



С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік
университетінің ғылыми журналы
Научный журнал Павлодарского государственного
университета им. С. Торайғырова

*1997 жылы құрылған
Основан в 1997 г.*

İ Ì Ó
ÕÀÁÀÐØ ÛÑÛ

ÂÃÑÒÍ ÈÊ Ì ÑÓ

ФИЗИКО - МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

Научный журнал Павлодарского государственного университета
им. С. Торайгырова

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о постановке на учет средства массовой информации
№ 4533-Ж

выдано Министерством культуры, информации и общественного согласия
Республики Казахстан
31 декабря 2003 года

Главный редактор:

Арын Е.М., д.э.н., профессор (главный редактор);

Тлеукенов С.К., д.ф.м.н., профессор (зам. гл. редактора);
Жукенов М.К. (отв. секретарь);

Члены редакционной коллегии:

Абдильдин М.М., д.ф.м.н., академик НАН РК;
Бахтыбаев К.Б., д.ф.м.н., профессор;
Данаев Н.Т., д.ф.м.н., академик НИА РК;
Кумеков С.Е., д.ф.м.н., профессор;
Куралбаев З., д.ф.м.н., профессор;
Оспанов К.Н., д.ф.м.н., профессор;
Отельбаев М.О., д.ф.м.н., академик НАН РК;
Уалиев Г.У., д.ф.м.н., профессор, академик НАН РК;
Сейтахметова Г.Н. (тех.редактор).

За достоверность материалов и рекламы ответственность несут авторы и рекламодатели.

Мнение авторов публикаций не всегда совпадает с мнением редакции.

Редакция оставляет за собой право на отклонение материалов.

Рукописи и дискеты не возвращаются.

При использовании материалов журнала ссылка на «Вестник ПГУ» обязательна.

МАЗМҰНЫ

А.Б. Альжанов	
422 тетраоналды сингонияның шексіз периодикалық құрылымдағы электросерпімді толқындардың дисперсия тендеулері	6
С.К. Тлеуқенов, Е.К. Баяубаев	
Кубты, гексагоналды және ромбты сингониялы анизотроптық орталар арасындағы еркін шекара бойымен таралатын Рэлей толқындарын зерттеу	12
А.Б. Беялова	
222 ромб сингониялы пьезокристалдағы электросерпімді толқындардың таралу заңдылықтарын зерттеу	16
С.К. Елмұратов	
Қабықшалар мен пластинкалардың мәжбүрлі тербелісі мәселесін шешуде қисықсызықты торлардың үйлесу әдістемесін зерттеу	21
М.К. Жүкенов	
Магнитэлектрлік эффектісі бар изотропты және анизотропты диэлектрліктердің шекарасындағы электрмагниттік толқынның шағылу және сыну коэффициенттері туралы	26
Н.А. Испұлов, А.К. Сейтханова	
Анизотропты орталардағы термосерпімділіктің байланысқан есептері	33
С.К. Тлеуқенов	
Пьезокристалдардағы электросерпімді толқындардың максвелл тендеулері мен қозғалыс тендеулері	40
Ш.С. Зейтова	
Анизотропты орталардың тетраоналды сингонияның 422 классы үшін матрицант құрылысы	47
И.И. Павлюк, И.И. Ляшенко, Л.И. Теняева	
Топ элементтерінің индекстік салыстырмалы қарым - қатынастары	54
Б.Г. Мұқанова	
Жер асты рельефті электрзондтау есебіндегі интегралды тендеулер амалы	68
С.А. Монтаев, С.П. Пазылова	
Орманды суглиндер-талықтер керамикалық композициясында минералкалыптасушы процесінде күйдеру температурасының әсері	77
Ә.К. Тұрсынбаева	
Кәсіпорындарының ресурстар моделі	80
Біздің авторлар	84
Авторлар үшін ереже	86

