P} = P$.

Действительно, пусть $a; b \in G$. Тогда

$$aP_{[e]_P}b \Rightarrow^{①} b^{-1} \cdot a \in [e]_P \Rightarrow^{②} (b^{-1} \cdot a)Pe. \quad (7)$$

Отметим, что в цепочке импликаций (7):

– переход ① осуществлен на основе определения отношения $P_{[e]_P}$ по нормальной подгруппе $[e]_P$;

– переход ② обусловлен определением класса эквивалентности $[e]_P$.

Т.к. P- отношение конгруэнтности, то из утверждения bPb, имеющего место в силу рефлексивности отношения P, и $(b^{-1} \cdot a)Pe$ получаем, что $b \cdot (b^{-1} \cdot a)P(b \cdot e)$, т.е. aPb. Тем самым, включение $P_{[e]_P} \subseteq P$ доказано. Обратное включение получается аналогичным образом.

Основываясь на предложениях 2, 3 и 4, можно заключить, что прообразом понятия конгруэнции, применительно к классу групп, как алгебраических систем сигнатуры σ является понятие нормальной подгруппы.

7. Согласно общей концепции гомоморфизма алгебраических систем, определение гомоморфизма групп, как алгебраических систем сигнатуры $\sigma = \langle F_1^2; F_2^2; c_1\rangle$,принимает следующие формы.

Отображение Φ основного множества G, группы G $_1 = \langle G_1; {}^{\varphi}\sigma\rangle$ в основное множество G_2 группы G $_2 = \langle G_2; {}^{\psi}\sigma\rangle$ называется гомоморфным отображением или гомоморфизмом G $_1$B G $_2$, если выполняются следующие условия:

$7.1_1)\ \Phi({}^{\varphi}F_1^2(a_1; a_2)) = {}^{\psi}F_1^2(\Phi(a_1); \Phi(a_2))$;

$7.1_2)\ \Phi({}^{\varphi}F_2^1(a_1)) = {}^{\psi}F_2^1(\Phi(a_1))$;

$7.3_1)\ \Phi({}^{\varphi}c_1) = {}^{\psi}c_1$,

для любых $a_1; a_2 \in G_1$.

Если, как и ранее, полагать, что ${}^{\varphi}\sigma = \langle \cdot; \quad ^{-1}; e\rangle$ и ${}^{\psi}\sigma = \quad = \langle *; \quad '; \varepsilon\rangle$, то условия $7.1_1)$; $7.1_2)$ и $7.3_1)$ примут следующий вид:

$7.1_1')\ \Phi(a_1; a_2) = \Phi(a_1) * \Phi(a_2)$;

$7.1_2')\ \Phi((a_1^{-1})) = (\Phi(a_1))'$;

$7.3_1')\ \Phi(e) = \varepsilon$.

Традиционно [2], в определении гомоморфного отображения Φ G $_1 \to$ G $_2$, групп, речь идет только об условии $7.1_1')$, т.е. «о сохранности этим отображением» только бинарной операции $\cdot$. Далее показывается, что это традиционное определение равносильно определению гомоморфизма групп, как алгебраических систем сигнатуры σ.

Предложение 5. Пусть $G_1 = \langle G_1; \cdot ; {}^{-1}; e\rangle$ и $G_2 = \langle G_2; * ; {}'; \varepsilon\rangle$ - две группы и отображение $\Phi: G_1 \to G_2$ удовлетворяет условию:

$$(\forall a_1; a_2 \in G_1)(\Phi(a_1; a_2) = \Phi(a_1) * \Phi(a_2)). \quad (8)$$

Тогда Φ - гомоморфное отображение группы G_1 в группу G_2, как алгебраических систем сигнатуры σ.

Доказательство. Для доказательства нужно из условий $5.1''$) - $5.3''$), определяющих понятие группы, и условия $7.1'_1$) вывести условия $7.1'_2$) и $7.3'_1$).

7.3_1) Пусть $a \in G_1$. Применяя к левой и правой частям равенства $a \cdot e = a$ отображение Φ, получим $\Phi(a \cdot e) = \Phi(a)$. Но, в соответствии с условием (8), $\Phi(a \cdot e) = \Phi(a) * \Phi(e)$. Отсюда получаем, что

$$\Phi(a) * \Phi(e) = \Phi(a). \quad (9)$$

Из (9) получаем, что $(\Phi(a))' * (\Phi(a) * \Phi(e)) = (\Phi(a))' * \Phi(a)$.

Т.к. $(\Phi(a))' * (\Phi(a) * \Phi(e)) = ((\Phi(a))' * \Phi(a)) * \Phi(e) =$
$= \varepsilon * \Phi(e) = \Phi(e)$ и $(\Phi(a))' * \Phi(a) = \varepsilon$, то $\Phi(e) = \varepsilon$.

7.1_2) Аналогичным образом, из равенства $a \cdot a^{-1} = e$ получаем, что

$$\Phi(a) * \Phi(a^{-1}) = \Phi(e). \quad (10)$$

С учетом того, что $\Phi(e) = \varepsilon$, из (10) следует, что $\Phi(a^{-1}) == (\Phi(a))'$.

Предложение 6. Пусть $\Phi: G_1 \to G_2$ – гомоморфизм группы G_1 в группу G_2. Тогда:

а) бинарное отношение P_Φ, определенное на основном множестве G_1 группы G_1 по правилу:

$(\forall a; b \in G_1)(aP_\Phi b \Leftrightarrow (\Phi(a) = \Phi(b))$, является отношением конгруэнтности;

б) $[e]_{P_\Phi} = ker\Phi$.

Доказательство. а) Очевидно, что отношение P_Φ является отношением эквивалентности. Для доказательства того, что эта эквивалентность является конгруэнцией достаточно доказать, согласно предложению 1, ее стабильностьи относительно операции $\cdot$.

Пусть $a_1; a_2; b_1; b_2 \in G$, $a_1 P_\Phi b_1$ и $a_2 P_\Phi b_2$. Покажем, что $(a_1 \cdot a_2) P_\Phi (b_1 \cdot b_2)$

Т.к. $a_1 P_\Phi b_1$ и $a_2 P_\Phi b_2$, то $\Phi(a_1) = \Phi(b_1)$ и $\Phi(a_2) = \Phi(b_2)$. Тогда:
$\Phi(a_1 \cdot a_2) = \Phi(a_1) * \Phi(a_2) = \Phi(b_1) * \Phi(b_2) = \Phi(b_1 \cdot b_2)$,
т.е. $(a_1 \cdot a_2) P_\Phi (b_1 \cdot b_2)$.

б) В соответствии с определением класса эквивалентности $[e]_P$ и бинарного отношения P_Φ имеем:

$(a \in [e]_P) \Leftrightarrow aP_\Phi e \Leftrightarrow (\varphi(a) = e) \Leftrightarrow (a \in ker\Phi)$,

т.е. $[e]_{P_\Phi} = ker\Phi$.

8. Класс ассоциативных колец с единицей, как класс алгебраических систем сигнатуры $\sigma = \langle F_1^2; F_2^2; F_3^1; c_1; c_2\rangle$, задается аксиоматически посредством следующих предложений этой сигнатуры:

8.1) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(F_1^2(F_1^2(x;y);z) = F_1^2(x;\ F_1^2(y;z)))$;

8.2) $(\forall x)\ (F_1^2(x;y) = F_1^2(y;x))$;

8.3) $(\forall x)\ (F_1^2(x;c_1) = x)$;

8.4) $(\forall x)(F_1^2(x;F_3^1(x)) = c_1)$;

8.5) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(F_2^2(F_2^2(x;y);z) = F_2^2(x;\ F_2^2(y;z)))$;

8.6) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(F_2^2(F_1^2(x;y));z) = F_1^2(F_2^2(x;z);\ F_2^2(y;z))$;

8.7) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(F_2^2(x;F_1^2(y;z)) = F_1^2(F_2^2(x;y);\ F_2^2(x;z)))$;

8.8) $(\forall x)(F_2^2(x;c_2) = x)$.

Если K – произвольное непустое множество, то вводя для результатов интерпретации

$\varphi: \sigma \to F(K) \cup P(K) \cup K$

традиционные обозначения:

${}^\varphi F_1^2 = +;\ {}^\varphi F_2^2 = \cdot\,;\ {}^\varphi F_3^1 = -\,;\ {}^\varphi c_1 = 0;\ {}^\varphi c_2 = 1$,

приходим к одному из следующих традиционных определений ассоциативного кольца с единицей.

Ассоциативным кольцом с единицей называется непустое множество K с определенными на нем бинарными алгебраическими операциями $+$ и $\cdot$, унарной алгебраической операции – и выделенными элементами 0 и 1, которые удовлетворяют следующим условиям:

8.1′) $(\forall a \in K)(\forall b \in K)(\forall c \in K)((a + b) + c = a + (b + c))$;

8.2′) $(\forall a \in K)(\forall b \in K)(a + b = b + a)$;

8.3′) $(\forall a \in K)(a + 0 = a)$;

8.4′) $(\forall a \in K)(a + (-a)) = 0)$;

8.5′) $(\forall a \in K)(\forall b \in K)(\forall c \in K)((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c))$;

8.6′) $(\forall a \in K)(\forall b \in K)(\forall c \in K)((a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c))$;

8.7′) $(\forall a \in K)(\forall b \in K)(\forall c \in K)(a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c))$;

8.8′) $(\forall a \in K)(a \cdot 1 = a)$.

Аналогично тому, как это было сделано в случае рассмотрения групп, как алгебраических систем сигнатуры $\langle F_1^2;\ F_2^2; c_1\rangle$, можно проверить, что любая подсистема кольца K $= \langle K; + ;\ -; \cdot\ ; 0\ ; 1\rangle$, как алгебраической системы сигнатуры $\sigma = \langle F_1^2;\ F_2^2; F_3^1; c_1; c_2\rangle$является подкольцом этого кольца.

Напомним [3], что двухсторонним идеалом кольца K называется такое его подкольцо I $= \langle I; + ;\ -; \cdot\ ; 0\ ; 1\rangle$, основное множество I которого удовлетворяет условиям:

а) $(\forall d \in K)(\forall a \in I)(d \cdot a \in I)$;

б) $(\forall d \in K)(\forall a \in I)(a \cdot d \in I)$.

Нижеследующее утверждение показывает, что в классе ассоциативных колец с единицей прообразом понятия конгруэнтности является понятие двухстороннего идеала.

Предложение 7. Пусть $K = \langle K; + ;\ -; \cdot\ ; 0\ ; 1\rangle$ - ассоциативное кольцо с единицей, I и P - его произвольные двухсторонний идеал и конгруэнтность, соответственно. Тогда:

1) бинарное отношение P_I, определенное на основном множестве K кольца K по правилу:

$(\forall a; b \in K)(aP_I b \Leftrightarrow (b - a \in I))$, является отношением конгруэнтности на кольце K;

2) $[0]_P = \langle [0]_P; + ;\ -; \cdot\ ; 0\ ; 1\rangle$ – двухсторонний идеал кольца K .

Доказательство. Т.к. отношение P_I является конгруэнцией на аддитивной группе $\langle K; + ;\ -;\ 0\ \rangle$ кольца K, то для доказательства утверждения 1) достаточно проверить, что отношение P_I стабильно относительно операции $\cdot$.

Пусть $a_1; a_2; b_1; b_2 \in K$, $a_1 P b_1$ и $a_2 P b_2$. Тогда $b_1 - a_1 \in I$ и $b_2 - a_2 \in I$ Следовательно, $b_1 \cdot b_2 - a_1 \cdot a_2 = (b_1 - a_1) \cdot b_2 + + a_1 \cdot (b_2 - a_2) \in I$, т.к. $(b_1 - a_1) \cdot b_2 \in I$ и $a_1 \cdot (b_2 - a_2) \in I$, в соответствии с определением двухстороннего идеала.

Таким образом, $b_1 \cdot b_2 - a_1 \cdot a_2 \in I$, что дает требуемое заключение: $(a_1 \cdot a_2) P_I (b_1 \cdot b_2)$.

Т.к. $[0]\,P$- подгруппа аддитивной группы $\langle K; + ;\ -;\ 0\ \rangle$ кольца K, то для доказательства утверждения 2) достаточно проверить выполнение условий:

а) $(\forall d \in K)(\forall a \in [0]_P)(d \cdot a \in [0]_P)$;

б) $(\forall d \in K)(\forall a \in [0]_P)(a \cdot d \in [0]_P)$.

Приведем, к примеру, проверку условия а). Пусть $d \in K$ и $a \in [0]_P$. Т.к. $a \in [0]_P$, то $aP0$. Т.к. P - рефлексивное отношение, то dPd. Из dPd и $aP0$ получаем $(d \cdot a)P(d \cdot 0)$, т.к. P - конгруэнтность на K. Отсюда следует, что $(d \cdot a)P0$, т.е. $d \cdot a \in [0]_P$.

В дальнейшем под кольцом будем понимать ассоциативные кольца с единицей.

Аналогично предложению 4 можно показать, что соответствие μ между множеством K – конгруэнций кольца K и множеством $\mathcal{J}$ – двухсторонних идеалов этого кольца, определенное по правилу

$(\forall P \in \mathcal{K})(\mu(P) = \boldsymbol{I}_P)$

является биективным отображением K на $\mathcal{J}$. Это замечание, вместе с предложением 7 и показывает, что прообразом понятия конгруэнции для класса колец является понятие двустороннего идеала.

Общая концепция гомоморфизма алгебраических систем применительно к кольцам, как алгебраическим системам сигнатуры $\sigma = \langle F_1^2;\ F_2^2; F_3^1; c_1; c_2\rangle$ приобретает следующий вид.

Отображение Ф основного множества K_1 кольца K $_1 = \langle K_1;\ {}^{\varphi}\sigma\rangle$ в основное множества K_2 кольца K $_2 = \langle K_2;\ {}^{\Psi}\sigma\rangle$ называется гомоморфизмом K $_1$в K_2, если выполняются следующие условия:

8.1$_1$) $\Phi({}^{\varphi}F_1^2(a_1; a_2)) = {}^{\psi}F_1^2(\Phi(a_1); \Phi(a_2))$;

8.1$_2$) $\Phi({}^{\varphi}F_2^2(a_1; a_2)) = {}^{\psi}F_2^1(\Phi(a_1); \Phi(a_2))$;

8.1$_3$) $\Phi({}^{\varphi}F_1^3(a_1)) = {}^{\psi}F_1^3(\Phi(a_1))$;

8.3$_1$) $\Phi({}^{\varphi}c_1) = {}^{\psi}c_1$;

8.3$_2$) $\Phi({}^{\varphi}c_2) = {}^{\psi}c_2$,

для любых $a_1; a_2 \in G_1$.

Если полагать ${}^{\varphi}\sigma = \langle \cdot\ ; + ;\ -;\ 0\ ; 1\rangle$ и ${}^{\psi}\sigma = \{\bullet; +;\ ; 0\ ; 1\}$, то условия 8.1′$_1$) – 8.1′$_3$), 8.3′$_1$) и 8.1′$_2$) примут следующую форму:

8.1′$_1$) $\Phi(a_1 + a_2) = \Phi(a_1) + \Phi(a_2)$;

8.1′$_2$) $\Phi(a_1 \cdot a_2) = \Phi(a_1) \bullet \Phi(a_2)$;

8.1′$_3$) $\Phi(-a_1) = \Phi(a_1)$;

8.3′$_1$) $\Phi(0) = 0$;

8.1′$_2$) $\Phi(1) = 1$.

Заметим, что условия 8.1_3) и 8.3_1) касаются аддитивных групп $\langle K_1; +;\ -;\ 0\rangle$ и $\langle K_1; +;\ ; 0\rangle$ колец K_1 и K_2, соответственно, т.е. как показано в предложении 5, их можно опустить. Оставшиеся условия $8.1'_1$), $8.1'_2$) и $8.3'_1$) дают традиционные условия сохранности бинарных операций $+$ и $\cdot$ и выделенного элемента 1.

Основные утверждения предложений 2 и 3, применительно к классу колец, приобретают следующий вид:

Предложение 7. Пусть Ф: К $_1 \rightarrow$ К $_2 -$ гомоморфизм кольца К $_1 = \langle K_1; {}^{\varphi}\sigma\rangle$ в кольцо К $_2 = \langle K_2; {}^{\Psi}\sigma\rangle$. Тогда

а) бинарное отношение P_Φ, определенное на основном множестве K_1 системы K_1 по правилу:

$(\forall a; b \in K_1)(aP_\Phi b \Leftrightarrow (\Phi(a) = \Phi(b)))$ является отношением конгруэнтности на K_1;

б) $[e]_{P_\Phi} = ker\Phi$;

в) подсистема $[e]_{P_\Phi} = \langle [e]_{P_\Phi}; {}^{\varphi}\sigma\ [e]_{P_\Phi}\rangle = \langle [e]_{P_\Phi}; {}^{\varphi}\sigma\rangle$ является двухсторонним идеалом кольца К $_1$;

г) подсистема ImФ $= \langle Im\Phi; {}^{\psi}\sigma\ Im\Phi\rangle$ является подкольцом кольца K_2.

Из предложений 6 и 7 следует, что теорема 2 (о гомоморфизмах алгебраических систем) является обобщающим аналогом традиционных версий теорем о гомоморфизмах групп и колец.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Дроботун, Б. Н., Темирханова, Д. М.** Классические алгебры с позиций общей теории алгебраических систем (I)// Вестник ПГУ, серия физико-математическая, № , 2014.

2 **Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И.** Основы теории групп. – М. : Наука, 1982.

3 **Ван дер Варден, Б. Л.** Алгебра. – 2-е изд. – М. : Наука, 1979.

Материал поступил в редакцию 19.03.15.

Б. Н. Дроботун, Д. М. Темірханова

Алгебралық жүйесінің бірінғай теориясы бағытандағы классикалық алгебра (II)

С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.
Материал 19.03.15 баспаға түсті.

B. N. Drobotun, D. M. Temirhanova

From classical algebra standpoint of general theory of algebraic systems (II)

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.
Material received on 19.03.15.

Осы мақалада алгебралық жүйенің ортақ қағидасының негіздік тұжырымдамасының аналогының басын ашу классикалық алгебра және канондық ұғымның классикалық алгебра конструкциясының игерушілігіне, осы конструкцияның генетикалық прообраздаға арналган екінші бөлігін ұсынады.

This article is the second part of the work devoted to the identification of analogues of the basic concepts of the general theory of algebraic systems in relation to the classical algebra of canonical and development of concepts and structures of classical algebra as genetic pre-images of these structures.

УДК 512.54

Д. М. Жангазинова[1], И. И. Павлюк[2]
[1]студент, [2]д.п.н., профессор, кафедра «Математика и информатика», Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар

СОПРЯЖЕННЫЕ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ И ОТНОШЕНИЕ КОММУТАТИВНОСТИ

В работе изучены сопряженные подгруппы групп и отношение коммутативности.

Ключевые слова: отношение сопряженности подгрупп группы и отношение коммутативности.

В работе [1] получена следующая истинная на подмножествах группы G формула

(1) $(g \in G)(A, B \subseteq G)\ \ ((A\ {}_c\alpha\ B) \Leftrightarrow (A^g\ {}_c\alpha\ B^g))$,

где $(A\ {}_c\alpha\ B) \overset{def}{\Leftrightarrow} ((x \in G)(A^x = B)$. Из этого результата при $A = \{a\}$ $B = \{b\}$ непосредственно следует закон сопряжения для элементов групп[2]:

$(\forall a, b \in G)(\forall g \in G)(\ a\ {}_c{\equiv}\ b) \Leftrightarrow (a^g = b^g))$. Использование этого результата в теории групп раскрывает большие возможности в исследовании теоретико-групповых сравнений относительно отношения эквивалентности "$_c\alpha$" на элементах произвольной группы. В частности открыта новая подгруппа $_{c\alpha}C(a)$ – централизатор элемента a группы G относительно отношения сопряжения: $(g\ \text{◘}\ G)((a^g\ {}_c\alpha\ a)\ \text{™}\ (a\ {}_c\alpha\ a^{\updownarrow g}))$; Закон сопряжения дает возможность устанавливать теоретико-групповые соотношения в группах: $(g\ \text{◘}\ G)((a^g\ {}_c\alpha\ a)\ \text{™}\ (a\ {}_c\alpha\ a^{\updownarrow g}))$;

$$(\forall a,x,y\in G)(((a^x\ {}_c\equiv a)\&(a^y\ {}_c\equiv a)\ \Rightarrow(a^{xy}\ {}_c\equiv a)).$$

Пусть в группе G даны подмножества (кластеры) A и B. Под произведением AB этих множеств понимаем множество всех элементов группы G равных произведению некоторого элемента из A на некоторый элемент из B. Если же одно из множеств A или B состоит из одного элемента, то получается определение произведения aB элемента на множество или Ab множества на элемент. Если для множеств A и B выполняется равенство $AB=BA$ то это показывает, что для любых двух элементов a и b: $a\ \text{◘}\ A, в\ \text{◘}\ B$ существуют элементы a^2 и a^{22} из A и b^2 и b^{22} из B, что $ab=b^2a^2$ [3]. В таком случае множества A и B перестановочны или связаны отношением коммутативности, т.е. по дефиниции математическая нотация этого факта имеет вид

(2) $(A\ {}_k\alpha\ B) \overset{def}{\text{™}} (AB=BA)$.

Подмножества A и B группы G сопряжены между собой $A\ {}_c\equiv \hat{A}$, если существует элемент $\tilde{o}\in G$ такой, что $A^x = B$, т.е. по определению

(3) $(A\ {}_c\equiv B) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\exists x\in G / A^x = B)$

Используя закон сокращения [3] для элементов группы G, легко установить закон сокращения для подмножеств группы G. Относительно отношения сопряжения (формула (1))

$$(\forall A,B\subset G\ \&\ \forall g\in G)((A\ {}_c\equiv B)\Leftrightarrow(A^g\ {}_c\equiv B^g)).$$

Докажем частный случай формулы (1)

Предложение 1. Для любых подмножеств A и B группы G $A=B$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $g\in G$ $A^g = B^g$, т.е. в группе G истина формула.

(4) $(\forall A,B\subset G)\ \&\ (\forall g\in G)\ (\ A=B)\Leftrightarrow(A^g = B^g))$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A=B$ Тогда для любого элемента $g\in G$ $A^g = B^g$. Действительно так как $A=B$, то $(\ \forall a\in A)\ (a\in B)\ \ \&(\ \forall b\in B)\ (b\in A)$ т.е. $(A\subset B)\ \&\ (B\subset A)$ Так как $(\forall a\in A)\ \&\ (\forall g\in G)\ (a^g\in A^g)$ а $A\subset B$, то $a^g\in B^g$. Отсюда следует, что $A^g\subset B^g$. Обратно. Поскольку

$(\ \forall b\in B)\ \&\ (\forall g\in G)\ \ (b^g\in B^g)$ и $B\subset A$, то $b^g\in A^g$. Таким образом, $B^g\subset A^g$. Из двух соотношений $A^g\subset B^g$ и $B^g\subset A^g$ следует, что $A^g = B^g$.

Достаточность. Пусть для любого элемента $g\in G$ $A^g = B^g$. Отсюда следует, что $g^{-1}Ag = g^{-1}Bg$. Воспользуемся законом сопряжения для подмножеств группы: $g\oplus g^{\updownarrow}Ag = g\oplus g^{\updownarrow}Bg$, $Ag=Bg$ или $Ag\oplus g^{\updownarrow} = Bg\oplus g^{\updownarrow}$, $A=B$.

Предложение доказано.

Предложение 2. Для любых подмножеств A, B группы G и для любых элементов $x,y,z\in G$ $(A^xB^y)^z = A^{\bar{x}}\ B^{\bar{y}}$.

Доказательство. Очевидно,

$$(A^xB^y)^z = (x^{\updownarrow}Axy^{\updownarrow}By)^z = z^{\updownarrow}(x^{\updownarrow}Axy^{\updownarrow}By)z = z^{\updownarrow}x^{\updownarrow}Axzz^{\updownarrow}y^{\updownarrow}Byz = (A^{xz}\oplus B^{yz}).$$

Предложение доказано.

Цель нашей работы установить закон сопряжения для подмножеств группы G относительно отношения коммутативности.

Теорема. Подгруппы A и B группы G тогда и только тогда коммутируют между собой, когда для любого элемента $g\in G$ подгруппы A^g и B^g так же коммутируют между собой, т.е. в группе G истина следующая формула:

(5) $(\forall A,B\subset G\ \&\ \forall g\in G)((A\ {}_k\equiv B)\Leftrightarrow(A^g\ {}_k\equiv B^g))$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A\ {}_k\equiv B$. Тогда $AB=BA$ по определению (формула (2)). Отсюда имеем $(AB)^g = (BA)^g$для любого элемента $g\in G$ (формула (4)). Далее, $(AB)^g = g^{\updownarrow}Ag\oplus g^{\updownarrow}Bg = A^gB^g$, а $(BA)^g = g^{\updownarrow}Bg\oplus g^{\updownarrow}Ag = B^gA^g$. Так как $(AB)^g = (BA)^g$, то $A^gB^g = B^gA^g$ и $A^g\ {}_k\equiv B^g$. Необходимость доказываемой формулы установлена.

Достаточность. Пусть $A^g\ {}_k\equiv B^g$. Тогда по определению $A^gB^g = B^gA^g$ и $g^{\updownarrow}Ag\oplus g^{\updownarrow}Bg = \ g^{\updownarrow}Bg\oplus g^{\updownarrow}Ag$. Так как $g^{\updownarrow}Ag\oplus g^{\updownarrow}Bg = g^{-1}ABg = (AB)^g$, а $g^{\updownarrow}Bg\oplus g^{\updownarrow}Ag = g^{-1}BAg = (BA)^g$, то $(AB)^g = (BA)^g$ и $g^{-1}(AB)g = g^{-1}(BA)g$. Отсюда и закона сокращения для подмножеств группы G[1] $AB=BA$ Теперь, окончательно, имеем $A\ {}_k\equiv B$.

Формула (5) доказана.

Проверим формулу (5) на элементах симметрической группы $S_3 = \{e,a,a^2,b,\mathbf{b}\ ,a^2b\}$ с генетическим кодом $a^3 = b^2 = e$, $ba = a^2b$. Для определенности выберем в группе S_3 подгруппы $A = \{e,a,a^2\}$ и $B = \{e,b\}$ Так как A является нормальным делителем в группе S_3, то $A\ {}_k\equiv B$ и $AB=BA$. Пусть элемент ab взят из S_3. Найдем $A^{ab} = \{e,a,a^2\}^{ab} = \{e,a^2,a\}$ Далее $B^{ab} = \{e,b\}^{ab} = \{e,b^{ab}\} = \{e,ab\oplus b\oplus ab\} = \{e,a^2b\}$.Отсюда $A = A^{ab} = \{e,a^2,a\}$

$B^{ab}=\{e,a^2b\}$. Найдем $A\cdot B=\{e,a^2,a\}\cdot\{e,a^2b\}=\{e,a^2,a,a^2b,b,b\}=\{e,a,a^2,b,ab,a^2b\}=S_3$. Далее, найдем $B^{ab}\cdot A=\{e,a^2b\}\cdot\{e,a,a^2\}=\{e,a,a^2,a^2b,a^2ba,a^2ba^2\}=\{e,a,a^2,b,ab,a^2b\}=S_3$. Таким образом, $A^{ab}B^{ab}=B^{ab}A^{ab}$ и $A^{ab}\ {}_k{\equiv}\ B^{ab}$, т.е. из $A\cdot B=B\cdot A$ для элемента $ab \in S_3$ следует, что $A^{ab}\ {}_k{\equiv}\ B^{ab}$. Обратно. Пусть $A^{ab}\ {}_k{\equiv}\ B^{ab}$. Тогда $A^{ab}B^{ab}=B^{ab}A^{ab}$ и $(A^{ab}B^{ab})^{ab}=(B^{ab}A^{ab})^{ab}$. Так как $ab^2=e$, то в силу предложения $AB=BA$ и $A\ {}_k{\equiv}\ B$. Для других элементов группы S_3 проверка осуществляется аналогично.

Работа написана в неразделенном соавторстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Абишев, М. У.** О законе сокращения для подмножеств группы. // Сборник докладов Первой Республиканской студенческой научно-практической конференции по математике и информатике. (Научный руководитель – Павлюк И. И.) – Астана, 2008. – Т. 2. – С. 24–25.

2 **Павлюк, Ин. И.** Группы с отношениями сравнимости для подгрупп и элементов: монография / Ин.И. Павлюк – Павлодар : Кереку, 2013. – 121 с.

3 **Курош, А. Г.** Теория групп. – М. : Наука, 1967. – 648 с.

Материал поступил в редакцию19.03.15.

Д. М. Жангазинова, И. И. Павлюк

Топтың түйіндес ішкі топтары және коммутативтік қатынасы

С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.

Материал 19.03.15 баспаға түсті.

D. M. Zhangazinova, I. I. Pavlyuk

The dual subgroups of a group and the relation of commutativity

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.

Material received on 19.03.15.

Жұмыста топтардың түйіндес ішкі топтары және коммутативтік қатынасы зерттелген.

In this work the dual subgroups of groups and the relation of commutativity are studied.

ӘОЖ 512.51

Р. А. Жұмәлі, М. Х. Хамитов

[1]математика пәнінің мұғалімі, №22 гимназия-мектебі, Екібастұз қ., [2]академик, профессор, С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.

МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУДА ЭЛЕКТРОНДЫҚ ЖАБДЫҚТАРДЫ ҚОЛДАНУ

Бұл мақалада математиканы оқытуда электрондық жабдықтарды қолдамудың жолдары қарастырылған, сондай-ақ, ақпараттық технологияны пайдаланудың бағыттары берілген.

Кілтті сөздер: электрондық жабуықтар, ақпараттың технология, коммуникативтік технология, электрондық оқулық, интерактивті тақта.

Бүгінгі таңда білім берудің тиімділігін арттыру үшін оқу үрдісін қоршаған ортадағы болып жатқан өзгерістерді есепке ала отырып ұйымдастыру қажет екендігі баршамызға мәлім. Қазіргі кездегі қоршаған ортадағы өзгерістер ақпараттық-коммуникативтік технологиялар саласында болып жатқаны белгілі. Бұл саладағы маңызды өзгерістер білім беру саласына да оң ықпалын тигізіп отырғаны бүгінгі білім ордасындағы ұстаздар қауымына кеңінен таныс. Жаңа ақпараттық-коммуникативтік технологиялардың адам, қоғам өміріндегі орны туралы Елбасымыз Н. Ә. Назарбаев өзінің «Жаңа әлемдегі жаңа Қазақстан» атты жолдауында білім ордаларын жаңа технологиялармен қамтамасыз етуді одан әрі жетілдіретіндігін атап өткен болатын.

Ақпараттық-коммуникативтік технологиялар бүгінгі күні біздің қоғамымызға кеңінен енді, әсіресе олар күрделі математика ғылымын барынша қолжетімді етіп беруге және мұғалімге оқытуда жоғары деңгейге жетуіне мүмкіндік береді.

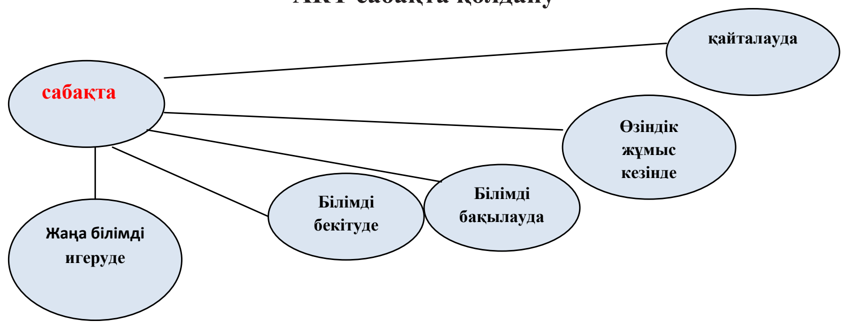
Ақпараттық технологиялар әртүрлі ақпарат көздеріне жол ашып, оқушылардың өзіндік жұмыстарының тиімділігін арттырады, оқушылар мен педагогтардың шығармашылығына жол ашады, оқытудың жаңа формалары мен әдістерін іске асыруға мүмкіндік береді. Оқу үрдісін ұйымдастыруда ақпараттық технологиялар оқушылардың танымдық іс-әрекетін белсендіртіп, оларды жоғары білімділік нәтижеге жеткізетін құралға айналады.

«Ақпараттық технологиялар» терминін электрондық жабдықтар арқылы ақпаратты жинақтап, өңдеп, көрсету және қолдану деп түсіну керек.

Тәжірибе көрсеткендей, электрондық жабдықтар қолданылатын сабақтар мұғалімнің орнын баспайды, керісінше, мұғалім мен оқушы арасындағы қарым-қатынасты неғұрлым мазмұнды, жеке тұлғалы және әрекетті етеді. Уақытты үнемдейді, оқушылардың түрткісін (мотивациясын) және оқу-танымдық үдерістің тиімділігін арттырады.

Ақпараттық технологияларды қолдану адам физиологиясының ерекшелігіне де негізделген: адамның есінде естіген ақпараттың 25 %, көргенінің 33 %, көріп естігенінің 50 % және әрекет үстінде 75 % қалады екен.

АКТ сабақта қолдану



1 сурет

Ақпараттық технологияларды пайдалануды екі бағытта қарастыруға болады. **Бірінші бағыт** тұрғысынан алып қарасақ, ақпараттық технологиялар білім, білік, дағдыны игеру үшін қажетті ресурс болып табылып, оқушылардың саналы тәрбие, сапалы білім алуына жағдай жасайды, ал **екінші бағыт** тұрғысында ақпараттық технологиялар оқу-тәрбие үрдісін ұйымдастыру тиімділігін арттырудың қуатты құралы болып табылады.

Сондықтан білім беруді жаңа сатыға көтеру үшін тек білім мазмұны мен оқыту әдістерін ғана емес, ақпараттық технологияларды кеңінен пайдалану арқылы оқытуды ұйымдастыру формаларын да жетілдіру керек. Мұның өзі мынадай оқу-тәрбие міндеттерін шешуге көмектеседі:

- оқу үрдісін дербестендіру. Мәселен, компьютер оқытуды нақты бір авторлық бағдарлама бойынша жүзеге асыруға мүмкіндік береді;
- *нақты әрекетке негізделген кері байланыс қамтамасыз етіледі. Мәселен, компьютер арқылы әрбір оқушы өзінің білімін бақылауға, тексеруге және бағалауға мүмкіндік алады;*
- *материалды меңгеру жылдамдығын арттыруға болады.*
- Ақпараттық технологияны қолдану арқылы оқыту:
- жаңа ақпараттық технологияны қолдану арқылы білімнің сапасын көтеру;
- жаңа ақпараттық және телекоммуникациялық технологияларды енгізу арқылы білім беру мазмұнын жаңарту;

- жаңа ақпараттық технологияны қолдану саласы бойынша оқушылардың мамандыққа баулу механизмін құру;
- біздің еліміздегі және шет елдердегі жинақталған ақпараттық ресурстарға жедел ену;
- мультимедиялық электрондық оқулықтарды, виртуальдық лабораторияларды және бақылау программаларын жасақтап, қамтамасыз ету;
- білім берудің телекоммуникациялық желілерін құру;

Электрондық оқулықтарды пайдалану

Электронды оқулықтың автоматтандырылған оқу үрдісі ашық дамитын әдістемелік жүйе екендігі белгілі. Сонымен бірге электронды оқулық оқу ақпаратын тасымалдаудың жаңа құралы болып табылады. Онда оқу ақпараты толық мазмұндалып, әр түрлі қосымшалар, анықтамалық материалдар, бақылау тапсырмалары, ұсынылатын әдебиеттер тізімі және тақырыптық ресурстарға сілтемелер беріледі.

Электронды оқулықтың жетістіктері мыналар болып табылады:

- шұғыл кері байланысты қамтамасыз етеді;
- дәстүрлі оқулықта көп іздеуді қажет ететін тиісті ақпаратты тез табуға көмектеседі;
- гипермәтінді түсіндірмелерді бірнеше рет қарап шығу барысында уақытты анағұрлым үнемдеуге мүмкіндік береді;
- қысқа мәтіндермен қатар көрсетеді, әңгімелейді, жобалайды, т.с.с. (мультимедиа-технологияның мүмкіндігі мен артықшылығы тура осы жерде көрінеді);
- әрбір оқушыға дербестік тұрғыдан қатынас жасауға мүмкіндік беріп, олардың өз бетінше білім алуын қамтамасыз етеді;
- белгілі бір бөлім бойынша білімді тексеруге мүмкіндік туады.

Электронды оқулықтар интерактивті, олар дыбысталған, оларда оқушының жауаптары елеусіз қалмайтын шынайы қарым-қатынастың элементтері бар. Оқушы мәтінді оқып қана қоймай, сонымен қатар тапсырмаларды орындай және сұрақтарға жауап бере отырып оқу үрдісінің белсенді қатысушысы болады.

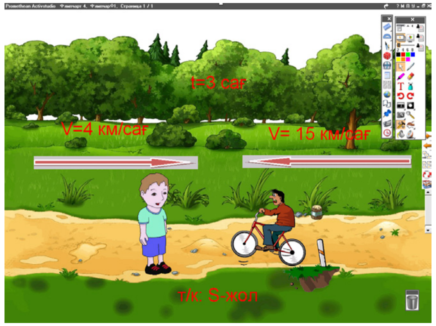
Интерактивті тақта

Білім беруді ақпараттандырудың жаңа бағыты – дәріс сабақтарында интерактивті тақталарды қолдану болып табылады.– ActivBoard интерактивті тақтасы мен ActivStudio программалық қамтуын оқу үрдісінде пайдалануда. Бұл бағдарламалық-техникалық кешеннің өзіне тән ерекшелігі, әмбебаптығы, интерактивтілігі, қызметінің көп жақтылығы және қолданушыға пайдалануға түсініктілігі мен интерфейсінің қарапайымдылығы.

- ақпаратты қисынды өңдеуге қабілеттілігі;
- алынған ақпараттың ақиқаттығы мен пайдалылығын бағалау ептілігі;
- дербес маңызды ақпаратты таңдау ептілігі;

• қажетті ақпаратты туған тілде және шет тілде, сонымен қатар оны өңдеу әдістері туралы білімді меңгеруептілігі.

Интерактивті оқытуда мұғалім мен оқушының жұмысы – ынтымақтастықта, яғни бірлесіп пайда болған қиыншылықтарды жеңіп шығуға, ой алмастыруға, алған білімдеріне сүйене отырып талқылауға мүмкіндік береді.

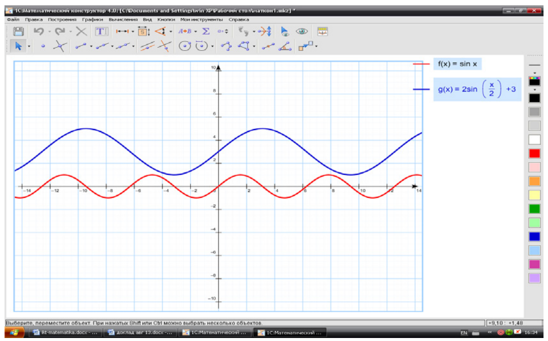


2 сурет

Қолданбалы бағдарламалық жабдықтарды қолдану

Электрондық жабдықтарды математиканы оқытуда қолданудың бір бағыты бұл қолданбалы бағдарламалық жабдықтарды қолдану. Бағдарламалық жабдықтардың мазмұны сабақтың мақсаты және мазмұнымен анықталады. Осыған байланысты барлық бағдарламалық жабдықтарды

- анықтамалық материалдар;
- эксперименталдық есептерді шешу;
- практикалық;
- білімді тексеру және бағалауда қолданатын деп бөлуге болады.
- Мұндай бағдарламалардың бірі «Математикалық конструктор».



3 сурет

Бұл бағдарламаны функцияның графиктеріне байланысты барлық тақырыптарда қолдануға болады, әсіресе қарапайым функциялардың графиктерін түрлендіруде.

Бағдарламаның көмегімен:

- үшбұрыш бұрыштарының биссектрисаларын, медиана, биіктіктерін;
- түрлендірулер (осьтік симметрия, бұру, гомотетия);
- шеңбер жанамаларын;
- перпендикуляр, параллель түзулер және т.б. әрекеттерді орындауға болады.

Осыған ұқсас ADVANCED GRAPHER және Master Function бағдарламаларын тиімді қолдануға болады.

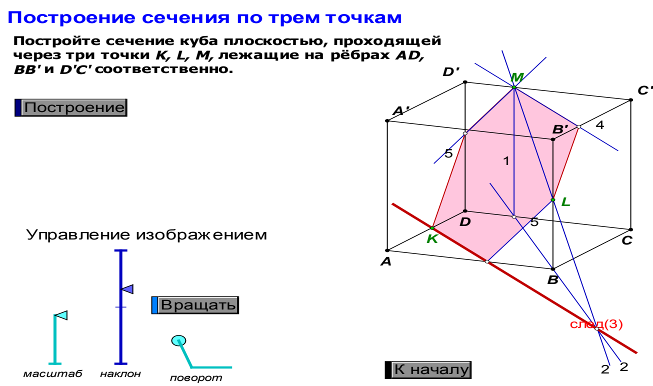
5 сыныптарда «Жай бөлшектерге амалдар қолдану» тақырыптарын өткенде Fraction қолданбалы бағдарламасы тиімді.

«Жанды геометрия» бағдарламасында 10-11 сыныптар үшін интерактивті стереометриялық сызулар берілген. Бағдарлама 10-11 сыныптардың «Геометрия» авторы: А.В.Погорелов оқулығы негізінде жасалған, бірақ келтірілген демонстрациялар мен интерактивті есептерді сабақтарда қолдануға болады.

Бағдарламада: негізгі теорема, аксиома, анықтамаларға иллюстрациялар жасалған. Мұғалім «интерактивті суретті» проектор арқылы көрсетіп жаңа материалды меңгеруде пайдалана алады.

Өзіндік жұмыс үшін берілген есептер.

Өзіндік жұмыста берілген есептердің шешімдері;



4 сурет

Есептеуге берілген есептер;

- Демонстрациялық модельдер;

Бұл бағдарлама негізінде қажетті құрал-саймандарды қолданып, өздігінен сызулар (чертеж) салуға мүмкіндік бар.

Электрондық жабдықтарды математика сабақтарында қолдану оқушылардың пәнге деген қызығушылығын арттырады, білім беру, өздігінен білім алу тиімділігінің және білім беру сапасының артуына септігін тигізеді.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 «Информатик ұстаздар» информатиктердің интернеттегі еркін бірлестігі (ИИЕБ) сайты.

2 **Якушина, Е. В.** Электронно-образовательные ресурсы: педагогические качества, достоинства и недостатки. – Народное образование. – № 2. – 2011.

3 **Хамитов, М. Х., Жұмәлі, Р. А.** Математиканы оқытудың жаңа тұрғылары. «Функциялар теориясы, функционалдық анализ және олардың қолданылуы». Халықаралық конференция. 2-том. 3-5 қазан, 2013 жыл, Семей.

Материал 19.03.15 баспаға түсті.

Р. А. Жумали,[1] М. Х. Хамитов [2]

Применение электронных устройств при обучении математике

[1]Школа-гимназия № 22 имени С. Торайгырова, г. Экибастуз;
[2]Павлодарский государственный
университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.
Материал поступил в редакцию 19.03.15.

R. A. Zhumali,[1] M. Kh. Khamitov [2]

The use of electronic devices in teaching mathematics

[1]Gymnasium № 22 after S. Toraighyrov, Ekibastuz;
[2]S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.
Material received on 19.03.15.