СОДЕРЖАНИЕ

А.Б. Альжанов Уравнения дисперсии электроупругих волн в неограниченной периодической структуре тетрагональной сингонии 422	6
Е.К. Баяубаев, С.К. Тлеуенов Исследование волн рэля в свободной границы анизотропных сред кубической, гексагональной и ромбической сингоний.....	12
А.Б. Белялова Изучение закономерностей распространения электроупругих волн в пьезокристаллах ромбической сингонии 222.....	16
С.К. Ельмуратов Исследование сходимости метода криволинейных сеток при решении задач о вынужденных колебаниях оболочек и пластин	21
М.К. Жукенов О коэффициентах отражения и преломления электромагнитной волны на границе изотропного и анизотропного диэлектриков с магнитоэлектрическим эффектом	26
Н.А. Испулов, А.К. Сейтханова Связанные задачи термоупругости в анизотропных средах	33
С.К. Тлеуенов Уравнения максвелла и уравнения движения электроупругих волн в пьезокристаллах.....	40
Ш.С. Зейтова Структура матрицанта в случае анизотропных сред тетрагональной сингонии класса 422	47
И.И. Павлюк, И.И. Ляшенко, Л.И. Теняева Отношение индексной сравнимости элементов группы	54
Б.Г. Муканова Метод интегральных уравнений в задаче зондирования над погребенной складчатостью.....	68
С.А. Монтаев, С.П. Пазылова Влияние температуры обжига на процессы минералообразования в керамической композиции лессовидный суглинок – тальк	77
А.К. Турсунбаева Модель ресурсов предприятий	80
Наши авторы.....	84
Правила для авторов	86

CONTENT

A.B. Alzhanov	
Equations of a dispersion of elastic waves in unlimited periodic frame tetragonal singony 422.....	6
S.K. Tleukenov, E.K. Bayaubayev	
Research of waves Rayleigh along free border of anisotropic environments cubic, hexagonal and rhombic system	12
A.B. Belylova	
Analysis of legitimacies of distribution of electroelastic waves in piezocrystals rhombic singony 222.....	16
S. K. Yel'muratov	
The research of curvilinear net method convergence while solving the tasks of the forced rippling of the membranes and plates.....	21
M.K. Zhukonov	
Reflectivities and refractives of an electromagnetic wave on border of an isotropic dielectric and anisotropic of a dielectric with permanent-magnet	26
N.A. Ispulov, A.K. Seythanova	
The associated problems of thermoelasticity in anisotropic media.....	33
S. Tleukenov	
Equations of a maxwell and equation of motion of elastic waves in piezocrystals.....	40
Sh. Zeitova	
Frame of a matriciant in case of anisotropic mediums tetragonal singony of the class 422.....	47
I.I. Pavlyuk, I.I. Lyashenko, L.I. Tenyayeva	
Relation of the index comparability of the group's elements	54
B.G. Mukanova	
The integral equation method in the electrical sounding problem above the buried topography	68
S.A. Montajev, S.P. Pazylova	
Temperature influence on processes of minerals formation in ceramic composition of loess-like adobe-talc.....	77
A.K. Tursunbayeva	
Model resource enterprises	80
Our authors.....	84
Rules for authors.....	86

УРАВНЕНИЯ ДИСПЕРСИИ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ТЕТРАГОНАЛЬНОЙ СИНГОНИИ 422

А.Б. Альжанов

*Павлодарский государственный университет
им. С. Торайгырова*

Введение понятия структуры матрицанта и ее определение позволили распространить классические методы, развитые Бриллюэном и Пароди для дискретных периодических структур, на сплошные периодические неоднородные среды.

Периодически неоднородная анизотропная среда, в случае электроупругих волн, описывается периодическими функциями пространственной координаты и удовлетворяет условиям:

$$\varepsilon_{ij}(z+h) = \varepsilon_{ij}; \mu(z+h) = \mu(z) \quad (1)$$

где h - период неоднородности.

Основной характеристикой, определяющей закономерности электроупругих волновых процессов в неограниченной периодической структуре, являются уравнения дисперсии. Построенная во второй главе структура матрицанта позволяет модифицировать условие существования нетривиальных решений и в два раза понизить степень характеристического уравнения.