В данной статье рассматривается вопрос применения электронных устройств при обучении математике.

In this paper there is considered the use of electronic devices in teaching matematics.

УДК 537.8

Г. Н. Кабдыманова[1], В. Ю. Кожевников[2], А. И. Климов[3], А. В. Козырев[4], С. К. Тлеукенов[5]

[1]Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар; [2]Национальный Исследовательский Томский Государственный Университет, г. Томск; [3]Институт сильноточной электроники СО РАН, г. Томск; [4]Национальный Исследовательский Томский Государственный Университет, г. Томск; [5]Евразийский Национальный университет имени Л. Н. Гумилева, г. Астана

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ НАГРУЗКИ ШИРОКОПОЛОСНОГО ДИСКОВОГО АПЕРТУРНОГО СВЧ-КАЛОРИМЕТРА В ДИАПАЗОНЕ 1-4 ГГЦ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В настоящей статье представлены результаты численного моделирования поглощающей нагрузки широкополосного дискового апертурного СВЧ-калориметра для L-S полосы с металлическим корпусом.

Ключевые слова: СВЧ-калориметрия, измерение энергии, метод конечных элементов.

Введение

В настоящее время в прикладной электродинамике большой интерес представляют источники мощного микроволнового излучения на базе генераторов на сильноточных релятивистских пучках [1]. Выходная мощность излучения достигает нескольких гигаватт при длительностях импульсов порядка 10-100 нс. Для измерения энергии единичного импульса или их последовательности используются СВЧ-калориметры различных конструкций [2]. Использование калориметра вместе с детектором дает возможность определить пиковую мощность импульса. Действие калориметров основано на поглощении энергии СВЧ-излучения рабочим телом и последующим измерением этой энергии некоторым способом. Ввиду того, что плотностьмощности СВЧ-излучения в непосредственной близости от измерительного прибора может достигать нескольких мегаватт на квадратный сантиметр, традиционные модели СВЧ-калориметров зачастую оказываются неприменимы ввиду выхода из строя. Наиболее частая причина поломки – часто возникающие высокочастотные разряды на поверхности прибора.

В лабораторной практике для измерения характеристик мощных СВЧ-импульсов нашли эффективное применение калориметры [3–6] с квазиплоской трехслойной широкоапертурной нагрузкой с диэлектрическим корпусом, заполненной рабочей жидкостью на основе этилового спирта (Рисунок 1). Их действие основано на измерении увеличения объема жидкости вследствие поглощения СВЧ-энергии. Нагрузка может устанавливаться как в раскрыве передающей рупорной антенны источника СВЧ-излучения вместо ее выходного окна [6] (вакуумный калориметр), так и устанавливаться непосредственно перед ее выходным окном [3–6]. Данный прибор успешно применяется для измерения энергии мощных СВЧ-импульсов в ряде работ [7], [8].

Для того чтобы ошибка измерения СВЧ-энергии калориметром была бы минимальной, необходимо, чтобы коэффициент отражения электромагнитной волны, падающей на поглощающую нагрузку нормально, был как можно меньше. Значительного уменьшения максимальных в рабочем диапазоне отражательных потерь можно добиться, если входное диэлектрическое окно поглощающей нагрузки сделать ребристым (Рисунок 1). Использование данной конструктивной особенности позволяет на порядок (с 25-30 % до 1 3 %) сократить потери на отражение по сравнению с плоской структурой. Немалое значение имеет также подбор материалов для изготовления входного окна и рабочей жидкости. Геометрическая форма входного окна и параметр глубины рабочей жидкости должны быть оптимизированы по величине коэффициента отражения.

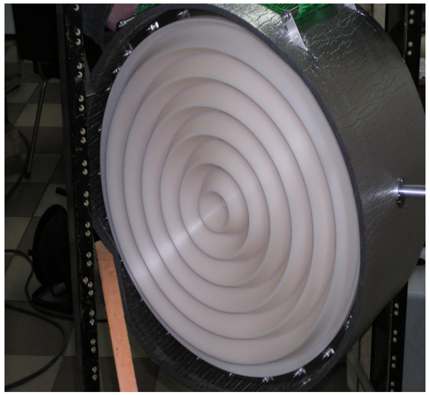


Рисунок 1 – Поглощающая нагрузка СВЧ-калориметра
для рабочего диапазона 1 4 ГГц

Возможности экспериментального исследования и оптимизации геометрических параметров нагрузки весьма ограничены ввиду значительной

стоимости материалов и работ по реконфигурации рабочего образца устройства. В таком случае наиболее эффективным способом оптимизации является численное (компьютерное) моделирование нагрузки. Оно представляет собой последовательное решение прямой задачи рассеяния электромагнитной волны заданной конфигурации на трёхслойной структуре нагрузки для заданного набора геометрических и иных параметров. С этой целью была разработана упрощённая двумерная модель поглощающей нагрузки [9], [10]. Она позволила впервые провести процедуру оптимизации геометрических параметров и материалов поглощающей нагрузки, предназначенной для измерения мощности микроволнового излучения L-S и X-полос.

Целью настоящей работы является построение более точной, двумерно-аксиальной теоретической модели поглощающей нагрузки дискового широкополосного апертурного калориметра и получение в её рамках уточнённых зависимостей коэффициента отражения и коэффициента потерь мощности излучения в диэлектрическом переднем окне.

Теоретическая модель

В основе используемой двумерно-аксиальной теоретической модели поглощающей нагрузки положена полная система уравнений Максвелла, записанная в частотной области в цилиндрических координатах. Её решение осуществляется в ближней зоне излучения в замкнутом расчётном объёме. Данная формулировка наиболее удобна для исследования частотных характеристик электродинамических систем, построенных из диэлектрических материалов с потерями, параметры которых зависят от частоты падающего излучения произвольным образом.

Рассматриваемая поглощающая нагрузка представляет собой дисковую трёхслойную структуру, которая включает ребристоевходное окно, металлический корпус и рабочую жидкость, заполняющую корпус. Входное окно поглощающей нагрузки моделируется диэлектриком постоянными параметрами вещественной проницаемости и тангенса потерь. В данной работе используются параметры наиболее приемлемого материала – полиэтилена высокого давления ($\varepsilon_r = 2.6$, $\mathrm{tg}\,\delta = 0.00031$) как материала с низким уровнем потерь. Металлические боковая и задняя стенки поглощающей нагрузки моделируются идеальным электрическим проводником. Рабочая жидкость, заполняющая пространство между входным окном и стенками представляет собой диэлектрик с потерями. Зависимости его диэлектрической проницаемости и тангенса потерь от частоты получены экспериментально в диапазоне частот 1-4 GHz согласно методике «slimprobes» фирмы Agilent [11].

В данной работе моделируемая апертура калориметра ограничена реальными физическими размерами прибора (радиус диска 240 mm). Расчётная область имеет вид цилиндра. Две её границы совпадают с боковой и задней стенками прибора. Они моделируются идеально проводящими поверхностями. Данное обстоятельство позволяет исключить возможные дифракционные потери энергии падающего излучения. В реальных условиях вклад дифракционных потерь (огибание волной нагрузки) нивелируется благодаря конструктивным особенностям боковой стенки прибора. В качестве источника излучения выбран так называемый цифровой порт фиксированной апертуры, моделирующий открытый конец круглого волновода (третья граница цилиндрической области). Источник излучает волну TM01, задаваемую аналитическими формулами [12], которая распространяется из вакуума вдоль оси диска калориметра. Распределение радиальной компоненты напряжённости электрического поля в объёме структуры поглощающей нагрузки изображено на Рисунке 2.

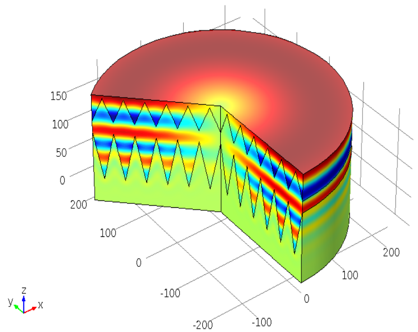


Рисунок 2 – Трёхслойная структура поглощающей нагрузки калориметра с рассчитанным распределением радиальной компоненты напряжённости электрического поля

Результаты численного моделирования

Для решения системы уравнений Максвелла в частотной области в аксиально-симметричных координатах был использован метод конечных элементов, реализованный в коммерческом пакете COMSOL Multiphysics 4.2a. Для соблюдения высокой точности расчётов была выбрана тетраэдральная сетка, повторяющая геометрический рельеф входного окна поглощающей нагрузки. В качестве исходных расчётных геометрических параметров были использованы значения, полученные в рамках упрощённой модели для диапазона 1-4 GHz из работ [9], [10] для калориметра с металлической задней стенкой. На Рисунке 3 (синим цветом) показан результат расчёта коэффициента отражения волны TM01 от поглощающей нагрузки при нормальном падении. Для сравнения (красная линия) даётся зависимость коэффициента отражения, рассчитанного в [9], [10] по упрощённой модели.

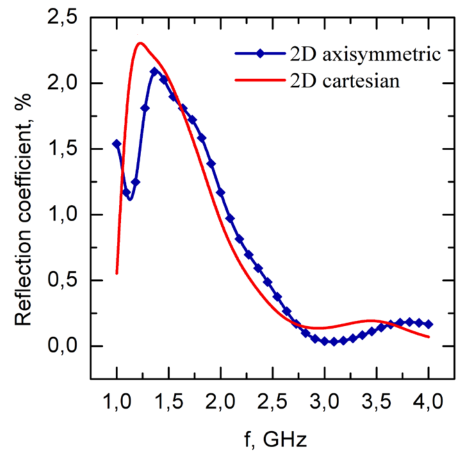


Рисунок 3 – Коэффициент отражения электромагнитной волны TM01 от поглощающей нагрузки оптимальной конфигурации

Поглощающая нагрузка с оптимальными параметрами для L-S полос может успешно применяться и для калориметрических измерений на более высоких рабочих частотах, что также подтверждается расчётами. Например, для X-полосы максимальное отражение составляет менее 0,25 %.

Таким образом, впервые для поглощающей нагрузки СВЧ-калориметра L-S диапазона получены результаты численных расчётов в рамках предложенной двумерно-осесимметричной модели. Они полностью подтверждают результаты моделирования для частотной зависимости коэффициента отражения электромагнитной волны TM01 от поверхности поглощающей нагрузки, которая была получены в рамках упрощённой двумерной модели[9], [10]. Незначительные отличия результатов объясняются тем, что в ранее использованном подходе апертура поглощающей нагрузки формально считалась неограниченной. Структура распределение электромагнитного поля в нагрузке подтверждает правомочность ранее предложенного в [9] приближения для быстрого поиска оптимальной конфигурации ребристой поверхности входного окна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Benford, J., Swegle, J. A., Shamiloglu, E.** High power microwaves. – New York-London: Taylor & Francis, 2007. – p. 25-30

2 **Климов, А. И.** Экспериментальные методы в сильноточной электронике. Томск : ТПУ, 2013. – 174 с.

3 **Shkvarunets, A. G.** Large surface wide band calorimeter // Rus. Prib. Techn. Exp. (Instruments and Experimental Techniques). – N 4. – 1996. – p. 72–75.

4 **Lisichkin, A. L., Nesterov E. V., Petrov, V. Yu., Stroganov, V. A.** A Liquid Pulsed Microwave Radiation Calorimeter // Instruments and Experimental Techniques, 2007. – Vol. 50, No. 1. – pp. 82–85.

5 **Klimov, A. I., Kovalchuk, O. B., Rostov, V. V., Sinyakov, A. N.** Measurement of Parameters of X band High Power Microwave Superradiative Pulses // IEEE Transactions on Plasma Science. – 2008. – vol. 36, no 6. – pp. 661–664.

6 **Klimov, A. I., Vykhodtsev, P. V., Elchaninov, A. A., Kovalchuk, O. B., Kurkan, I. K., Polevin, S. D., Totmeninov, E. M., Rostov, V. V.** A calorimeter for high power microwave pulse measurement // Proceeding of the 15th International Symposium on High Current Electronics. – Tomsk, Russia: Institute of High Current Electronics SB RAS, 2008. – pp. 422–424.

7 **Klimov, A. I., Elchaninov, A. A., Rostov, V. V.** S-band Vacuum Microwave Calorimeter //International Congress on Energy Fluxes and Radiation Effects: Abstracts. – Tomsk: Publishing House IOA SB RAS, 2014. – P. 97.

8 **Klimov, A. I., Totmeninov, E. M.** High Power Microwave Coupler // International Congress on Energy Fluxes and Radiation Effects: Abstracts. – Tomsk: Publishing House IOA SB RAS, 2014. – P. 89.

9 **Kozhevnikov, V. Yu., Klimov, A. I., Kozyrev, A. V.** Simulation and optimization of dummy loads for microwave calorimeters // 22th Telecommunications forum (TELFOR), 25-27 November 2014, Belgrade, Serbia, pp. 834-837.

10 **Kozhevnikov, V. Yu., Klimov, A. I., Kozyrev, A. V.** Simulation and Optimization of Dummy Loads for Wideband Microwave Calorimeters // 2014 IEEE 28-th Convention of Electrical and Electronics Engineers in Israel, 3-5 December 2014, Eilat, Israel. – pp. 1-5.

11 Agilent Basics of Measuring the Dielectric Properties of Materials. Application Note, Agilent Technologies, Inc. 2013, Published in USA, April 3, 2013, 5989-2589EN.

12 **Marcuvitz, N.** Waveguide Handbook. – New York : McGraw-Hill Book Company, 1951. – p. 428.

Материал поступил в редакцию 19.03.15.

Г. Н. Кабдыманова, В. Ю. Кожевников, А. И. Климов, А. В. Козырев, С. К. Тлеукенов

Шеткі элементтер әдісі арқылы 1-4 ГГц диапазонында кең жолақты дискілік апертурлік өте жоғары жиілікті калориметр жүтқыш жүктемесін сандық модельдеу

[1] С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.;
[2]Ұлттық Зерттеу Томбы Мемлекеттік Университеті, Томбы қ.;
[3]Ресей Ғылым Академиясы Сібір бөлімшесінің жоғары ток электроника Институты, Томбы қ.;
[4]Ұлттық Зерттеу Томбы Мемлекеттік Университеті, Томбы қ.;
[5]Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ.
Материал 19.03.15 баспаға түсті.

G. N. Kabdymanova, V. Yu. Kozhevnikov, A. I. Klimov, A. V. Kozyrev, S. K. Tleukenov

Numerical simulation of disk-shaped dummy load for broadband aperture 1-4 GHz microwave calorimeter by finite element method

[1]S. Toraighyrov Pavlodar State of University, Pavlodar;
[2]National Research Tomsk State of University, Tomsk;
[3]Institute of over the current electronics of the Siberian office of the Russian Academy of Sciences, Tomsk;
[4]National Research Tomsk State of University, Tomsk;
[5]L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana.
Material received on 19.03.15.

Аталмыш мақалада кең жолақты дискілік апертурлік өте жоғары жиілікті калориметр жұтқыш жүктемесінде метал қабықшалы L-S жолағы үшін сандық модельдеудің бастапқы нәтижелері көрсетілген.

The article presents the results of numerical simulation of disk-shaped dummy load of a wide-band L-S band microwave calorimeter in a metal case.

УДК 512. 54

Ю. И. Мамчий, И. И. Павлюк
[1]студент, [2]профессор, кафедр «Математика и информатика» ПГУ имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

ОТНОШЕНИЕ КОММУТАТИВНОСТИ ПОДГРУПП ГРУППЫ

В работе изучено отношение коммутативности подгрупп произвольной группы.

Ключевые слова: коммуникативность, произвольная группа, элемент, подгруппа.

В работах [1, 2] исследовалось отношение коммутативности элементов, заданное в произвольной группе *G*. В нашей статье исследуется отношение коммутативности на подмножествах произвольной группы. Эти подмножества – подгруппы группы. Единственная подгруппа группы *G*, которая содержит один элемент это тривиальная подгруппа {e}. Другие подгруппы содержат более одного элемента. Поэтому группа *G* в наших исследованиях не тривиальна. Введенное понятие отношения коммутативности задастся на декартовом квадрате $G \times G = G^2$ группы *G*, где рассматривается пары элементов. Примером группы *G* может быть любая конечная или бесконечная группа *G* отличная от тривиальной группы {e}. С основными понятиями теории групп можно ознакомиться в научной литературе [3, 4].

В работе впервые исследуется отношение коммутативности подгрупп группы.

Определение 1. [3] Подгруппой группы *G* называется подмножество *H* группы *G*, если оно само является группой относительно операции, определенной в группе *G*. Подмножество *H* группы *G* является подгруппой, если выполняются два условия:

1) если $G_1 G_2 ... G_{...-1}$, то $r \updownarrow ... + 1$;

2) если $G_{...-1}$, то $A \; \alpha \; B(G_1, G_2, ..., G_{...-1}) \; (A, B \in F_n^r)$.

Определение 2. (И. И. Павлюк) Подгруппы *A* и *B* группы *G* коммутативно сравнимы $A \,_k\alpha\, B$ в группе *G* тогда и только тогда, когда *AB*=*BA*, т.е.$(A \,_k\alpha\, B) \overset{def}{\Leftrightarrow} (AB = BA)$, по определению.

Лемма 1. Подгруппы *A* и *B* группы *G* коммутативно сравнимы в G если хотя бы одна из них является нормальным делителем в *G* т.е. когда $A \Delta G$ или $B \Delta G$.

Доказательство. Пусть для определенности подгруппа *A* является нормальным делителем в группе *G*. Тогда $(\forall g \in G)(A^g = A)$ и $g^{-1}Ag = A$. Отсюда *Ag*=*gA* и $(\exists a_1, a_2 \in A / a_1 g = g a_2)$. Так как g произвольный элемент группы то, $(\forall b \in B)(A^b = A)$ и *bA*=*Ab*. Отсюда следует, что *AB*=*BA*. Таким образом, $A \,_k\alpha\, B$.

Лемма доказана.

Теорема 1. Подгруппа *A* группы *G* тогда и только тогда является нормальным делителем в группе *G*, когда она коммутативно сравнима с каждой подгруппой *B* группы *G*.

Доказательство. Необходимость доказываемой теоремы, очевидно, следует из леммы 1.

Достаточность. Пусть *B* – произвольная подгруппа группы *G* и $A \,_k\alpha\, B$. Поскольку каждый элемент g группы *G* содержатся в некоторой подгруппе (g) группы *G*, где (g) – циклическая подгруппа, порожденная элементом $g \in G$, то A(g)=(g)A и $A^{(g)} = A$. Отсюда следует, что $(\forall g \in G)(A^g = A)$ и подгруппа A–нормальный делитель группы *G*. Она совпадает со всеми своими сопряженными.

Теорема доказана.

Предложение 1. Если $g \in G$, $h \in H < G$ и $gh \in H$, то $g \in H$.

Доказательство. Так как *H*– подгруппа группы G то в ней $h \in Hh^{-1} \in H$. Далее, из отношения принадлежности $gh \in H$, $h^{-1} \in H$ и замкнутости произведений элементов из *H* следует, что $gh \oplus h^{-1} \in H$. Отсюда $g \in H$.

Предложение доказано.

Лемма 2. Произвольная подгруппа A группы G коммутативно сравнима с группой G.

Доказательство. Так как A подгруппа группы G, то произведение AG равно произведению GA (предложение 1), т.е. AG=GA=G. Отсюда следует, что $A \,_k\alpha\, G$ (по определению).

Лемма доказана.

Замечание. Коммутативная сравнимость группы G со своей подгруппой A не влечет за собой инвариантность этой подгруппы A в самой группе G. Соответствующий пример можно указать, рассмотрев группу S_3 и ее подгруппу $B = (b) = \{e, b\}$. Очевидно, S_3B=DS_3 =S_3, но B не является нормальным делителем группы S_3. Из леммы 1, очевидно, выводятся следующие следствия.

Следствие1. Любая подгруппа группы G (в том числе и сама группаG) коммутативно сравнима с центром Z(G) группы G.

Следствие 2. Любая подгруппа группы G (в том числе и сама группа G) коммутативно сравнима с коммутатором G´ группы G.

Так как *Z(G)* и G´ – нормальные делители группы G то следствия непосредственно выводятся из леммы 1.

Теорема 2. Отношение коммутативности подгруппы группы обладает свойствами:

a) рефлексивности, т.е. $(A < G)(A\,{}_k\alpha\, A)$;

b) симметричности, т.е. $(A, B < G)((A\,{}_k\alpha\, B) \circledR (B\,{}_k\alpha\, A))$.

Доказательство. Поскольку A подгруппа группы G, то $A \oplus A = A$ (предложение 1). Отсюда следует, что AA=AA. Таким образом, $A\,{}_k\alpha\, A$.

Пусть $A\,{}_k\alpha\, B$. Отсюда следует, что AB=BA и BA=AB. Из последнего равенства следует, что $B\,{}_k\alpha\, A$.

Теорема доказана.

Замечание. Чтобы установить, что отношения коммутативности подгрупп не является транзитивным отношением, на подгруппах произвольной группы достаточно указать контрприем группы, т.е. указать конкретную группу, где бы отношение коммутативности не было бы транзитивным. Рассмотрим конечную группу $S_3 = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ с генетическим кодом $a^3 = b^2 = e, ba = a^2b$.. Ее подгруппы: $H_0 = \{e\}$, $H_1 = \{e, a, a^2\}$, $H_2 = \{e, b\}$, $H_3 = \{e, ab\}$, $H_4 = \{e, a^2b\}$.

Очевидно, $H_2\,{}_k\alpha\, H_1 \,\&\, H_1\,{}_k\alpha\, H_3$, но $H_2H_3 \,^{-}\, H_3H_2$, так как $H_2H_3 = \{e, ab, b, a^2\}$, а $H_3H_2 = \{e, b, ab, a\}$ и $\{e, a, b, ab\} \,^{-}\, \{e, b, a^2, ab\}$

Для визуализации отношения коммутативности на подгруппах группы построим граф отношения коммутативности подгрупп симметрической группы третей степени S_3 на основе приведенных ниже вычисленных данных:

$H_0\,{}_k\alpha\, H_0$;	$S_3\,{}_k\alpha\, H_0$;	$H_1\,{}_k\alpha\, H_0$;	$H_2\,{}_k\alpha\, H_0$;	$H_3\,{}_k\alpha\, H_0$;	$H_4\,{}_k\alpha\, H_0$;
$H_0\,{}_k\alpha\, S_3$;	$S_3\,{}_k\alpha\, H_1$;	$H_1\,{}_k\alpha\, H_1$;	$H_2\,{}_k\alpha\, H_1$;	$H_3\,{}_k\alpha\, H_1$;	$H_4\,{}_k\alpha\, H_1$;
$H_0\,{}_k\alpha\, H_1$;	$S_3\,{}_k\alpha\, H_2$;	$H_1\,{}_k\alpha\, H_2$;	$H_2\,{}_k\alpha\, S_3$;	$H_3\,{}_k\alpha\, S_3$;	$H_4\,{}_k\alpha\, S_3$.
$H_0\,{}_k\alpha\, H_2$;	$S_3\,{}_k\alpha\, H_3$;	$H_1\,{}_k\alpha\, H_3$;			
$H_0\,{}_k\alpha\, H_3$;	$S_3\,{}_k\alpha\, H_4$;	$H_1\,{}_k\alpha\, H_4$;			
$H_0\,{}_k\alpha\, H_4$;	$S_3\,{}_k\alpha\, S_3$;	$H_1\,{}_k\alpha\, S_3$;			

Реализуем установленные соотношения визуально на графе.

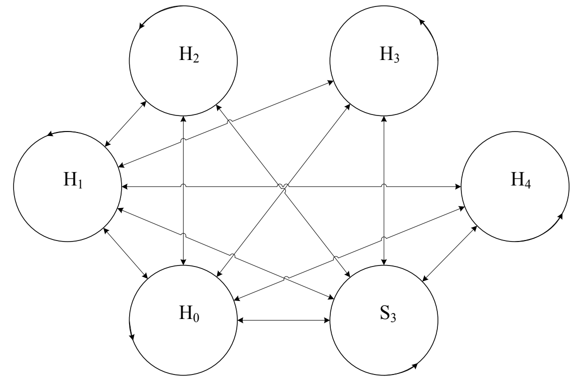


Рисунок 1 – Граф отношения коммутативности подгрупп группы S_3

Вершинами графа (рис.1) являются подгруппы группы S_3. Направления ребер графа характеризуют связь вершин отношением коммутативности. Петли в вершинах говорят о том, что элементы вершин (подгруппы) коммутируют сами с собой (рефлективность отношения). Двойные противоположнонаправленные стрелки на ребрах характеризуют семметричность отношения коммутативности подгрупп группы. Если между вершинами графа нет ребер, то это говорит отом, что указанные подгруппы не связаны отношением коммутативности (например H_2 и H_2 В группе S_3 существуют три подгруппы S_3, H_0, H_1, которые коммутируют со всеми подгруппами этой группы. Это визуальное отражение свойства подгрупп быть нормальным делителем группы.

Граф отношения коммутативности подгрупп группы S_3 будет не полным так как не все ее подгруппы связаны отношением коммутативности. Возникает вопрос существуют ли группы имеющие полные графы, т.е. существуют ли группы у которых все подгруппы связаны отношением коммутативности?

Для ответа на поставленный вопрос проведем ряд исследований на ранние известных в теории групп конечных группах.

Вначале исследуем группу диэдра восьмого порядка G_8, дадим ей общую характеристику, построим таблицу Кэли, вычислим все подгруппы.

Группа G_8 имеет следующие элементы: e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b. Генетический код группы: a^4=e, b^2=e, ba=a^3b. Коммутант группы $G' = \{e, a^2\}$ совпадает с ее центром Z(G_8).

Коммутант G´– это подгруппа группы G, порожденная всевозможными коммутаторами $[x, y] = x^{-1}y^x$, где $x, y \in G$, а центр Z(G) группы G это подгруппа $Z(G) = \bigcap_{g \in G} C(a)$ [3].

Таблица 1 – Таблица Кэли элементов группы G_8

•	e	a²	a³	a	b	a²b	ab	a³b
e	e	a³	a	a²	b	a²b	ab	a³b
a²	a²	e	a	a³	a²b	B	a³b	ab
a	a	a³	e	a²	ab	a³b	a²b	b
a³	a³	a	a²	e	a³b	ab	b	a²b
b	b	a²b	ab	a³b	e	a²	a³	a
a²b	a²b	b	a³b	ab	a²	E	a	a³
ab	ab	a³b	a²b	b	a	a³	e	a²
a³b	a³b	ab	b	a²b	a³	A	a²	e

Подгруппы группы G_8: $H_0=\{e\}$ $H_1=\{e,a,a^2,a^3\}$ $H_2=\{e,a^2,b,a^2b\}$ $H_5=\{e,a^2\}$; $H_6=\{e,b\}$; $H_7=\{e,ab\}$; $H_8=\{e,a^3b\}$; $H_9=\{e,a^2b\}$. Итого десять подгрупп группы G_8.

Выясним, все ли подгруппы группы G_8 связаны отношением коммутативности.

Очевидно, что подгруппы H_0, H_1, H_4, H_5 (согласно лемме 1, теореме 1, следствиям 1 и 2) коммутируют со всеми остальными подгруппами группы G_8. Воспользуемся определением 2 для H_2 и H_3 получим

$$H_2 \oplus H_3=\{e,a^2,b,a^2b\}\oplus\{e,a^2,ab,a^3b\}=\{e,a^2,ab,a^3b,b,a^2b,a^3,a\},$$

$$H_3 \oplus H_2=\{e,a^2,ab,a^3b\}\oplus\{e,a^2,b,a^2b\}=\{e,a^2,b,a^2b,ab,a^3b,a,a^3\}.$$

$$H_3 \oplus H_2=\{e,a^2,ab,a^3b\}\oplus\{e,a^2,b,a^2b\}=\{e,a^2,b,a^2b,ab,a^3b,a,a^3\}.$$

Таким образом, $(H_2\cdot H_3=H_3\cdot H_2)$ т.е. $(H_2\ {}_k\alpha\ H_3)$.

По свойства симметричности из теоремы 2 имеем $((H_2\ {}_k\alpha\ H_3)\circledR(H_3\ {}_k\alpha\ H_2))$

Для H_2 (согласно определения 1) подгруппами будут являться: $H_0=\{e\}$ $H_5=\{e,a^2\}$ $H_6=\{e,b\}$ $H_9=\{e,a^2b\}$

$$H_2\cdot H_6=\{e,a^2,b,a^2b\}\cdot\{e,b\}=\{e,b,a^2,a^2b\}$$

$$H_6\cdot H_2=\{e,b\}\cdot\{e,b,a^2,a^2b\}=\{e,b,a^2,a^2b\}$$

$$H_2\cdot H_9=\{e,a^2,b,a^2b\}\cdot\{e,a^2b\}=\{e,a^2b,a^2,b\}$$

$$H_9\cdot H_2=\{e,a^2b\}\cdot\{e,b,a^2,a^2b\}=\{e,a^2,b,a^2b\}$$

$$H_6\cdot H_9=\{e,b\}\cdot\{e,a^2b\}=\{e,a^2b,b,a^2\}$$

$$H_9\cdot H_6=\{e,a^2b\}\cdot\{e,b\}=\{e,b,a^2b,a^2\}$$

Далее построим граф отношения коммутативности подгрупп в группе H_2.

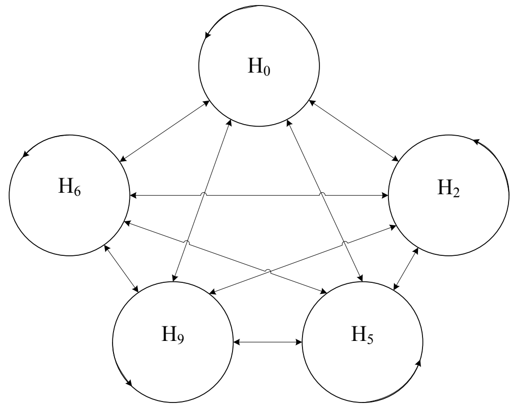


Рисунок 2 – Граф отношения коммутативности подгрупп группы $H_2=\{e,a^2,b,a^2b\}$

Граф отношения коммутативности подгрупп группы H_2 полный.

Аналогично, для H_3 подгруппами будут являться: $H_0=\{e\}$ $H_5=\{e,a^2\}$; $H_7=\{e,ab\}$; $H_8=\{e,a^3b\}$.

$$H_3\oplus H_7=\{e,a^2,ab,a^3b\}\oplus\{e,ab\}=\{e,ab,a^2,a^3b\};$$

$$H_7\oplus H_3=\{e,ab\}\oplus\{e,a^2,ab,a^3b\}=\{e,a^2,ab,a^3b\};$$

$$H_3\oplus H_8=\{e,a^2,ab,a^3b\}\oplus\{e,a^3b\}=\{e,a^3b,a^2,ab\};$$

$$H_8\oplus H_3=\{e,a^3b\}\oplus\{e,a^2,ab,a^3b\}=\{e,a^2,ab,a^3b\};$$

$$H_7\oplus H_8=\{e,ab\}\oplus\{e,a^3b\}=\{e,a^3b,ab,a^2\};$$

$$H_8\oplus H_6=\{e,a^3b\}\oplus\{e,ab\}=\{e,ab,a^3b,a^2\}.$$

Построим граф отношения коммутативности подгрупп группы H_3.

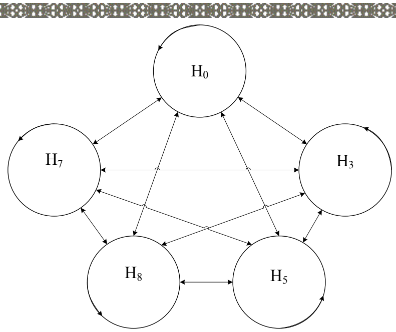


Рисунок 3 – Граф отношения коммутативности подгрупп группы H_3

Граф отношения коммутативности подгрупп группы H_3 является полным.

Произведем вычисления:

$H_6 \cdot H_8 = \{e, b\} \cdot \{e, a^3b\} = \{e, a^3b, b, a\}$; $H_9 \cdot H_8 = \{e, a^2b\} \cdot \{e, a^3b\} = \{e, a^3b, a^2b, a^3\}$;

$H_8 \cdot H_6 = \{e, a^3b\} \cdot \{e, b\} = \{e, b, a^3b, a^3\}$; $H_8 \cdot H_9 = \{e, a^3b\} \cdot \{e, a^2b\} = \{e, a^2b, a^3b, a\}$;

$H_6 \cdot H_7 = \{e, b\} \cdot \{e, ab\} = \{e, ab, b, a^3\}$; $H_9 \cdot H_7 = \{e, a^2b\} \cdot \{e, ab\} = \{e, ab, a^2b, a\}$;

$H_7 \cdot H_6 = \{e, ab\} \cdot \{e, b\} = \{e, b, ab, a\}$; $H_7 \cdot H_9 = \{e, ab\} \cdot \{e, a^2b\} = \{e, a^2b, ab, a^3\}$.

Из данных вычислений, очевидно, что подгруппы H_6, H_7, H_8, H_9 не связаны отношением коммутативности так как:

На основе всех выше приведенных вычислениях, теперь, построим граф отношения коммутативности симметрической группы диэдра G_8.

$H_6, H_8 \neq H_8, H_6$; $H_9, H_8 \neq H_8, H_9$;
$H_6, H_7 \neq H_7, H_6$; $H_9, H_7 \neq H_7, H_9$.

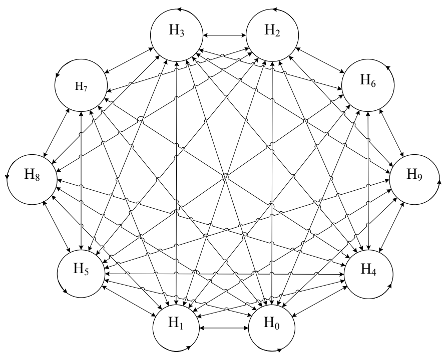


Рисунок 4 – Граф отношения коммутативности подгрупп группы G_8

Вывод: не все подгруппы группы G_8 коммутируют, следовательно, ее граф так же неполный.

Очевидно является утверждение, что в абелевой группе все подгруппы коммутируют между собой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Павлюк, И. И., Павлюк, Ин. И.** [Текст] Отношение коммутативности на элементах группы // Вестник ПГУ, Павлодар, 2013, № 2.

2 **Павлюк, И. И., Касантаева, А. Р., Сыздыкова, А. Т.** [Текст] Операция коммутатирования элементов группы // IX Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Наука и образование – 2014», Астана. – Режим доступа :www.enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie/. – 2014. – С. 2130–2132;

3 **Каргополов, К. И., Мерзляков, Ю. И.** [Текст] Основы теории групп. – М. : Наука, 1982. – 288 с.

4 **Курош, А. Г.** [Текст] Теория групп. – М. : Наука, 1967. – 648 с.

Материал поступил в редакцию 19.03.15.

Ю. И. Мамчий, И. И. Павлюк

Топтың ішкі топтардың коммутативтік қатынасы

С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.
Материал 19.03.15 баспаға түсті.

Yu. I. Mamchiy, I. I. Pavlyuk

Commutativity relation of a group's subgroups

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.
Material received on 19.03.15.

Жұмыста ерікті топтың ішкі топтарының коммутативтік қатынасы зерттелген.

In this work the commutativity relation of subgroup of a group is studied.

ӘОЖ 004

Д. С. Мусабекова, Д. С. Найманова

[1]студент, [2]п.ғ.к., доцент, Физика, математика және ақпараттық технологиялар факультеті, С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.

СТУДЕНТТЕРДІҢ ОЙЛАУ ҚАБІЛЕТІНІҢ ДАМУЫНА НЕЙРОНДЫҚ ЖЕЛІ ТЕХНОЛОГИЯСЫН ОҚЫТУ ӘСЕРІ

Бұл мақалада ойлау қабілетін түсіндіретін теориялардың ең танымалын қарастырылады. Оларды екі үлкен топқа бөлуге болады: біріншісі, өмірлік тәжірибе ықпалы әсерінен адамның табиғи зияткерлік қабіллеттері өзгермейтін тұжырымдамалардың болуынан шығатын топ; екіншісі, оның негізінде адамның ойлау қабілеттері негізінен өмір бойы қалыптасады және дамиды деген көзқарас.

Кілтті сөздер: НЖ – нейрондық желі, студенттер, ойлау қабілеті, жасанды ақыл.

Есептеуіш нейроғылым (Computational Neuroscience) әлемдік ақпараттық индустриясында нейронды жүйелерді тәжірибелік қолдану және теоретикалық түсінігі бүгінгі деңгейі осы аумақта кәсіптік білімді талап етеді.

Нейрондық желі аумағында мамандардың қажеттілігі келесі айғақты белгіледі, ол әр түрлі техникалық мамандықтар үшін жоғарғы оқу орындарының бағдарламасына түрлі-түрлі нейрондық желі бойынша курстар енгізіле басталды.

Бірақ бұл жеткіліксіз. Берілген оқу аумағындағы білімді зерттеудің ұйымдастырылуы осы аумақта кәсіптік оқуға таныстыру және ары қарай дамыту сипатында оқытылғаны дұрыс болады. Студенттерге нейрондық жүйелер технологиясын информатиканың кәсіптік курсында немесе факультативті сабақ аясында оқытуды ұйымдастырған мақсатты да, қажетті болады.

Келесі фактті есептесек, Қазақстанда осындай курстарды жүзеге асыруда және ұйымдастыруда тәжірибесі болмағандықтан, бұл курс студенттерді нейрожелілік технологиясына үйрету әдісін меңгеруге ұмтылған оқытушыларға пайдалы болады.

Жасанды нейронды желілерді үйрету

Жасанды нейронды желілердің барлық қызықты қасиеттерінің арасында тек қана олардық оқуға үйрету қабілеттілігі үлкен көңіл аударады. Оның

үйрету мағынасы адамның жеке интеллектуалды даму үрдісімен салыстыруға болады, яғни осы үрдісті толық түсінуге болады. Жасанды нейронды жүйелерді оқыту мүмкіндігі шектелген, сондықтан да дұрыс жолда екенімізді білу үшін көптеген күрделі тапсырмаларды орындау керек. Оған қарамастан, қазір де дәлелді жетістіктерге қол жетілді, мысалы Сейновскийдің «сөйлеуіш жүйесі» және басқа да көптеген тәжірибелік қолданулар пайда болып жатыр.

Ойлау қабілетінің дамуы

Адамның ойлау қабілеті дамиды, оның интеллектуалды қасиеттері жетіледі. Бұл шешімге ойлау қабілетінің даму әдістерін тәжірибеде қолданып және бақылай отырып психологтар бұрыннан келген. Тәжірибелік тұрғыдан мұндай аспектіні интеллекттің дамуын үш бағытта қарастырады: филогенетикалық, онтогенетикалық және эксперименталдық. Филогенетикалық аспект адам тарихы бойынша адамның ойлау қабілеті дамығанын және жетілгенін қарастырады. Онтогенетикалық аспектте бір адамның өмірі бойы, туғанынан бастап қартайған шағына дейін, ойлау қабілетінің даму кезеңдерін бөлу үрдісін зерттейді. Эксперименталдық әдіс те осы мәселені шешуге негізделген, бірақ ерекше, жасанды шарттар бойынша (эксперименталды) пайда болған ойлаудың даму үрдісін талдауға және оның ары қарай жетілуіне бағытталған.

Студенттердің ойлау қабілетінің дамуына нейрондық желі технологиясын оқыту әсері

Оқылатын пән тақырыбы – жасанды ақылмен – ойлау қабілеті арасындағы байланысты орнатайық.

Ойлау қабілеті танымдық үрдісті баяғыдан бері үлкен қызығушылықты ғалымдарда танытады. Әр түрлі теориялық негіздері бар көптеген теориялар пайда болды.

Ойлау қабілетін түсіндіретін теориялардың ең танымалын қарастырайық. Оларды екі үлкен топқа бөлуге болады: біріншісі, өмірлік тәжірибе ықпалы әсерінен адамның табиғи зияткерлік қабіллеттері өзгермейтін тұжырымдамалардың болуынан шығатын топ; екіншісі, оның негізінде адамның ойлау қабілеттері негізінен өмір бойы қалыптасады және дамиды деген көзқарас [1].

Ойлау қабілеті теориясының бір тобын жаңа білімді алу мақсатында ақпаратты өңдеу мен қабылдауды қамтамасыз ететін ішкі құрылымдар жиынтығы ретінде ой және ақылдық қабіллеттері анықталатын тұжырымдамалар болып табылады. Сәйкес зияткерлік құрылым адамда туғаннан бастап потенциалды дайын түрінде, адам ағзасының дамуына байланысты біртіндеп көріне бастайды деп саналады.

Бұл идея белгілі зияткерлік қабілеттердің тәжірибеге дейін – тапсырмалар – неміс психология мектебінде орындалған ақыл-ой теория көптеген жұмыстарына сипаттамасы сәйкес келеді. Ол ақыл-ойдың Гештальт теориясында айқын көрінеді, оның негізі құрылымдарды түрлендіру мен қалыптасу қабіллеттері, оларды нақты шындық өмірде көру ақыл-ойдың негізі болып табылады.

Қазіргі заман психологиясында талқыланатын теориялар идеялар әсері сұлба бойынша қадағаланады. Бұрыннан белгілі, ойлау егер қандайда бір сырттан детерминизмденген тапсырмамен байланысты болмаса, онда ішкі белгелі логикаға сүйенеді. Бұл логикаға сыртқы тірегі болмайтын еретін ой сұлба деп аталады.

Жорамал бойынша, сұлба ішкі сөз деңгейінде пайда болады, сонан соң оймен басқарады, оған ішкі тізбек пен сымбаттылық, логикалық мән береді. Сұлбасыз ой, әдетте аутикалық ой деп атайды, оның ерекшеліктерін қарастырдық. Сұлбаны бірден біржола тапсырма. Оның өз даму тарихы бар, ол логиканы, оймен басқару құралдарын меңгергеннен басталады. Егер қандайда бір сұлба өзгеріссіз бір қалыпта қолданса, онда ол автоматтадырылған ой дағдысына көшеді, яғни ой операциясы. Ойдың басқа тұжырымдамалары ақыл қабілеттерінің туғанда болмауы, өмір жолында даму мүмкіндігі мен қажеттілігі саналады. Олар ойлауды сыртқы орта әсерінен, субъекттің ішкі даму идеясынан және екеуінің де байланысын әсерінен түсіндіреді [2].

Психологиялық зерттеудің келесі бағытында ойлаудың өзіндік тұжырымдамасы көрсетілген: эмпирикалық субъективті психологияда сипаттамасы бойынша ассоциативті және негізгі әдісі бойынша интроспективті болып табылады, гештальтпсихологияда алдыңғыға қарағанда психикалық үрдіс элементтерін терістеумен және осы элемент құрамына бүтін доминантты болып табылады, сонымен қатар, ойлауда; бихеворизм, оның жақтастары ойлау үрдісін субъективті феномен сияқты тәртіпке айырбастағысы келді; психоанализде барлық басқа үрдіс сияқты ойлауды мотивация бағынды.

XVII ғасырдан бастап белсенді түрде психологиялық ойлар зерттеулері жүргізіліп жатыр. Осы уақыт және келесі ұзақ мерзім бойы психология ойлары тарихы логикамен беттесті, ал оның жалғыз зерттеу түрі теориялық ойлау түсінігі болды, оны кейбір уақытта қате логика деп атады (қате, өйткені логика басқа ойлау түрінде де кездеседі).