Из теоремы Блоха следует, что в случае трансляционной симметрии:

$$\vec{u}(h) = e^{ikh} \vec{u}(0) \quad (2)$$

где \vec{u} - вектор- столбец решений уравнения

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B} \vec{u} \quad (3)$$

Матрицант уравнения (3) для периода неоднородности h есть матрица монодромии. На ее основе имеем:

$$\vec{u}(h) = \hat{T} \vec{u}(0) \quad (4)$$

Объединяя (2) и (4) получим:

$$(\hat{T} - e^{i\tilde{k}h} \hat{E}) \vec{u}(0) = 0 \quad (5)$$

где \hat{E} - единичная матрица.

Из условия

$$\det[\hat{T} - e^{i\tilde{k}h} \hat{E}] = 0 \quad (6)$$

следует характеристическое уравнение, корни которого определяют искомые уравнения дисперсии волн в неограниченной периодической структуре.

Умножение (5) на $\hat{T}^{-1} e^{-i\tilde{k}h}$ приводит к уравнению:

$$(\hat{T}^{-1} - e^{-i\tilde{k}h} \hat{E}) \vec{u}(0) = 0 \quad (7)$$

Соотношения (5) и (7) эквивалентны, определяют один и тот же спектр. Физически это означает, что волны, распространяющиеся в неограниченной периодической структуре в противоположных направлениях, имеющих один закон дисперсии. Объединяя эти соотношения приходим к следующей модифицированной форме условия существования нетривиальных решений:

$$\det[p - \hat{E} \cos \tilde{k}h] = 0 \quad (8)$$

В условии (8) введена очень важная для регулярных структур и широко используемая в дальнейшем, матрица:

$$p = \frac{1}{2} [\hat{T} + \hat{T}^{-1}] \quad (9)$$

При одномерном распространении электроупругих волн в пьезокристалле тетрагональной сингонии класса 422 матрицы \hat{T} и \hat{T}^{-1} имеют структуру:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} & 0 & 0 & 0 & t_{38} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{44} & 0 & 0 & t_{47} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55} & 0 & 0 & 0 & t_{59} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{66} & 0 & 0 & 0 & t_{610} \\ 0 & 0 & 0 & t_{74} & 0 & 0 & t_{77} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{83} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{88} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{95} & 0 & 0 & 0 & t_{99} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{106} & 0 & 0 & 0 & t_{1010} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{34} & 0 & 0 & t_{37} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{48} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{56} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{65} & 0 & 0 & 0 & t_{69} & 0 \\ 0 & 0 & t_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{78} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{84} & 0 & 0 & t_{87} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{96} & 0 & 0 & 0 & t_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{105} & 0 & 0 & 0 & t_{109} & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{44} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{34}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{33} & 0 & 0 & -\frac{t_{83}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{66} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{106}}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{59}}{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & \omega t_{38} & 0 & 0 & t_{48} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega t_{47} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{610} & 0 & 0 & 0 & t_{1010} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{99} & 0 & 0 & 0 & t_{99} \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{34} & 0 & 0 & \frac{t_{84}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{73}}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{56} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{69}}{\omega} \\ 0 & 0 & \omega t_{48} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{78} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega t_{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{510} & 0 & 0 & t_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{69} & 0 & 0 & 0 & t_{109} & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Из определения (9) матрицы \hat{P} следует ее структура:

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & 0 & p_{37} & p_{38} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{33} & p_{47} & p_{48} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{48} & -p_{38} & p_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{47} & -p_{37} & 0 & p_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} & p_{59} & p_{510} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} & p_{69} & p_{610} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{610} & p_{510} & p_{99} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{69} & -p_{59} & 0 & p_{99} \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \end{pmatrix} \quad (12)$$

Раскрытие определителя в (8) с учетом (12) приводит к уравнению:

$$[(p_{11} - \lambda)^2(p_{33} - \lambda)(p_{77} - \lambda)] + p_{37}p_{48} - p_{38}p_{47} \quad (13)$$

$$((p_{55} - \lambda)(p_{99} - \lambda) + p_{59}p_{610} - p_{510}p_{69})^2 = 0$$

Уравнение (13) имеет корни:

$$\tilde{P}_1 = p_1$$

$$\tilde{P}_2 = \frac{1}{2}[p_{33} + p_{77} - \sqrt{(p_{33} - p_{77})^2 + 4(p_{38}p_{47} - p_{37}p_{48})}] \quad (14)$$