Ойлау қабілеті өздігінен туылған деп саналды, дамудан тыс қарастырлған. Зияткерлік қабілеттіктер санына сол уақытта пайымдау жатты (абстрактты ойлаудың аналогы), логикалық пікірлер және рефлексия (өзін-өзі тану). Пайымдау, сонымен қатар, түрге опрецияны қолдану деп түсінді (біздің жіктеу бойынша – теориялық түр ойлау), логикалық пікір – пікір бөлісу және ой қорытындысын жасау, ал рефлексия – өзіндік талдау жасау білумен қалыптасты. Ойлау операциялары өз алдынан жалпылау, талдау, синтез, салыстыру және жіктеу саналды.

Ассоциативті эмпирикалық психологияда ойлау оның барлық өндеулерінде ассоциативке әкелінді, осы уақытт тәжірибесінде алынған

өткеннің ізі мен әсерлер байланысы. Ойлау белсенділігі, оның шығармашылық мінезі негізгі мәселе болды, оны осы теория шеше алмады (жады мен қабылдауды таңдау). Сондықтан, осы теорияның жақтастары ақылдық шығармашылық қабілеттерді априорлық, яғни туылған ой қабілеттіктеріне тәуелсіз деп жариялаудан басқа мүмкіндік болмады.

Бихеворизмде ойлау тапсырмаларды шешумен байланысты дағды мен білудің қалыптасуы, стимул және реакция арасындағы күрделі байланыс құрылымының үрдісі ретінде қарастырылады. Гештальтпсихологияда оған қажетті байланыс немесе құрылым үшін ізделінетін шешімді интуитивті айқындау [3].

Соңғы екі бағыт психологияда ешқандай пайда әкелген жок деп айтуға болмайды. Бихеворизмнің арқасында психологиялық зерттеу аумағында тәжірибелік ойлау енді, ал гештальттеория аймағында ойлауда шығармашылық пен интуицияға көңіл көп бөлінді.

Мұндай жетістіктер психология ойлау мәселелерін шешуде психоанализде де бар. Олар ойлаудың санасыз түріне байланысты, сонымен қатар адамның қажеттілігіне және мотивіне ойлау тәуелді зерттеулер жүргізіледі. Адамның өзіндік ойлау түріне алдында қарастырылған қорғау механизмін жатқызуға болады,олар да алғашқы рет арнайы психологияда зерттеле басталды.

Отандық психология ғылымында адам психикасының табиғатына негізделген ой жаңа тұжырымдамаға ие болды. Оны танымдық үрдістің арнайы түрі ретінде түсінді. Ойлау психологиясы арқылы енгізу қызметтің санаты объект пен субъект түсінігі, теориялық және тәжірибелік ақылдың қарама-қайшылығы өтілді. Осыған байланысты нақты зерттеулер үшін алдында белгісіз, жаңа байланыс ашылды. Алғашқы рет ойлау генезисі туралы сұрақтар қоюға және шешуге, балаларды мақсатты оқыту нәтижесінде оның құрылымы мен даму мүмкіндіктері ашылды. Қызмет теориясында ойлауды тіршілік барысында қалыптасатын әр түрлі тапсырмаларды шешуге және оның тікелей бақылаудан ашуға бағытталған шындықты мақсатты түрлендіру қабілеттілігін құрастырады [4].

А. Н. Леонтьев адам ойының жоғарғы түрін, оның мәдениеттен туындылығын және әлеуметтік тәжірибеде әсерінен даму мүмкіндігін ерікті сипаттап, адам ойы қоғамнана тыс, тілден тыс, адамзаттың жиналған білімі және онымен шығарылған ойлау қызметі әдістерінен тыс: логикалық, математикалық және басқа қызметтер мен операциялар болмайды деп жазған. Жеке адам ойлау субъектісі тек тілді, түсінікті, логиканы меңгергенде ғана болады. Ол ойлау тұжырымдамасын ұсынды, оған сәйкес ішкі және сыртқы құрылымдар арасында қатынастар ұқсас. Ішкі ойлау қабілеті сыртқы тәжірибеліктің туындысы ғана болмайды, сонымен қатар тура сондай құрылым болады. Онда тәжірибелік қызмет сияқты жеке қызмет, операциялар белгіленеді. Сонымен бірге, қызметтің сыртқы және ішкі элементтері өзара байланысты болады. Ойлау, теориялық қызмет құрамына ішкі тәжірибелік қызмет кіре алады және керісінше тәжірибелік қызмет құрамына ішкі ойлау опреациялары мен әрекеттері құрамына кіреді.

Қызметтік ойлау теориясы балалардың оқытуы мен ақылдың дамуында көптеген тәжірибелік тапсырмаларды шешуге көмектесті. Оның базасында мұндай теориялық оқытулар негізделді (оларды ойлаудың даму теориясы деп қарастыруға болады), П. Я. Гальперин теориясы, Л. В. Занков теориясы, В. В. Давыдов теориясы.

Соңғы бірнеше онжылдықта кибернетика, информатика, математикалық бағдарламалауда жоғары деңгейлі алгоритмдік тілдер идеясын құрастыруындаға жетістіктері арқасында жаңа, ақпаратты-кибернитикалық ойлау теориясы пайда болуға мүмкіндік жасады. Оның негізінде алгоритм, операция, цикл және ақпарат түсініктері жатыр. Біріншісі, әрекеттің тізбектей екенін білдіреді, ол тапсырманың шешіміне әкеледі; екіншісі, бөлек әрекетті, оның мінезіне қатысты; үшіншісі, қажетті нәтиже алынғанға дейін бір әрекеттің қайта-қайта қайталауына кіреді; төртіншісі, тапсырманы шешу барысында бір операциядан келесісіне берілгенде ақпараттар жиынтығы. Ақпаратты машиналық өңдеу бағдарламаларында және ЭЕМ тапсырмаларды шешу үрдісінде қолданылатын көптеген арнайы операциялар адам ойлау кезінде қолданылатынға сәйкес болады. Бұл ЭЕМ-де адамның ойлау операциясын зерттеуге және ақылдың машиналық моделін құруға мүмкіндік береді.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Интеллектуалды жүйелер және олардың оқу процесіндегі қолданылуы жайлы // Қарағанды университетінің хабаршысы. Педагогика сериясы. – 2006. – № 2 (42). – Б.102-105. (М. С. Мәлібековамен авторлық бірлестікте).

2 Интеллектуалды жүйелердің алғы шарттары және жоғары оқу орындарында оқытудың ғылыми теориялық негіздері // Ұлт тағылымы. – 2008. – №1. – Б.85-88. (М. С. Мәлібековамен авторлық бірлестікте).

3 Жаңа ақпараттық технологиялардың оқу процесіндегі рөлі // XXI ғасырдағы ғылым және білім: Еуразия кеңістігінде даму динамикасы: халықаралық ғылыми-практикалық конференцияның материалдары. – Б.3. – Павлодар : Павлодар университеті, 2006. – Б. 141-143. (Д. К. Шегировамен авторлық бірлестікте).

4 Жасанды интеллект жүйесінің қоғамда қолданылуы жайлы // Жоғары оқу орындарында білікті мамандар даярлаудың өзекті мәселелері: халықыралық ғылыми-практикалық конференциясының еңбектері. – Тараз :»ТАШ» баспаханасы, 2007. – Б. 241-244.

Материал 19.03.15 баспаға түсті.

Д. С. Мусабекова, Д. С. Найманова

Влияние обучения технологии нейронных сетей на развитие мышления студентов

Павлодарский государственный
университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.
Материал поступил в редакцию 19.03.15.

D. S. Musabekova, D. S. Naimanova

Influence of neural network technology training for the development of students' thinking

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.
Material received on 19.03.15.

В статье рассмотрим наиболее известные теории, объясняющие процесс мышления. Их можно разделить на две большие группы: те, которые исходят из гипотезы о наличии у человека природных, не изменяющихся под влиянием жизненного опыта интеллектуальных способностей, и те, в основу которых положено представление о том, что умственные способности человека в основном формируются и развиваются прижизненно.

In the article we consider the most well-known theories, explaining the thinking process. They can be divided into two large groups: those, that come from a hypothesis about a presence in the man of natural, intellectual capabilities not changing under influence of vital experience, and those, based on the idea that mental abilities of a man are mainly formed and developed through life.

ӘОЖ 373.5:53

Д. С. Мусабекова, Л. К. Казангапова, А. Авдолхан

ЖАЛПЫ БІЛІМ БЕРЕТІН МЕКТЕПТЕРДЕ ФИЗИКА ПӘНІН ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕЛЕРІ

Білім беру жүйесін жетілдірудің бір жолы ретінде негізгі мектепте физикадан оқу-әдістемелік кешенін жасаудың дидактикалық негіздері қарастырылып отыр.

Кілтті сөздер: оқу-әдістемелік кешен (ОӘК), физика, жалпы білім.

Еліміздің казіргі таңдағы білім жүйесі, әлеуметтік – экономикалық жағдайы, тұрмыс жағдайы көптеген өзгерістерге ұшырап, жаңаша сипатқа ие болуда. Ел басымыз жыл сайын қазақстандықтарға үндеу жариялап, болашақта іске асырылатын негізгі міндеттер мен айқын басымдылықтарды анықтап береді. Солардың бірі білім беруді дамытудың 2011-2020 мемлекеттік бағдарламасы. Аталмыш бағдарламада техникалық және кәсіби білім беруді дамыту туралы нақты тапсырмалар жүктеліп, мемлекеттік тапсырыстар көрсетілген.

Мемлекеттік бағдарламаларды қанағаттандыру үшін жалпы білім беретін мектептерде білім сапасы төмен оқушыларды орта арнаулы білім алуға жібереді. Ол мекемеде білім сапалары «төмен» оқушылар арнайы бір мамандықты толық сапалы игеріп кете алмайды. Берілген мерзімде мемлекеттің тапсырыс берген қаражатына білім алып шығады. Бірақ, сол мамандар сапасыз болыды, міне сондықтан, еліміздегі жұмыс берушілер мамандарды шет елден тартып, өз елімізде жұмыссыздық пайда болуда.

Елімізде тұрғындарды жұмыспен қамту орталықтарында шағын және орта кәсіпке қажет мамандарды іздестіріп, арнайы оқу орындарына қаражат бөліп тапсырыс арқылы оқыту, қайта даярлықтан өткізу сынды іс-шаралар ұйымдастырылып жатады.

Сапалы кәсіби және техникалық білім беруді қамтамасыз ету үшін мектепте физика пәнін деңгейлеп оқытудың заманауи оқу құралын пайдалануды жүзеге асыру қажет.

Физика пәнін деңгейлеп меңгергенде, онда бірінші деңгейдің оқушысы мемлекеттік стандартты меңгере отырып кәсіби – техникалық арнаулы орта оқу орындарында сапалы білім алады. Екінші деңгейдің білімін меңгерген оқушы ЖОО–да білімін жалғастыруға үміткер болса, үшінші деңгейдің білімін толық меңгерген оқушы шығармашылық жұмыстар мен олимпиадаларға қатыса алады.

Жалпы білім беретін мектептерде физика пәнін оқыту әдістемелеріне талдау жасап, оқушылардың мемлекеттік стандартты толық меңгерулеріне ықпал етеіп, болашақ техника саласындағы мамандардың сапасын арттыру мақсатында физика ғылымының теориялық негізін меңгеру қажет.

Болашақ кәсіби – техникалық мамандардың кәсіби дайындық деңгейінің дамуына үлесін қосатын оқушылардың білімдерін бақылау мен тереңдететін жаңа ғылыми – педагогикалық оқыту әдістемесін жасап, оны оқу үрдісінде пайдалану қажет.

Қазіргі тәуелсіз Қазақстанда орта мектепте білім беру үлкен өзгерістерге ұшырады. Оқу үрдісінің дербестендіруіне сәйкес бірыңғай орта мектеп жойылып, жалпы білім беретін орта мектептер, гимназия, лицей және тереңдетіп оқытылатын мектептер пайда бола бастады. Қазіргі оқу жүйесінде мұғалім әрбір оқушыны жеке тұлға ретінде бағалағандықтан, мұғалім білімнің нақты көзі емес, оның ұйымдастырушысы болып табылады. Оқыту процесі бір жақты жүрмеу үшін оқу әдістерін белсенді түрлендіріп, жүргізіп отыру керек және оны белсенді жүргізу үшін «жақсы оқулықтар» керек. Яғни, осыдан келіп білім беру жүйесін жетілдірудің бір жолы ретінде негізгі мектепте физикадан оқу-әдістемелік кешенін (ОӘК) жасаудың дидактикалық негіздері қарастырылып отыр. Бұл жерде бірнеше мүмкіндіктер қарастырылған:

а) оқушыларға арналған оқулық дайындау;

ә) мұғалімге арналған көмекші құралдар;

б) ата-аналармен бірігіп жұмыс жасауға арналған оқулықтарды дайындау.

Білім берудің жалпы мазмұны:

– білім беру мазмұны туралы ұғым;
– білім беру құрылымының бөліктері;
– білім беру түрлері;
– білімнің мазмұнын анықтайтын құжаттар.

Білімнің мазмұны дидактиканың негізгі ұғымдарының бірі. Ол әрбір мектеп реформасының негізіне жатады, ал өзгерістер тек қана жергілікті факторлардың ықпалымен ғана емес, сонымен қатар халықаралық ықпалмен жүреді.

Білім мазмұны балаларға «Нені оқыту керек?» – деген сұраққа жауап береді. Бала тағдыры көбіне оның білімінің саны мен сапасына байланысты. Білім беру мазмұнының теориялық мәселелерін және оны іріктеу жолдарын В. В. Краевский, И. Я. Лернер, В. С. Леднев, М. Н. Скаткин, т.б. зерттеді [1, с. 65–70.]. И. Я. Лернердің анықтамасы бойынша «білімнің мазмұны дегеніміз – оқушыға берілетін білім, іскерлік және дағды жүйесі, шығармашылық іс-әрекет, эмоциялық қарым-қатынас тәжірибесі». Ең бастысы, білімнің мазмұны жеке тұлғаны жан-жақты үйлесімді дамыту керек.

Білім құрылымы төрт бөліктен тұрады. Білім жалпы білімнің мазмұнындағы негізгі элемент, болмысты тану, табиғат, қоғам және ой заңдарын ашу нәтижесі, әлеуметтік-тарихи тәжірибе процесінде адамдардың жинаған тәжірибесі. Білім мазмұнының түрлері:

– күнделікті болмыс туралы негізгі ұғымдар, терминдер және ғылыми білімдер;

– көзқарастарды дәлелдеуге керекті күнделікті өмірден және ғылымнан алынған фактілер;

– болмыстың әртүрлі объектілері және құбылыстары арасындағы байланыстарды көрсететін ғылымның негізгі заңдары;

– белгілі бір объектілер, олардың арасындағы байланыс туралы ғылыми білімдер;

– ғылыми іс-әрекет тәсілдері, таным әрекеті және ғылыми білімді алу тарихы туралы білімдер;

– әртүрлі өмір құбылыстарын бағалау нормалары туралы білімдер.

Физиканы оқыту әдістемесі – ғылыми білімнің салыстырмалы түрде жас саласы болып саналады. Ол адамзат қоғамының белгілі бір даму кезеңдерінде мектептің алдында туындайтын міндетті орындау арқылы жетілдірілді. Оның қандай күйде болу деңгейінің айқын көрсеткіші – озық әдістемелік идеялар ауысымы көрініс табатын әдістемелік нұсқаулар мен жалпылама еңбектер шығару болып табылады. Кезінде көрнекті физик-педагогтар физиканы оқыту әдістемесі бойынша түпнұсқа әдебиеттер шығару ісін қолға алған болатын.

Жалпы білім беретін орта мектептердегі бағдарламаға сәйкес орта кәсіптік-техникалық оқу орындарында физиканың негіздері оқытылады, дегенмен курс әр уақытта заманауи және бір мезетте қарапайым болуы тиіс. Оның заманауилығы – өмір талабы. Себебі, физика үздіксіз даму үстінде, оның техникалық қолданысы кеңейіп, түрлері өзгеруде және бұл ретте жастар ғылым мен техника саласында, өндірісте жұмыс істеуге дайын болуы тиіс. Сонымен қатар, физика курсы өскелең ұрпаққа қол жетімді және салыстырмалы түрде тұрақты болып қалуы тиіс. Онсыз табысты, ойдағыдай білім алу мүмкін емес.

Қазіргі кезеңде орта мектеп пен кәсіптік-техникалық оқу орындарында физиканың негізгі бөлімдері оқытылады. Ол қазіргі талапқа сай және қарапайым болуы керек. Қазіргі кезде техника мен ғылымның күрт дамып алға басуына байланысты, мектепте алған білімдерін өмірде пайдалана алатындай, сонымен қатар ол көпшілікке түсінікті карапайым, меңгеруге оңай болуы қажет. Осы айтылғандарды ескере отырып физикадан орта мектеп курсының білім жүйесі мына талаптарға сай болуы тиіс:

а) қазіргі ғылыми түсініктерді, ұғымдарды қалыптастыру;

ә) негізгі физикалық заңдар мен теорияларды танып – білу;

б) физикалық әдістерді түсіну;

в) кәсіптік-техникалық бағдар беру;

г) оқушылардың ойлау қабілетін дамыту;

д) диалектика-материалистік көзқарасын қалыптастыру.

е) ақпараттық технологияларды пайдалану.

Бағдарламада оқушылардың кандай білім алу керектігін, ал оқытушылардың оқушыларға қандай білім беру керектігі анықталада. Оны орындау міндетті және де бұл барлық мектептерде бірдей білім алуға көмектеседі. Мектеп физика курсының жүйесі, құрылымы, мазмұны, оның дамуы осы оқу бағдарламасына байланысты болады.

Физика ғылымының алға дамуына байланысты, оның техника мен өндірісте қолдануына карай бағдарламада өзгерістер болып тұрады. Қазақстанның егемендік алуына байланысты 2000 жылы Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі, Ы. Алтынсарин атындағы Қазақтың Білім академиясы «Физика және астрономия» бағдарламасын жасады. Міне, осы өзгерістерге байланысты физика курсын құру мүмкіншіліктеріне көңіл қойған жөн. Физикадан оқу материалдарын таңдап алған кезде мына жағдайлар ескерілуі тиіс:

– оқушылардың жас ерекшеліктері мен ғылыми түрде түсіндіру сәйкестігі және жүйелілігі;

– мазмұнның казіргі кездегі ғылымға кайшы келмеуі және оның әдіснамалық бағыттылығы;

– казіргі кездегі ғылымға сәйкестігі - теория мен практиканың арасында алшақтық болмау;

– физиканың басқа пәндермен байланыстылығы ескеріледі.

Мектеп қабырғасында физика курсын үздіксіз, жүйелі түрде оқып-үйрену негізінде оқушының логикалық ойлау, ой қорыту қабілетінің қалыптасып, шығармашылық іс-әрекетінің жан - жақты жетілуіне жағдай туады. Физика курсы білім берудің мемлекеттік жалпыға міндетті стандартына сәйкес құрыла отырып, оқушының келешекте игеретін кәсіби дайындығының бастапқы сатысын құрайды [2, б. 231]. Орта мектепте оқылатын физика пәнінің осындай мүмкіндіктерін ескере отырып, оны тиімді оқытудың негізгі мақсаттары айқындалды.

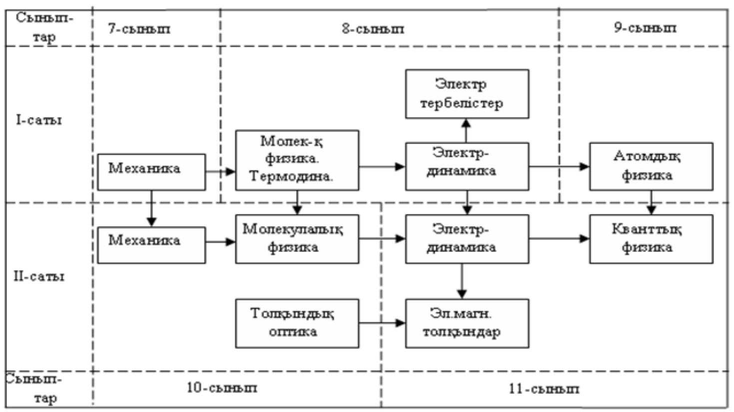
Қазіргі уақытта елімізде білім берудің барлық деңгейлеріне арналған мемлекеттік стандарттары әзірленіп, тәжірибеге енгізілді. Оның көп себебі бар. Білім мазмұнын анықтау кезінде ұлттық және аймақтық ерекшеліктер ескерілді. Стандарттың бірінші бөлімінде жалпы білім берудің мақсаты мен міндеттері, білім мазмұнының құрамы, екінші бөлімінде білім беру салалары, базалық білімнің мазмұны, орта мектепті бітіретін оқушының дайындық деңгейіне қойылатын талаптар жазылған. Жоғары сатыда (10-11 сыныптар) негізгі мектептің барлық пәндері бойынша жалпы білімдік дайындық аяқталады.

Қазақстан мектептеріндегі негізгі білім сатысы физика пәнінен 7-9 сыныптарда физика пәнінен білім берудің негізгі бағдарламасы бойынша механика, молекулалық физика және термодинамика, электродинамика, атомдық физика секілді бөлімдер қамтылады (1-кесте).

Физика бөлімдері мектепте сызықты – концентрлік әдіспен оқытылады. Механика, молекулалық физика, электрдинамика бөлімдері I мен II – сатыларда айналмалы түрде оқытылады. Физика пәнін жаңадан оқып бастап жатқан жас жеткіншектерге физиканың тылсым дүниелері өте қызық, сондықтан көкейлеріндегі көп сұрақтардың жауаптарын физика пәнін деңгейлеп меңгеру барысында табады [3]. Қазіргі кезде жалпы білім беретін мектептерде физика пәнінен оқыту әдістемелері мен оқулықтар, есептер жинағы, жұмыс дәптерлері көптеп кезігеді. Бірақ мектептер ҚР Білім және ғылым министірлігінің ұсынған оқу құралдарына ғана тапсырыс береді..

Жалпы білім беретін мектептердің физика пәніне арналған оқулықтар мен оларға ұсынылған қосымша құралдардың мазмұны мен ғылыми негізін талдау барысында барлығы да бір мақсатта жазылғаны анықталды. Физика күрделі ғылым. Физиканың заңдылықтары мен заңдарын оқуды жаңадан бастаған 7- сынып оқушылары түгелдей меңгеріп кете алмайды. Жұмысты нәтижелі және жүйелі жүргізу үшін оқулыққа негізделген барлық оқыту әдістемелері әрбір оқушыны қамтамасыз ету керек. Есептер жинағы мен жұмыс дәптерлері сыныптағы оқушыларға жеткілікті болу керек. Сонда ғана мақсатқа жету үшін жұмыстар атқарылады. Бекітілген оқулық бойынша мұғалім оқушыны дәстүрлі дәптермен, есептер жинағы арқылы жұмыс жасатуы шарт. Әр мұғалімнің оқыту технологиясына байланысты оқу құралдарын таңдау мұғалім еншісінде.

кесте 1 – Физика пәнінің Қазақстан стандарты бойынша құрлымы



Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі ұсынған 7- сынып оқулығы Р. Башарұлы, У. Тоқбергенова, Д. Қазақбаева «Физика және астрономия» (Алматы: «Атамұра», 2012 ж. – 240 бет, 3-басылым). Оқулықтың басты мақсаты – оқушыға өз бетімен білім алу үшін қажетті құрал болу. Оқулық Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі Ы. Алтынсарин атындағы ұлттық білім академиясы дайындаған оқу бағдарламасына (7-9 сыныптар, Астана 2013ж.) сай дайындалған [4]. Бағдарламада «Физика – оқушыға білім беретін және өзіндік тәрбиелік ықпалы бар, оның ақыл – ойын және логикалық ойлау қабілетін дамытатын, ерік – жігерін тәрбиелейтін өзіндік мазмұны және зерттеудің ғылыми әдістері бар жетекші ғылымдардың бірі болып табылады. Бүгінгі мектептегі «Физика» оқу пәнінің курсы ғылыми түрде ойлауды қалыптастыруға бағытталған, оқушының шығармашылық, коммуникативтік қабілетін, абстрактілі – теориялық және практикалық ойлауын, сыни ойлау және талдау дағдыларын дамытуға мүмкіндік береді» – делінген.

Физика пәні әрбір сыныпта аптасына 2 сағаттан беріле отырып, оқу жылында 68 сағатты қамтиды. Негізгі жалпы физика курсының мазмұнына механика, молекулалық физика, электродинамика, кванттық физика бөлімдері енгізілген. Пәнді оқытуға арналған сағат мөлшері сыныптардың бағыттарына сәйкес өзгереді. Мектептің жоғарғы сатысына (10-11-сыныптарда) физика пәні екі бағытта қарастырылады. Егер жаратылыстану – математикалық бағыттағы сыныптарда аптасына 3 сағаттан жылына 102 сағат болса, қоғамдық – гуманитарлық бағытта аптасына 1 сағаттан, жылына 34 сағатты қамтиды.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 **Ерофеева, Г. В., Склярова, Е. А., Пескова, Е. С.** Естественнонаучное образование в условиях школы [Текст] / Г. В. Ерофеева, Е. А. Склярова, Е. С. Пескова // Человек и образование. – 2011. – № 3. – С. 65–70.

2 **Коменский Я. А.** Великая дидактика // В кн.: Хрестоматия по истории зарубежной педагогики / сост. А. И. Пискунов: 2-е изд. перераб. – М., 1981. – 231 с.

3**Ударцева В. М., Ударцев С. В.** Физика және астрономия // 7-сыныпқа арналған жұмыс дәптері. – Алматы, 2013.

4 **Башарұлы Р., Тоқбергенова У.,** Қазақбаева Д. Физика және астрономия // 7-сыныпқа арналған оқулық. – Алматы : Атамұра, 2012.

Материал 19.03.15 редакцияға түсті.

Д. С. Мусабекова, Л. К. Казангапова, А. Авдолхан

Методика обучения по дисциплине физика в средних общеобразовательных школах

Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

Материал поступил в редакцию 19.03.15.

D. S. Mussabekova, L. K. Kazangapova, A. Avdolxan

Methodology of educating physics in comprehensive schools

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.

Material received on 19.03.15.

Для повышение знания в обучении физике в средних общеобразовательных школах были рассмотрены методическая пособия.

For increase of knowledge in educating physics in comprehensive schools there were considered methodical manuals.

УДК 512, 519.688

И. А. Никитин[1], Ин. И. Павлюк[2]

[1]студент, кафедра ВТиП, [2]к.ф-м.н, доцент, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, г. Павлодар.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ГРАФИЧЕСКОГО ИНТЕРФЕЙСА XGAP

В работе исследована командная оболочка Bash и GCC-расширение для языка C, и их применение для разработки графического интерфейса XGAP.

Ключевые слова: графические функции, сопряженные классы подгрупп.

Bash (Bourne-again-shell) – одна из многих оболочек Linux, разработанная в 1987 Брайаном Фоксом. Она построена на базе оболочки Bourne-shell, названной в честь ей разработчика Стивена Борна. Оболочки Linux – интерактивный интерфейс командной строки, которые используются для управления процессами и файлами.

Shell-script – представляет собой последовательность команд сохраняющихся в файл и используемых как программы. Bash выделился среди других оболочек за счет обширного использования скриптовых языков. Кроме Linux, Bash работает на MAC OS, BeOS, Interix, Cygwin, и на некоторых версиях Windows [1].

Для скачивания нужных файлов для установки Bash используется менеджер пакетов. Установка Bash производится через терминал командой apt-get install bash. В старых версиях Linux Bash устанавливается из папки, в которой находятся все его подпакеты с помощью последовательности команд ./configure, ./make.

Исполнительный файл, который открывает командная оболочка Bash, имеет формат .sh.

Оболочка Bash состоит из множества скриптов, которые пишутся базовыми конструкциями объектно-ориентированных языков, адаптированных под Linux.

Приведем примеры синтаксиса основных команд:

– Условие if:

```
if test-commands; then
consequent-commands;
[elif more-test-commands; then
more-consequents;]
[else alternate-consequents;]
fi
```

– оператор выбора case:

```
case word in [ [(] pattern [| pattern]...) command-list ;;]... esac
```

– оператор выбора select:

```
select name [in words ...]; do commands; done
```

– цикл While:

```
while test-commands; do consequent-commands; done
```

– цикл For:

```
for name [ [in [words ...] ] ; ] do commands; done
```

Или альтернативная команда:

```
for (( expr1 ; expr2 ; expr3 )) ; do commands ; done
```

– цикл Until:

```
until test-commands; do consequent-commands; done
```

Для каждого аргумента создается локальная переменная с помощью команды:

```
local [option] name[=value] ...
```

Так же Bash как оболочка имеет возможность использовать базовые команды терминала.

Shell-scripts – представляют собой текстовый файл, включающих в себя команды интерпретатора. Когда вызывается Bash для чтения такого файла, игнорируются любые права доступа к этому файлу, производится полное считывание скрипта. Bash, запуская скрипт, присваивает ему значение 0, и устанавливает позиционные параметры на имеющиеся в файле аргументы. Скрипт может быть запущен, если в файле имеется файл CHMOD. В большинстве версий Linux эти действия автоматизированы, и интерпретатор программы определяется после символов #!. Чаще всего любые скрипты Bash начинаются с символов #!, так как это гарантирует запуск интерпретации сценария под любой другой оболочкой [2].

Все скрипты в операционной системе Linux компилируются с помощью языка С. Для расширения возможностей системного программирования языка С устанавливается GCC-расширение.

GNU Compiler Collection (GCC) – предоставляет множество расширений для языка С, которые предоставляют особую ценность для системных программистов. Основной задачей является обеспечить дополнительной информацией компилятор о поведении и целевом использовании кода. Компилятор использует эту информацию для более эффективного генерирования кода машины.

Другие задачи заключаются в заполнении пробелов при использовании языка С на более низких уровнях [3].

GCC предоставляет функции комплексных переменных, нулевую длину массивов, встроенные функции и их инициализаторы. Кроме этого, GCC обладает оптимизирующими функциями, так как запускает дополнительные линкеры, компиляторы, предпроцессоры в зависимости от расширения файлов [4].

Основными инструментальными средствами для визуализации бинарных отношений конечных абстрактных моделей являются Bash оболочка и GCC-расширение языка С.

Для работы графического интерфейса XGAP на языке С написаны библиотеки имеющие формат .h, и исполнительные файлы для GCC-расширения с форматом .c которые включает в себя объявление встроенных и созданных библиотек командой #include.

Библиотеки включают в себя:

– popdial.h – всплывающие диалоговые окна;

– gapgraph.h – графический лист GAP;

– gaptext.h. – текст в GAP;

– utils.h. – вспомогательные функции;

– xgap.h. – открытие XGAP;

– xcmds.h., selfile.h.,pty.h. – библиотеки GCC.

Командная оболочка Bash дает возможность открыть XGAP в виде графического интерфейса, используя функции и скомпилированные библиотеки С. XGAP – внешний подпакет для системы компьютерной алгебры GAP, который дает возможность визуально построить графы решеток подгрупп заданной группы [5].

GraphicSubgroupLattice() – метод, с помощью которого к GAP подключается графический интерфейс. Этот метод хранится в внутренней библиотеке XGAP, которая задействуется только при вызове GraphicSubgroupLattice().

GraphicSubgroupLattice() включает в себя набор функций и методов, написанных конструкциями командой оболочки Bash.

Приведем пример используемых функций:

Function(G,def) – определяет размер тривиальных подгруппы, избегает тривиальные группы, открывает графическое и определяет размер этого окна в зависимости от масштаба заданной группы.

Функция poset хранится в отдельном файле poset.gi и определяет в настоящем времени позицию курсора или координаты расположения элементов группы.

Кроме метода GraphicSubgroupLattice() используются методы, которые дают дополнительную информацию о группе:

– GGLFactorGroup – вычисляет фактор-группу, если это возможно;

– GGLStringGroup – генерирует строку, которая описывает группу;

– GGLStringCosetTable – генерирует строку, описывающую смежные классы;

– GGLStringEpimorphism – генерирует строку, описывающую эпиморфизм;

– GGLMenuOpsForFiniteGroups – создает меню с формами для функций, которые предназначены для работы над группой. В меню входят формы: All Subgroups, Centralizers, Centres, Closure, Closures, Commutator Subgroups, Conjugate Subgroups, Cores, DerivedSubgroups, Normalizers, Sylow Subgroups;

– GGLMenuOperation – отвечает за операции в меню;

– GGLAbelianPQuotient – вызывает p-группы и вспомогательные библиотеки;

– GGLLowIndexSubgroups – индексирует группы начиная с высокого уровня до низкого.

Каждая приведенная функция включает в себя множество условий, циклов и дополнительных функций, для реализации алгоритма.

Для построения графа сопряженных классов подгрупп используем функцию:

```
rec( name := "All Subgroups",
op := function(G)
local result,cl;
result := [];
for cl in LatticeSubgroups(G)!.conjugacyClassesSubgroups do
Append(result,AsList(cl));
od;
```

return result;
end.

По вышеприведенному примеру видно, что построение бинарных отношений в графическом виде в системе компьютерной алгебры GAP возможно за счет функций и методов внешнего пакета XGAP. В дальнейшем возможно расширение функционала программы, добавление новых форм и объектов, улучшение построения графов для более удобночитаемой формы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Scripting Languages, Bash Scripting. – Cornell University, New York. – 2013. CS-5142. – P. 24.

2 **Ramey C., Fox B.** Bash Reference Manual v4.3. – Case Western Reserve University. – 2014. – P. 172.

3 GCC-расширение языка C [Electronic resource]. – URL: http://www.linuxdevcenter.com/pub/a/linux/excerpts/9780596009588/gcc-extensions-to-the-c-language.html (date of treatment: 26.03.2015).

4 Компилятор GCC [Electronic resource]. – URL: http://parallel.uran.ru/book/export/html/25 (date of treatment: 26.03.2015).

5 **Celler F., Neunhoeffer M.** XGAP. [Electronic resource]. – URL: http://www.gap-system.org/Packages/xgap.html (date of treatment: 26.03.2015).

Материал поступил в редакцию 19.03.15.

И. А. Никитин, Ин. И. Павлюк

XGAP графикалық интерфейс үшін инструменталды құралдарды пайдалану

С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.
Материал 19.03.15 редакцияға түсті.

I. A. Nikitin, In. I. Pavlyuk

The use of tools for graphical user interface XGAP

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.
Material received on 19.03.15.

Бұл жұмыста Bash командалық қабықшаны зерттелеуі және C тілі үшін GCC-кейнейтілуі, XGAP графикалық интерфейсі үшін олардың қолданалуы қарастырылған.

We have studied the Bash shell and GCC-extension for the language C and their application for the development of graphical user interface XGAP.

УДК 512, 519.688

И. А. Никитин, Ин. И. Павлюк

[1]студент, кафедра ВТиП, [2]к.ф-м.н, доцент, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, г. Павлодар.

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ КОНЕЧНЫХ АБСТРАКТНЫХ МОДЕЛЕЙ В СИСТЕМЕ GAP

Исследованы алгоритмы описания графа группы с помощью списка и матриц в системе GAP, построен граф подгрупп симметричной группы S_3.

Ключевые слова: группа, визуализация графов, система компьютерной алгебры.

GAP (Groups, Algorithms, Programming) – система компьютерной алгебры, основной функцией которой является работа с вычислительной теорией групп [1]. В нашем случае рассматриваются возможности GAP при описании графа подгрупп. Наиболее расширенные возможности открыты при работе с GAP в операционных системах (OS) Unix/Linux, так как большинство внешних пакетов не адаптированы для использования в других операционных системах.

Рассмотрим установку GAP и его подпакетов на разные операционные системы. На OS Windows GAP устанавливается как обычное приложение, и при распаковке всех файлов требуется лишь запустить исполнительный файл в корне программы с расширением .exe. В OS Linux программист имеет больше возможностей при работе с GAP и самостоятельно устанавливает все нужные библиотеки языка высокого программирования C и Bash для запуска GAP и его внешних модулей, таких как XGAP.

Установка GAP на OS Linux производится через терминал и состоит из следующих шагов:

1) подключается режим администратора с помощью команды sudo – s;

2) необходимо обновить все имеющиеся библиотеки в Linux, если OS имеет старые версии, с помощью команды apt-get update;

3) начинаем установку библиотек необходимых для работы с GAP:

– apt-get install libxaw7-dev – X11 Athena Widget library (development headers(Заголовки));

– apt-get install libxt-dev – предоставляет абстрактную библиотеку виджетов на которых основаны другие инструментальные средства, в том числе Athena Widget;

– apt-get install m4 – макропроцессор Linux;

4) в менеджере пакетов находим С компилятор с чтением формата gcc и устанавливаем его в терминале с помощью команды:

svn co svn://gcc.gnu.org/svn/gcc/branches/gcc-4_9-branch/

В том же менеджере можно установить и сам GAP, и некоторые его внешние модули.

5) после установки всех библиотек и самого GAP в корневой папке прописываем необходимые команды для компиляции всех С и Bash кодов и проверки работоспособности всех модулей:

– ./configure – конфигурирует все файлы;

– make – проверяет наличие всех библиотек и создает исполнительный файл gap.sh;

– ./bin/gap.sh – запускает GAP.

Для установки любого внешнего пакета, проделываем те же самые действия в корневой папке пакета, хранящегося в папке pkg.

При работе с графами в GAP максимальной возможностью является построение описания графа с помощью списков или матриц.

Напомним, что теория графов впервые была затронута Л. Эйлером в 1736 году, но развиваться стала лишь в XIX веке, благодаря тому, что стала активно использоваться при построение электрических цепей и молекулярных схем [2].

Граф группы является одним из способов ее наглядного изображения, он может дать возможность мысленно представить группу, подсказать более эффективное доказательство требуемого результата. Для конечных групп малого порядка он может быть использован для задания группы вместо таблицы Кэли, так как содержит ту же информацию, но в более наглядной форме.

Дадим интуитивное описание графа группы [3]. Пусть G – группа. Для простоты будем считать, что она имеет представление с двумя образующими элементами a и b. Установим взаимно однозначное соответствие между элементами g группы G и вершинами P_g графа группы G. Теперь соединим вершины графа ориентированными ребрами двух различных типов, соответствующих образующим элементам a и b (например, ребрами двух различных цветов C_u и C_b), по следующему правилу:
если $ga=s$, $ga^{-1}=t$, $gb=u$, $gb^{-1}=v$, то проводим:

Ориентированные ребра цвета C_a:

– от вершины P_g к вершине P_s;

– от вершины P_t к вершине P_g;

Ориентированные ребра цвета Cb :

– от вершины P_g к вершине P_u;

– от вершины P_v к вершине P_g.

Таким образом, в каждой вершине графа будет начинаться в точности одно ориентированное ребро каждого цвета и будет заканчиваться в точности одно ориентированное ребро каждого цвета. Построенная конструкция обычно и называется графом группы G с образующими a и b. В литературе встречаются названия «групповая диаграмма», «диаграмма Кэли» или «цветная группа».

В связи с тем, что графические возможности GAP [4] не позволяют наглядно изобразить описание графа, мы можем получить его численное описание, используя две функции Graph и `Mat` .

Первая функция вычисляет списки всех элементов группы и ее порождающих элементов, а затем получает описание графа в виде списка, элементами которого являются тройки чисел вида [i, j, k], означающие, что от вершины с номером i к вершине с номером j проведено ориентированное ребро цвета с номером k [5]:

```
Graph:=function(G)
local elms, # список всех элементов группы
gens, # список порождающих элементов группы
graph,# описание графа группы
i,   # индекс элементов группы
k,  # номер цвета (порожденного элемента группы)
j;  # номер конца ребра цвета k с началом в вершине i
elms:=AsSSortedList(G);
gens:=GeneratorsOfGroup(G);
graph:=[];
for i in [1 .. Length(elms)] do
 for k in [1 .. Length(gens)] do
j:=Position(elms, elms[i]*gens[k]);
Append(graph, [[i,j,k]]);
od;
od;
return graph;
end;
```

Вторая функция представляет полученный с помощью первой функции список в виде квадратной матрицы порядка |G|, в которой элемент aij равен k, если от вершины с номером i к вершине с номером j проведено ориентированное ребро цвета k, и нулю в противном случае. Заметим, что это менее экономичное хранение информации о графе группы, так как такая матрица содержит довольно много нулевых элементов [5]:

```
Mat:=function(graph)
local l, n, mat, i,j, x;
l:=List(graph, x -> x[1]);
Append(l, List(graph, x -> x[2]));
n:=Maximum(l);
mat:=[];
for i in [1..n] do
  mat[i]:=[];
for j in [1..n] do
mat[i][j]:=0;
od;
od;
for x in graph do
mat[x[1]][x[2]]:=x[3];
od;
return(mat);
end;
```

Для того чтобы использовать на примере функции, нам понадобится ряд встроенных в систему GAP команд и функций [4]:

Команда List предоставляет возможность работы со списком элементов или параметров.

Команда Append добавляет в переменную или, в нашем случае, в список нужные нам элементы.

Функция SymmetricGroup(x) задает симметричную группу элементов порядка «x»:

```
gap> S:=SymmetricGroup(3);
Sym( [ 1 .. 3 ] )
```

Функция GeneratorsOfGroup(x) возвращает набор генераторов для конечного индекса группы «x»:

```
gap> GeneratorsOfGroup(S);
[ (1,2,3), (1,2) ]
```

Функция AsSortedList(x) показывает какой элемент группы «x» соответствует вершине графа с соответствующим номером:

```
gap> AsSSortedList(S);
[ (), (2,3), (1,2), (1,2,3), (1,3,2), (1,3) ]
```

Функция Graph(x) позволяет представить группы в виде списка:

```
gap> t:=Graph(S);
[ [ 1, 4, 1 ], [ 1, 3, 2 ], [ 2, 3, 1 ], [ 2, 4, 2 ], [ 3, 6, 1 ],
[ 3, 1, 2 ], [ 4, 5, 1 ], [ 4, 2, 2 ], [ 5, 1, 1 ], [ 5, 6, 2 ],
[ 6, 2, 1 ], [ 6, 5, 2 ] ]
```


Функций Mat(x) преобразует полученных список в матрицу:

```
gap> m:=Mat(t);
[ [ 0, 0, 2, 1, 0, 0 ], [ 0, 0, 1, 2, 0, 0 ], [ 2, 0, 0, 0, 0, 1 ],
[ 0, 2, 0, 0, 1, 0 ], [ 1, 0, 0, 0, 0, 2 ], [ 0, 1, 0, 0, 2, 0 ] ]
```

Команда Display – выводит на экран матрицу в удобночитаемой форме:

```
gap> Display(m);
[ [  0,  0,  2,  1,  0,  0 ],
[  0,  0,  1,  2,  0,  0 ],
[  2,  0,  0,  0,  0,  1 ],
[  0,  2,  0,  0,  1,  0 ],
[  1,  0,  0,  0,  0,  2 ],
[  0,  1,  0,  0,  2,  0 ] ]
```

В связи с тем, что описание графов производится, используя матрицы, визуальное построение требует высокой мощности ЭВМ, так как количество строк и столбцов матрицы прямо пропорционально факториалу порядка группы.

Для графического изображения описания графов используется пакет XGAP системы компьютерной алгебры GAP [6].

Для вызова графического интерфейса XGAP используется функция GraphicSubgroupLattice(). Рассмотрим алгоритм построение графа решетки подгрупп симметричной группы S_3:

```
G:=SymmetricGroup(3);
Sym( [1..3] )
GraphicSubgroupLattice(G);
All Subgroups (G) →  (1,2,3,4,5,G)
```

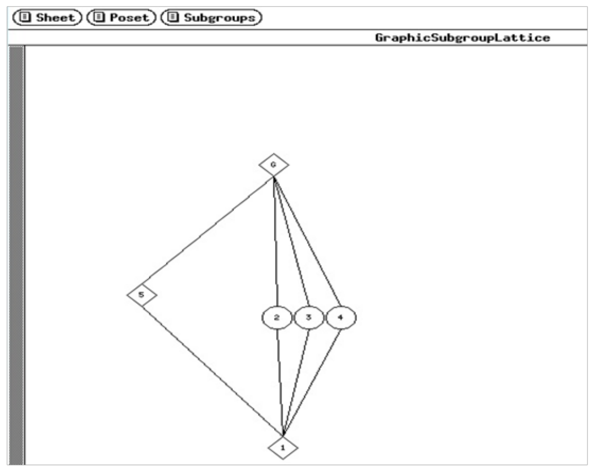


Рисунок 1 – Граф решетки подгрупп симметричной группы S_3

Для построения используются встроенные функции GAP и дополнительные функции, написанные на языке С в оболочке Bash. Bash – усовершенствованная командная оболочка OS Linux.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Никитин, И. А., Павлюк, Ин. И.** Об алгоритме вычислительной теории групп // Материалы международной научной конференции молодых ученых «XIV Сатпаевские чтения». – Павлодар, 2014, Т. 8. – С. 23-26.

2 Оре. О. Графы и их применение // М. : Издательство «Мир». – № 2. – 1965. – С. 9-10.

3 **Магнус, В., Каррас, А., Солитэр, Д.** Комбинаторная теория групп // М. : Наука.– 1974. – С. 63.

4 **Коновалов А.** Система компьютерной алгебры GAP 4.7. Редакция 3.1.0. – [Электронный ресурс]. URL: http://www.gap-system.org/ukrgap/gapbook/chap0.html (дата обращения: 20.03.2015).

5 Граф группы [Электронный ресурс]. URL: http://www.gap-system.org/ukrgap/Examples/Graph.htm (Дата обращения: 21.03.2015).

6 **Celler, F., Neunhoeffer, M.** XGAP. [Electronic resource]. URL: http://www.gap-system.org/Packages/xgap.html (date of treatment: 04.03.2015).

Материал поступил в редакцию 19.03.15.

И. А. Никитин, Ин. И. Павлюк

GAP жүйеде элементтердің бинарлық қатынастар үшін ақырғы абстрактық модельдер бойынша визуализациясы

С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.

Материал 19.03.15 баспаға түсті.

I. A. Nikitin, In. I. Pavlyuk

Visualization of binary relations of elements of a finite abstract model in the system GAP

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.

Material received on 19.03.15.

GAP жүйеде граф тобы бойынша тізімі және ұяқалыптардың көмегімен алгоритмдер сипаттамасы зерттелген, симметриялық тобы S_3 бойынша ішкі топ граф жасалған.

Studied algorithms for graph description of the group list and matrices GAP in the system, built by the count of subgroups of the symmetric group S_3.

ӘОЖ 004.9:02

Т. Ү. Рахматов
магистрант, С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.

КІТАПХАНАНЫ БАСҚАРУ ЖҰМЫСЫН АВТОМАТТАНДЫРУ

Бұл мақалада автоматтандырылған кітапханалардың ақпараттық жүйелері мен құрылымдары қарастырылады.

Кілтті сөздер: дифференциалды басқару, кибернетика, электронды автомат, систeмалық басқару, қойылымды механизм.

Басқаруды автоматтандыру теориясы ғылыми пән, сабақты оқу, яғни ол ақпараттық үдеріс болып табылады және ол басқаруды автоматтандыруды жүйесінде өтеді. Басқаруды автоматтандыру теориясы жалпы функциялаудың құқықтарын шығарады, автоматтандыру жүйусіне қатысты әр түрлі физикалық табиғи құбылыстарды және осының негізінде осы құқықтық өнделген қағидалар құру – жоғары сапалы жүйелік басқару болып табылады. Осы үдерістерді басқаруды автоматтандыру теориясы физикалық және конструктивті жекешеленген жүйе және бірге реальды жүйе оның адекваттық математикалық моделімен сабақтасады, сондықтан негізгі зерттеу әдісі Басқаруды.

Н. Культин «Автоматтандыру теориясы математикалық модельдеу болып табылады. Бұдан басқа, басқаруды автоматтандыру теориясының методтық негізі – осы теория, кәдімгі дифференциалды басқару, операциялық шығару, (Лапластың қайта құруы), гармондық анализ (Фурьенің қайта құруы)» [1].

Басқаруды автоматтандыру теориясымен бірге қосылған функционалдық элемент жүйелік басқару теориясы (датчик, басқаруыш, қойылымдық механизм), кең көлемді ғылым тармағын құрады, ол – автоматтандыру.

Автоматтандыру өз кезегінде техникалық кибернетиканың бір бөлімі. Техникалық кибернетика күрделі автоматты басқару жүйесімен техникалық үдерістерді және акционерлік қоғамды зерттейді, ол басқару машиналарын қолданумен жүріп отырады. Бірінші теориялық жұмыс басқаруды автоматтандыру саласында XIX ғасырдың аяғына таман пайда болды, сол уақытта өнеркәсіптердің кең көлемде регуляторлы бұл машинасын пайдалануынан және инженер – практиктердің көптеген қиыншылықтармен соқтығысуы және оны шеше білуімен байланысты.

Шамамен XX ғасырдың ортасына таман регуляторлық бұл машинасының қолданбалы механикалық теория бөлімі белгілі болды. Сонымен қоса анализ әдісі және электроникада автоматты шығару болды. Басқаруды автоматтандырудың енгізілуі өзіндік ғылыми және оқу пәнінде жүретін еді.

Ж. Қ. Масанов , Б. А. Бельгимбаев , А. С. Бижанова, Қ. Қ. Мақұлов «Қазіргі уақытта басқаруды автоматтандыру теориясы жаңа бөлімдермен жалпы теориялық басқару (операцияның өту барысын зерттеу, жүйе - механика, ойын теориялары, баршаға қызмет көрсету) автоматты басқару тэориялы жүйесін құрайды, маңызды рөл атқарады.

Автоматтандыру ғылыми техникалық прогрестің бір маңызды бағыты» [2]. Ол осы заманға сай өнеркәсіп өндірісінің сапасы, персоналды қауіпсіздендіру, қоршаған ортаны қорғау, экономикалық, сенімді және қауіпсіз күрделі өнеркәсіп функциясымен қамтамасыз ету, техникалық басқару, тәуелсіз принциптер көмегімен жүзеге асады.

Осы заманға сай өнеркәсіпті автоматтандыру үшін кең көлемде басқару жүйесінде ЭВМ - ді қолдану, машина, техника, микро ЭВМ-ге адам – машина жүйесін енгізу, жоғары дәрежелі, сапалы, жаңа техниканы қолдану, басқару жүйесінің прәектін нағыз автоматтандыруға жатады емес пе ?!!

Автоматтандыруды яғни жаңа техника енгізу күрделі социал – эко-номикалық құбылыс ұйымдастыру жұмысы, басқару жүйесінің қайта қаралуын, сондай-ақ практикалық нормативті талап етеді. Сондықтан да, кітапханашылардың бүгінгі таңдағы міндеті: жаңа, қолайлы жағдайларға сәйкес келмеген техникалық мінездемесі мен ауқымын анықтау. Кітапханадағы нормативтік базаны қайта қарастыру керектігі, ең әуелде, қажетті кітапханалық жұмыс техникасының жұмыс істеу барысын кітапхана мамандарымен байланыстыру. Қазіргі кезде, кітапханашының жұмысын автоматтандыру өте тиімді, әрі пайдалы болып табылады. Егер еңбек және нормативтік жұмыстың белгілі бір мінезін анықтайтын өзгерістер, кітапхана – библиографтық үдерістерде автоматтандырудың тигізетін әсерінен болады. Осы көзқарастардың әсерінен, ірі кітапханалық – техникалық үдерістерде автоматтандырудың түрлерінің, яғни тура және жанама түрлерінен ұшырауы сөзсіз еді.

«Дәл осы уақытта бүкіл әлемге әйгілі орыс инженер - ғалымы И. А. Вышнеградский ғылыми зерттеулерді жүргізіп, бірінші бу машинасын, оның регуляторын математикалық әдіспен және жалғыз бір динамикалық жүйесімен анализдеді. Кейіннен әйгілі орыс ғалымы А. М. Ляпунов және Н. Е. Жуковский математикалық теория үдерісінің негізін салды, ол автоматты басқару машиналары мен көптеген механизмдерде өтті» [3]. Автоматтандырудың енгізілуі технологиялық дәстүрге жанама әсерін тигізуде, жұмыс жүргізу барысына өзгерістер шақырып, жаңа жұмыс түрлерінің тууына мүмкіндіктер туғызады, ол мүмкіндіктер машинаның

алдында және машинадан кейінгі өңделген, жаңа ақпарат алуға көмектеседі.

Автоматтандырудың әсерінен әрқашан өзгерістер болып отыратыны сөзсіз, және бұл өзгерістер тек еңбек, структуралық еңбек процесінде ғана емес, бірақ мұнда квалификациялық деңгей мен білім деңгейіне деген талап ету өзгереді. Бұл себептермен тығыз байланысқан тағы бір өте маңызды сұрақ туады, ол нормативті кітапханашының жұмысын автоматтандыру технологиясының енгізілу жағдайларына сәйкестеу. Кітапханалық – библиографтық қызмет көрсетуді автоматтандыруды, яғни жаттанды және анализ өзгерістерін, кітапханалық функцияны оқып білудің өте қатал да, маңызды проблемасын туғызды. Осы тенденцияларды бақылауға ала отырып, осы және басқа да есептеулерге дұрыс араласуға, әрдайым дұрыс шешімін табуға мүмкіндік береді. Т. Рысқұлов атындағы ҚазЭУ- інің ғылыми кітапханасының қоры 1963 жылы С. М. Киров атындағы ҚазМУ-дің экономикалық факультетінің негізінде құрылған. Алғашқыда кітапхананың кітап қоры 47500 дана болған. Қазіргі кезде кітапхана университетінің ірі оқу – тәрбие және мәдени ағарту бөлімінің бірі болып табылады, ол 6 бөлімнен тұрады. Анықтамалық – ақпарат қорына келетін болсақ, қор 600 мың данадан астам өндірістік саладағы және шетел әдебиетінен тұратын басылымды құрайды . Мазмұны жағынан жан – жақты, оған ғылыми, көркем әдебиет, оқулықтар, мерзімді басылымдар, диссертациялар, авторефераттар, сирек кездесетін кітаптар қоры, анықтама қоры, ақпараттық басылымдар және тағы басқа кіреді. Әдебиеттерді таңдау үшін, кітапхана қорында оқырмандарға, қазақ, орыс және шет тілдерінде қызмет көрсететін 12 каталог, 10 картотека ұсынылған. Картотекалардың ішінде жиі пайдаланылатындар «Нарық экономикасы», «Экология», «Қазақстан тарихы», «Ақпараттық жүйелер».

Ғылыми кітапхананың ақпараттық жүйесі жаппай, топтасқан және жеке аппараттанудан тұрады. Жалпы ақпараттандыру жүйесі оқырмандардың кең аумағына: профессорлар мен оқытушылар құрамы, аспиранттар, магистранттар, зерттеушілер мен университеттің барлық қызметкерлеріне арналған. Ақпаратпен қамтамасыз етудің нәтижелік формасы жаңа түскен әдебиеттерді насихаттау, тақырыптық көрмелер, студенттермен әңгіме шолулар өткізу. Оқырмандардың сұранысы бойынша қосымша қызметтер атқарылады. Әдебиеттердің тақырыптық тізімін құрастыру және іріктеу, ксерокөшірме қызметі, сканерлік қызмет және тағы басқалары. Ғылыми кітапхана құрамында тығыз байланыста жұмыс істейтін ерекше бірнеше блоктарды атап айтуға болады.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 **Культин, Н.** «Turbo Pascal в задачах и примерах» . – Санкт – Петербург, 2000.

2 **Масанов, Ж. Қ., Бельгимбаев, Б. А., Бижанова, А. С., Мақұлов, Қ. Қ.** «Turbo Pascal». – Алматы, 2004.

3**Вышнеградский, И.А., Жуковский, Н.Е., Ляпунов, А.М.** «Автоматизация асновных библиотечно–библиографических процессов в крупной библиотеке», Сборник – Москва , 1980.

4 «Автоматизация проектирования систем управления». Сборник – статей. Москва, 1979.

5 «Автоматизация систем управления» 1, 2 том (Теория и методология). – Москва, 1972.

Материал 19.03.15 баспаға түсті.

Т. У. Рахматов

Автоматизированное управление работы библиотек

Павлодарский государственный
университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

Материал поступил в редакцию 19.03.15.

T. U. Rahmatov

Computerization of the work of libraries management

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.

Material received on 19.03.15.

В данной статье рассматриваются информационные системы и структура автоматизированных библиотек.

The paper deals with different types of automated library information systems. The necessity of their integration is proposed.

УДК 512.54

Е. В. Самокиш, И. И. Павлюк

[1]магистр математики, сотрудник, [2]к.ф.-м.н., профессор, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, г. Павлодар

О ЦЕНТРЕ ГРУПП

В работе идет речь о центре групп.

Ключевые слова: группа, факторгруппа, класс сопряженных элементов, центр группы.

Известно, что конечная p – группа G обладает нетривиальным центром $Z(G) \neq e$, а абелева группа совпадает со своим центром. Это классические примеры групп с нетривиальным центром. С другой стороны существует целая серия симметрических групп S_n при $n \geq 3$ таких, что $Z(S_n) = e$. Если группа G совпадает со своим центром $Z(G)=G$, то коммутант (производная) этой группы $G'=e$. Эта связь между коммутантом и центром не допускает, однако, естественного, на первый взгляд, обобщения: из совпадения центра группы с единичной подгруппой не следует совпадение коммутанта с самой группой. В S_n коммутант $S'_n=A_n$ – знакопеременная подгруппа четных подстановок. Причем, индекс $|S_n:A_n| = 2$, а группа A_n при $n \geq 5$ вообще не содержит собственных нормальных делителей, в то время как центр произвольной группы и ее коммутант являются нормальными делителями самой группы. Так же из совпадения коммутанта с самой группой $G' = G$ не следует совпадение центра с единичной подгруппой, иллюстрирующим примером может служить мультипликативная группа матриц порядка $n \geq 1$ с комплексными элементами и с определителями равным 1.

В связи с изложенным нахождение условий, при которых группа обладает нетривиальным центром, является актуальной задачей общей теории групп.

Предложение 1. [1] Группа G абелева тогда и только тогда, когда для каждого ее класс сопряженных элементов $\overset{c\equiv}{a}$ является истинной эквиваленция

$$\left(\left((\forall a, b \in G)(ab = ba)\right) \Leftrightarrow \left(\left|\overset{c\equiv}{a}\right| = \left|\overset{c\equiv}{b}\right| = 1\right)\right) \qquad (1)$$

Теорема. Если в группе G для любого элемента $a \in G$ мощность класса $\left|\overset{c\equiv}{a}\right|$ сопряженных элементов $\overset{c\equiv}{a}$ не превосходит числа 2, то она обладает нетривиальным центром $Z(G)$.

Доказательство. Очевидно, для нейтрального элемента e группы G верно соотношение $\left|\overset{c\equiv}{e}\right| = 1$. Предположим, что $Z(G) = e$ и для любого нетривиального элемента $a \in G \setminus e$ $|\overset{c\equiv}{a}| = 2$. Тогда $((\forall a \in G)(|G : C(a)| = 2))$ [1]. Поскольку $((\forall b \in G \setminus C(a))(bC(a) = C(a)b) \,\&\, G = C(a) \cup bC(a))$, то $C(a)$ - инвариантная подгруппа группы G. Так как $|G{:}C(a)|=2$, то факторгруппа $\overline{G} = G / C(a)$ имеет порядок 2. Следовательно, $\overline{G}$ - циклическая группа. Так как индекс $|G : C(a)| = 2$, то подгруппа $C(a)$ - собственная в G. Из того, что G- абелева, следует, что коммутант G' группы G содержится в $C(a)$ и G'- собственная подгруппа группы G. Так как $(\forall a \in G \setminus e)\left(|\overset{c\equiv}{a}| = 2\right)$, то группа не может быть абелевой (Предложение 1). Отсюда следует, что коммутант G' группы нетривиален, т.е. $G' \neq e$. Таким образом, $(\forall a \in G)(G' \leq C(a))$ и G'- собственная подгруппа G. Так как $Z(G) = \bigcap_{a \in G} C(a)$, а $G' \leq C(a)$, то $G' \leq Z(G)$. Поскольку $G' \leq Z(G)$, а $G' \neq e$, то и $Z(G) \neq e$. Но $(\forall z \in Z(G))\left(|\overset{c\equiv}{z}| = 1\right)$. Однако, это противоречит нашему допущению. Остается отметить, что группа G обладает, по меньшей мере, двумя элементами, мощность классов сопряженных элементов которых равна единице.

Теорема доказана.

Следствие. В неабелевой группе без центра существует класс $\overset{c\equiv}{a}$ сопряженных элементов, мощность которого $|\overset{c\equiv}{a}| > 2$.

Теорема обобщает результат из [2] (см. теорему 3).

Примером группы удовлетворяющей условиям доказанной теоремы может служить группа G_8 диэдра порядка 8: $G_8 = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$, с генетическим кодом - $a^4 = b^2 = e, ba = a^2b$. В этой группе классы сопряженных элементов имеют мощности: $|\overset{c\equiv}{e}| = 1; |\overset{c\equiv}{a}| = 2; |\overset{c\equiv}{a^2}| = 1; |\overset{c\equiv}{b}| = 2; |\overset{c\equiv}{ab}| = 2$. Она обладает центром $Z(G_8)=\{e,a^2\}$ и коммутантом $G'= Z(G)$. Очевидно, группа $S_3 = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ не обладает центром $Z(S_3)=\{e\}$ и содержит класс $\overset{c\equiv}{b} = \{b, ab, a^2b\}$ сопряженных элементов мощности $|\overset{c\equiv}{b}| = 3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Павлюк, И. И., Ермолаева, С. Н.** Операция сопряжения элементов группы. Печатн.//Вестник ПГУ серия физико-математическая, №1, 2005. – с. 95-98.

2 **Павлюк, И. И., Ютовец, Е. В.** Об абелевом нормальном делителе группы. Печатн. // II Республиканская студенческая научно-практическая конференция по математике, механике и информатике. – Астана. 2010. – 155-157 с.

Материал поступил в редакцию 19.03.15.

Е. В. Самокиш, И. И. Павлюк

Топтардың орталығы тураалы

С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.
Материал 19.03.15 баспаға түсті.

E. V. Samokish, I. I. Pavlyuk

On the groups' centre

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.
Material received on 19.03.15.

Бұл мақалада топтардың орталығы туралы қарастырылады.

In the present article the groups' centre is considered.

УДК 512.54

А. Ж. Тусупова, И. И. Павлюк

[1]студент, [2]к.ф.-м.н., профессор, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, г. Павлодар

ЦЕНТРАЛИЗАТОР ЭЛЕМЕНТА ГРУППЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОТНОШЕНИЯ КОММУТАТИВНОСТИ

В работе изучены свойства централизатора элемента группы относительно отношения коммутативности.

Ключевые слова: централизатор элемента группы относительно отношения коммутативности.

Известное понятие теории групп централизатор $C_G(a)$ элемента а группы G в группе G аналитически задается формулой : $C_G(a) = \{x / a^x = a = x^{-1}ax\}$ [1]. Выражение $ax=a$ связывает два объекта группы ax и a отношением равенства "=", которое является отношением эквивалентности.

Актуальность работы заключается в новом подходе и методологии исследования математической модели объектов реального мира – группы. Каждый объект реального мира имеет меру – это атрибутивное его свойство. Мера характеризуется сравнением объекта с эталоном. Таким образом, строится математическая теория. Если это аксиоматическая теория, то в её основу закладываются идеальные эталоны (аксиомы) и каждый результат теории (теоремы) в конечном итоге ретроспективно сравнивается с базисным эталоном. Математика изучает объекты реального мира и их отношения. Отношения характеризуются сравнениями, в основе которых лежит эталонная мера.

Новизна исследования. В работе рассматривается новое в теории групп бинарное отношение коммутативности элементов группы. На базе этого понятия вводится теоретико-групповое понятие централизатора элемента группы ${}_{k\equiv}C(a)$ относительно отношения коммутативности и устанавливается, что при определенных условиях ${}_{k\equiv}C(a)$ – подгруппа группы. Таким образом, открывается новый собирательный объект теории групп и рассматриваются свойства введенного бинарного отношения в чистом виде. Тем самым задается новая мера объектов группы.

Определение (Павлюк И. И.) [2]. Элементы x и y группы G связаны отношением коммутативности "${}_k\equiv$" в группе G тогда и только тогда, когда имеет место сравнение $x\cdot y = y\cdot x$ относительно отношения равенства “=” элементов группы G и основной алгебраической операции “ $\cdot$ ” заданной на элементах группы, т.е.

$$(x\,{}_k\!\equiv y)\overset{def}{\Leftrightarrow}(x\cdot y = y\cdot x)$$

Все элементы числовых алгебраических систем обладают свойством коммутативности. В абелевой группе A также все элементы коммутируют, т.е. в A истина формула

$$(\forall a,b\in A)(a\,{}_k\!\equiv b)$$

В группе S_3 – симметрической группе третей степени – $\{e,a,a^2,b,ab,a^2b\}$, где $a^3=b^2=e$, $ba=a^2b$. Элементы a и a^2 коммутируют между собой и $(\forall g\in S_3)(e\,{}_k\!\equiv g)$ В тоже время элементы b и a не связаны отношением коммутативности в группе S_3.

Таким образом, существует достаточно много объектов теории групп (не только элементы), где имеет место отношение коммутативности. Выберем мультипликативную группу G в качестве представителя алгебраических систем, на которой будем изучать свойства отношения коммутативности. Начало изучению отношения коммутативности на элементах групп положено в ряде работ теоретико-групповой школы ПГУ им. С. Торайгырова. Легко получить следующее:

Предложение 1 [2]. Отношение коммутативности на элементах произвольной группы G обладает следующими свойствами:

а) рефлексивности, т.е. $(\forall a\in G)(a\,{}_k\!\equiv a)$

б) симметричности, т.е. $(\forall a,b\in G)((a\,{}_k\!\equiv b)\Rightarrow(b\,{}_k\!\equiv a))$.

Пример группы S_3 показывает, что $a\,{}_k\!\equiv e$ и $e\,{}_k\!\equiv b$, но $ab\neq ba$. Отсюда заключаем, что в общем случае отношение "${}_k\equiv$" не является отношением транзитивности на элементах произвольной группы. Таким образом, можно заключить, что отношение "${}_k\equiv$" не является отношением эквивалентности, на элементах произвольной группы.

Отношение сопряжения элементов группы G аналитически вводится [1] формулой:

$$(a\,{}_c\!\equiv b)\overset{def}{\Leftrightarrow}(\exists\, x\in G/a^x = x^{-1}ax = b).$$

Лемма (Закон сопряжения относительно отношения коммутативности). Элемент a групп G коммутативно сравним с элементом b группы G тогда и только тогда, когда для произвольного элемента $g\in G$ сопряженный с a элемент a^g коммутативно сравним с элементом b^g, т.е. в группе G истина формула

$$(\forall a,b,g\in G)((a\,{}_k\!\equiv b)\Leftrightarrow(a^g\,{}_k\!\equiv b^g)).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть элементы a и b коммутативно сравнимы $a\,{}_k\!\equiv b$. Тогда из сравнения $a_k\equiv b$ следует, что $ab = ba$. Отсюда следует, что $(ab)^g=(ba)^g$ и $g^{-1}(ab)g=g^{-1}bag$. Тогда $(ab)^g=g^{-1}agg^{-1}bg=a^gb^g$, $(ba)^g=g^{-1}bgg^{-1}ag=b^ga^g$. Таким образом, $a^gb^g=b^ga^g$ и $a^g\,{}_k\!\equiv b^g$.

Достаточность. Пусть теперь $a^g\,{}_k\!\equiv b^g$. Тогда $a^gb^g=b^ga^g$, $a^gb^g=b^ga^g$ и $a\,{}_k\!\equiv b$.

Лемма доказано.

Теорема 1. Решение $R(x\,{}_k\!\equiv a)$ сравнения $x\,{}_k\!\equiv a$ для фиксированного элемента a из группы G является подгруппой группы G.

Доказательство. Из сравнения $x\,{}_k\!\equiv a$ следует, что $ax=a$ или $x^{-1}ax=a$, $a^x=a$. Так как $a^xa=a\,a^x$, то $a^x\,{}_k\!\equiv a$. Тогда по лемме из сравнения $a^x\,{}_k\!\equiv a$ следует, что $a^{x^{-1}}\,{}_k\!\equiv a$. Отсюда из равенства $a^x=a$ следует, что $x^{-1}\in R(x\,{}_k\!\equiv a)$. Таким образом $(\forall x\in R(x\,{}_k\!\equiv a))\,(x^{-1}\in R(x\,{}_k\!\equiv a))$. Далее, пусть $y\in R(x\,{}_k\!\equiv a)$. То есть $y\,{}_k\!\equiv a$ и $a^y\,{}_k\!\equiv a$. Отсюда из леммы имеем $a^{yx}\,{}_k\!\equiv a$. Но $a^x=a$ и $a^{yx}\,{}_k\!\equiv a$. Теперь, очевидно, $(\forall y,x\in R(x\,{}_k\!\equiv a))\Rightarrow x\cdot y\in R(x_k\equiv a)$.

Теорема доказана.

Следствие. $(\forall a\in G)(C_G(a)=R(x\,{}_k\!\equiv a))$.

Доказательство. Так как $C(a)=\{x\,|\,a^x=a\}$, то $x^{-1}ax=a$ и $ax=xa$. Отсюда $x\,{}_k\!\equiv a$. Таким образом $\forall x\in C(a)\Rightarrow(x\in R(x_k\equiv a))$ и $x\in R(x\,{}_k\!\equiv a)\rightarrow x\in C(a)$, $R(x\,{}_k\!\equiv a)\leq C(a)$. Из включений $C(a)\leq R(x\,{}_k\!\equiv a)$, $R(x\,{}_k\!\equiv a)\leq C(a)$ следует, что $R(x\,{}_k\!\equiv a)=C(a)$.

Следствие доказано.

Определение 2 (Павлюк И.И.). Решения $R\left(a^{x} {}_{k}{\equiv}\, a\right)$ группового сравнения $a^{x} {}_{k}{\equiv}\, a$ назовем централизатором ${}_{k\equiv}C_G(a)$ элемента a группы G в группе G относительно отношения коммутативности, т.е. аналитически ${}_{k\equiv}C_G(a)$ задается формулой:

$${}_{k\equiv}C_G(a) = \{x / a^{x} {}_{k}{\equiv}\, a\} = R(a^{x} {}_{k}{\equiv}\, a)$$

Теорема 2. В группе G обладающей абелевым нормальным делителем A, $\forall\ a \in A\ {}_{k\equiv}C(a)$ – подгруппа группы G.

Доказательство. Очевидно, нейтральный элемент $e \in G$ удовлетворяет сравнению $a^{x} {}_{k}{\equiv}\, a$. Следовательно $e \in {}_{k\equiv}C_G(a)$ Пусть $a^{x} {}_{k}{\equiv}\, a$, где $a \in A$. Тогда по формуле (3) $(a^{x})^{x^{-1}} {}_{k}{\equiv}\, a^{x^{-1}}$ и $a^{x^{-1}} {}_{k}{\equiv}\, a$. Отсюда следует, что элемент $x^{-1} \in {}_{k\equiv}C_G(a)$ Таким образом $(\forall x \in {}_{k\equiv}C_G(a))(x^{-1} \in {}_{k\equiv}C_G(a))$. Далее, пусть $x, y \in {}_{k\equiv}C_G(a)$ Тогда $a^{x} {}_{k}{\equiv}\, a$ и $a^{y} {}_{k}{\equiv}\, a$. В силу (3) $a^{xy} {}_{k}{\equiv}\, a^{y}$. Так как $a^{xy}, a^{y}, a \in A$, то $a^{xy} {}_{k}{\equiv}\, a$. Таким образом, $xy \in {}_{k\equiv}C_G(a)$.

Теорема доказана.

Укажем пример группы, на элементах которой имеет место получения теорема. В группе S_3 ${}_{k\equiv}C(a) = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\} = S_3$ так как $(\forall g \in S_3)(a^{g} {}_{k}{\equiv}\, a)$.

Это следует из того, что $\overset{c\equiv}{a} = \{a, a^2\}$ Отсюда $(\forall x, y \in \overset{c\equiv}{a})(x {}_{k}{\equiv}\, y)$ где $\overset{c\equiv}{a}$ − класс сопряженных элементов с элементом a. В тоже время $C(b) = \{e, b\} = {}_{k\equiv}C(b)$. Как S_3 так и $\{e, b\} = C(b)$ являются подгруппами S_3.

Очевидно, ${}_{k\equiv}C(a^2) = {}_{k\equiv}C(a)$ ${}_{k\equiv}C(ab) \neq {}_{k\equiv}C(b) \neq {}_{k\equiv}C(a^2b)$ ${}_{k\equiv}C(b) = C(b) = \{e, b\}$, ${}_{k\equiv}C(ab) = \{e, ab\} = C(ab)$, ${}_{k\equiv}C(a^2b) = C(a^2b) = \{e, a^2b\}$, но $C(a) \neq {}_{k\equiv}C(a)$.

Не трудно заметить, что в группе S_3 $\bigcap\limits_{g \in S_3} {}_{k\equiv}C(g) = \{e\} = Z(S_3)$

Далее, найдем централизаторы элементов группы $G_8 = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ с генетическим кодом $a^4 = b^2 = e, ba = a^3b$ относительно отношения коммутативности. Классы сопряженных элементов группы G_8:

$$\overset{c\equiv}{e} = \{e\};\ \overset{c\equiv}{a} = \{a, a^3\};\ \overset{c\equiv}{a^2} = \{a^2\};\ \overset{c\equiv}{b} = \{b, a^2b\};\ \overset{c\equiv}{ab} = \{ab, a^3b\}.$$

Они лежат в абелевых нормальных делителях G_8 ${}_{k\equiv}C(e) = G_8$.

Централизаторы элементов группы G_8 относительно отношения коммутативности: ${}_{k\equiv}C(a) = C_8;$ ${}_{k\equiv}C(a^2) = G_8;$ ${}_{k\equiv}C(a^3) = G_8;$ ${}_{k\equiv}C(b) = G_8;$

$${}_{k\equiv}C(a^2b) = G_8;\ {}_{k\equiv}C(ab) = G_8;\ {}_{k\equiv}C(a^3b) = G_8. \qquad (6)$$

$$\bigcap_{g \in G_8} {}_{k\equiv}C(g) = G_8 \neq Z(G_8) = \{e, a^2\}$$

В приведенных примерах каждый элемент коммутирующего класса сопряженных элементов имеет централизатор относительно отношения коммутативности совпадающий со всей группой.

Второй пример показывает, что пересечение централизаторов элементов относительно отношения коммутативности не совпадает с центром группы. Оба примера подчеркивают, что централизатор элемента группы относительно отношения коммутативности отличен от централизатора того же элемента относительно отношения равенства: $C(a) = \{x / a^{x} = a\}$.

Интуитивно можно заключить, что всегда $(\forall a \in G)\left(C(a) \leq {}_{k\equiv}C(a)\right)$. Где ${}_{k\equiv}C(a)$ - подмножество группы G_8. В общем случае возникает вопрос: будет ли $C(a)$ инвариантной подгруппой в ${}_{k\equiv}C(a)$, когда ${}_{k\equiv}C(a)$ – априори подгруппа?

В целом ответ на этот вопрос прольёт свет на различие свойств элементов группы, которые коммутируют с элементом и элементами, которые позваляют коммутатировать сопряженным элементам.

В приведенных примерах элементы из центра группы G обладают централизаторами относительно отношения коммутативности, которые являются нормальными делителями групп. В тоже время в группе S_3 $\forall b \in \overset{c\equiv}{b} = \{b, ab, a^2b\}$ из класса сопряженных элементов, централизатор каждого элемента относительно отношения коммутативности не является нормальным делителем в S_3 Но эти централизаторы совпадают с централизаторами тех же элементов относительно отношения равенства. Возникает еще один вопрос: при каких атрибутивных свойствах для элемента a произвольной группы G $C(a) = {}_{k\equiv}C(a)$?

Далее, так как $C(a)$ является подгруппой группы G, а ${}_{k\equiv}C(a)$ в общем случае не всегда подгруппа в G, то в общем случае это равенство $C(a) = {}_{k\equiv}C(a)$ не всегда имеет место в произвольной группе. Отсюда следует, что существует определенный класс групп, для которых выполняется равенства $C(a) = {}_{k\equiv}C(a)$ В подтверждение этого утверждения докажем следующую теорему.

Теорема 3. Централизатор ${}_{k\equiv}C(a)$ элемента a группы G относительно отношения коммутативности является подгруппой группы G, когда отношение коммутативности является отношением эквивалентности на элементах группы G.

Доказательство. Пусть отношение ${}_{k}{\equiv}$ рефлексивно $(a {}_{k}{\equiv}\, a)$ симметрично $(a {}_{k}{\equiv}\, b \rightarrow b {}_{k}{\equiv}\, a)$ и транзитивно $\left((a {}_{k}{\equiv}\, b)\ \&\ (b {}_{k}{\equiv}\, c)\right) \Rightarrow \left(a {}_{k}{\equiv}\, c\right)$. Так как ${}_{k\equiv}C(a) = \left\{x / a^{x} {}_{k}{\equiv}\, a\right\}$, то из $y \in {}_{k\equiv}C(a)$ следует, что $a^{y} {}_{k}{\equiv}\, a$. Из леммы следует, что $a {}_{k}{\equiv}\, a^{y^{-1}}$. Так как отношение ${}_{k}{\equiv}$ транзитивно по условию, то из сравнений $a^{x} {}_{k}{\equiv}\, a$, $a {}_{k}{\equiv}\, a^{y^{-1}}$ следует, что $a^{x} {}_{k}{\equiv}\, a^{y^{-1}}$. Отсюда из леммы следует, что $a^{xy} {}_{k}{\equiv}\, a$. Таким образом, для любых $x, y \in {}_{k\equiv}C(a)$ $x \cdot y \in {}_{k\equiv}C(a)$ Отсюда следует, что ${}_{k\equiv}C(a)$ - подгруппа групп G.

Обратная теорема к теореме 3 не верна так как в S_3 $\forall a \in S_3$ ${}_{k\equiv}C(a)$ – подгруппа группы G но отношение ${}_k\equiv$ не является отношением эквивалентности на элементах S_3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И.** Основы теории групп – М. : Наука, – 1982. – 288 с.

2 **Павлюк, И. И., Будкова, В. О.** Граф отношения коммутативности на элементах группы тетраэдра – Материалы международной научной конференции молодых ученых, магистрантов и студентов "XIII Сатпаевские чтения" – ПГУ, 2013. – XVI. – С. 34-36.

Материал поступил в редакцию 19.03.15.

Ә. Ж. Түсіп, И. И. Павлюк

Коммутативтік қатынасқа қатысты топтың элемент централизаторы

С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекетік университеті, Павлодар қ.
Материал 19.03.15 баспаға түсті.

A. Zh. Tussupova, I. I. Pavlyuk

A centralizer of a group element with respect to commutative relation

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.
Matirial received on 19.03.15.

Жұмыста коммутативтік қатынасқа қатысты топтың элемент централизаторының қасиеттері зерттелген.

In this work the properties of the centralizer of a group element with respect to commutativity relation are studied.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ПГУ ИМЕНИ С. ТОРАЙГЫРОВА
(«ВЕСТНИК ПГУ», «НАУКА И ТЕХНИКА КАЗАХСТАНА», «КРАЕВЕДЕНИЕ»)

1. В журналы принимаются статьи по всем научным направлениям в 1 экземпляре, набранные на компьютере, напечатанные на одной стороне листа с межстрочным интервалом 1,5, с полями 30 мм со всех сторон листа, электронный носитель со всеми материалами в текстовом редакторе «Microsoft Office Word (97, 2000, 2007, 2010) для WINDOWS».

2. Общий объем статьи, включая аннотацию, литературу, таблицы, рисунки и математические формулы не должен превышать **8-10 страниц.**

3. Статья должна сопровождаться рецензией доктора или кандидата наук для всех авторов. Для статей, публикуемых в журнале «Вестник ПГУ» химико-биологической серии, требуется экспертное заключение.

4. Периодичность издания журналов – четыре раза в год (ежеквартально)

Статьи должны быть оформлены в строгом соответствии со следующими правилами:

1. УДК по таблицам универсальной десятичной классификации;

2. Инициалы и фамилия (-и) автора (-ов) – на казахском, русском и английском языках, абзац по левому краю;

3. Название статьи – на казахском, русском и английском языках, заглавными буквами жирным шрифтом, абзац по левому краю;

4. Резюме на казахском, русском и английском языках: кегль – 10 пунктов, курсив, отступ слева-справа – 3 см, интервал 1,0 (см. образец);

5. Текст статьи: кегль – 14 пунктов, гарнитура – Times New Roman (для русского, английского и немецкого языков), KZ Times New Roman (для казахского языка).

6. Межстрочный интервал 1,5 (полуторный);

7. Список использованной литературы (ссылки и примечания в статье обозначаются сквозной нумерацией и заключаются в квадратные скобки). Статья и список литературы должны быть оформлены в соответствии с ГОСТ 7.5-98; ГОСТ 7.1-2003 (см. образец).

<u>На отдельной странице</u>

В бумажном и электронном вариантах приводятся:

– <u>название статьи, сведения об авторе: Ф.И.О. полностью, ученая степень, ученое звание и место работы</u> на казахском, русском и английском языках (для публикации в разделе «Наши авторы» и «Содержание»);

– **<u>полные почтовые адреса, номера служебного и домашнего телефонов, e-mai1</u> (для связи редакции с авторами, не публикуются);**

1. Иллюстрации, перечень рисунков и подрисуночные надписи к ним представляют по тексту статьи. В электронной версии рисунки и иллюстрации представляются в формате TIF или JPG с разрешением не менее 300 dpi.

2. Математические формулы должны быть набраны в Microsoft Equation Editor (каждая формула – один объект).

3. Автор просматривает и визирует грани статьи и несет ответственность за содержание статьи.

4. Редакция не занимается литературной и стилистической обработкой статьи. Рукописи не возвращаются. Статьи, оформленные с нарушением требований, к публикации не принимаются и возвращаются авторам.

5. Оплата за публикацию в научном журнале составляет **5000 (Пять тысяч) тенге.**

6. Статью (бумажная, электронная версии, оригинал квитанции об оплате) следует направлять по адресу:

140008, Казахстан, г. Павлодар, ул. Ломова, 64, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, Издательство «Кереку», каб. 137.

Тел. 8 (7182) 67-36-69, (внутр. 1147), факс: 8 (7182) 67-37-05.

E-mai1: kereky@mail.ru

Наши реквизиты:

РГП на ПХВ Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова РНН 451800030073 БИН 990140004654	РГП на ПХВ Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова РНН 451800030073 БИН 990140004654
АО «Цеснабанк» ИИК KZ57998FTB00 00003310 БИК TSESKZK A Кбе 16 Код 16 КНП 861	АО «Народный Банк Казахстана» ИИК KZ156010241000003308 БИК HSBKKZKX Кбе 16 Код 16 КНП 861

ОБРАЗЕЦ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

УДК 316:314.3

А. Б. Есимова

СЕМЕЙНО-РОДСТВЕННЫЕ СВЯЗИ КАК СОЦИАЛЬНЫЙ КАПИТАЛ В РЕАЛИЗАЦИИ РЕПРОДУКТИВНОГО МАТЕРИАЛА

В настоящей статье автор дает анализ отличительных особенностей репродуктивного поведения женщин сквозь призму семейно-родственных связей.

На современном этапе есть тенденции к стабильному увеличению студентов с нарушениями в состоянии здоровья. В связи с этим появляется необходимость корректировки содержания учебно-тренировочных занятий по физической культуре со студентами, посещающими специальные медицинские группы в…………

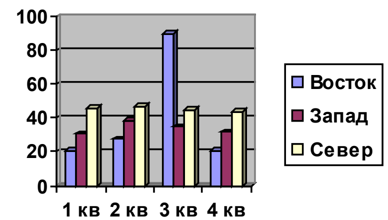
Продолжение текста публикуемого материала.

Пример оформления таблиц, рисунков, схем:

Таблица 1 – Суммарный коэффициент рождаемости отдельных национальностей

	СКР, 1999 г.	СКР, 1999 г.
Всего	1,80	2,22

Диаграмма 1 – Показатели репродуктивного поведения



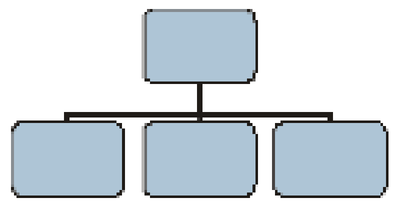


Рисунок 1 – Социальные взаимоотношения

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Эльконин, Д. Б.** Психология игры [Текст] : научное издание / Д. Б. Эльконин. – 2–е изд. – М. : Владос, 1999. – 360 с. – Библиогр. : С. 345–354. – Имен. указ. : С. 355–357. – ISBN 5-691-00256-2 (в пер.).

2 **Фришман, И.** Детский оздоровительный лагерь как воспитательная система [Текст] / И. Фришман // Народное образование. – 2006. – № 3. – С. 77–81.

3 Антология педагогической мысли Казахстана [Текст] : научное издание / сост. К. Б. Жарикбаев, сост. С. К. Калиев. – Алматы : Рауан, 1995. – 512 с. : ил. – ISBN 5625027587.

Место работы автора (-ов):

Международный Казахско-Турецкий университет имени Х. А. Яссави, г. Туркестан.

Материал поступил в редакцию 04.03.14.

А. Б. Есімова

Отбасылық-туысты қатынастар репродуктивті мінез-құлықты жүзеге асырудағы әлеуметтік капитал ретінде

Қ. А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ.

Материал 04.03.14 редакцияға түсті.

A. B. Yessimova

The family-related networks as social capital for realization of reproductive behaviors

K. A. Yssawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan.

Material received on 04.03.14

Бұл мақалада автор Қазақстандағы әйелдердің отбасылық-туыстық қатынасы арқылы репродуктивті мінез-құлықында айырмашылықтарын талдайды.

In the given article the author analyzes distinctions of reproductive behavior of married women of Kazakhstan through the prism of the kinship networks.

Теруге 19.03.2015 ж. жіберілді. Басуға 30.03.2015 ж. қол қойылды.
Форматы 70x100 1/16. Кітап-журнал қағазы.
Көлемі шартты 3,8 б.т. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.
Компьютерде беттеген М. А. Шрейдер
Корректорлар: А. Елемесқызы, А.Р. Омарова
Тапсырыс № 2588

Сдано в набор 19.03.2015 г. Подписано в печать 30.03.2015 г.
Формат 70x100 1/16. Бумага книжно-журнальная.
Объем 3,8 ч.-изд. л. Тираж 300 экз. Цена договорная.
Компьютерная верстка М. А. Шрейдер
Корректоры: А. Елемескызы, А. Р. Омарова
Заказ № 2588

«Кереку баспасынан басылып шығаруған
С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік университеті
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

«КЕРЕКУ» баспасы
С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік университеті
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.
67-36-69
E-mail: kereky@mail.ru