$$\begin{aligned}\tilde{p}_3 &= \frac{1}{2} [p_{33} + p_{77} + \sqrt{(p_{33} - p_{77})^2 + 4(p_{38}p_{47} - p_{37}p_{48})}] \\ \tilde{p}_4 &= \frac{1}{2} [p_{55} + p_{99} - \sqrt{(p_{55} - p_{99})^2 + 4(p_{510}p_{69} - p_{59}p_{610})}] \\ \tilde{p}_4 &= \frac{1}{2} [p_{55} + p_{99} + \sqrt{(p_{55} - p_{99})^2 + 4(p_{510}p_{69} - p_{59}p_{610})}]\end{aligned}$$

$$\cos \tilde{k}_1 = \tilde{p}_1; \quad \cos \tilde{k}_2 = \tilde{p}_2; \quad \cos \tilde{k}_3 = \tilde{p}_3; \quad \cos \tilde{k}_4 = \tilde{p}_4; \quad \cos \tilde{k}_5 = \tilde{p}_5$$

При распространение электроупругих волн в пьезокристалле тетрагональной сингонии класса 422 вдоль координатной плоскости хz матрицы \hat{T} и \hat{T}^{-1} имеют структуру:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & t_{14} & 0 & 0 & t_{17} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & t_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{32} & t_{33} & 0 & 0 & 0 & t_{38} & 0 & 0 & 0 \\ t_{41} & 0 & 0 & t_{44} & 0 & 0 & t_{47} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55} & 0 & 0 & 0 & t_{59} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{66} & 0 & 0 & t_{610} \\ 0 & 0 & 0 & t_{74} & 0 & 0 & t_{77} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{82} & t_{83} & 0 & 0 & 0 & t_{88} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{95} & 0 & 0 & 0 & t_{99} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{106} & 0 & 0 & 0 & t_{1010} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & 0 & 0 & t_{24} & 0 & 0 & t_{27} & 0 & 0 & 0 \\ t_{31} & 0 & 0 & t_{34} & 0 & 0 & t_{37} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{42} & t_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{48} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{56} & 0 & 0 & t_{510} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{65} & 0 & 0 & 0 & t_{69} & 0 \\ 0 & t_{72} & t_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{78} & 0 & 0 \\ t_{81} & 0 & 0 & t_{84} & 0 & 0 & t_{87} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{96} & 0 & 0 & t_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{105} & 0 & 0 & 0 & t_{109} & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & 0 & 0 & t_{32} & 0 & 0 & \frac{t_{23}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{11} & t_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{14} & t_{44} & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{34}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ t_{23} & 0 & 0 & t_{33} & 0 & 0 & \frac{t_{33}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{66} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{66}}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{55}}{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & \text{of}_{38} & 0 & 0 & t_{88} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{of}_{17} & \text{of}_{47} & 0 & 0 & 0 & t_{77} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{of}_{610} & 0 & 0 & 0 & t_{910} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{of}_{59} & 0 & 0 & 0 & t_{99} \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{23}}{\omega} & 0 & 0 \\ t_{21} & 0 & 0 & t_{31} & 0 & 0 & \frac{t_{31}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ t_{24} & 0 & 0 & t_{34} & 0 & 0 & \frac{t_{34}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{13} & t_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{33}}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{56} & 0 & 0 & -\frac{t_{56}}{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{65} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{65}}{\omega} & 0 \\ 0 & \text{of}_{18} & \text{of}_{48} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{78} & 0 & 0 \\ 0 & \text{of}_{17} & 0 & \text{of}_{47} & 0 & 0 & 0 & t_{87} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{of}_{510} & 0 & 0 & t_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{of}_{69} & 0 & 0 & 0 & t_{109} & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Из определения (9) матрицы \hat{p} следует ее структура:

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & p_{13} & p_{14} & 0 & 0 & p_{17} & p_{18} & 0 & 0 \\ 0 & p_{11} & p_{23} & p_{24} & 0 & 0 & p_{27} & 0 & 0 & 0 \\ -p_{24} & p_{14} & p_{33} & 0 & 0 & 0 & p_{37} & p_{38} & 0 & 0 \\ p_{23} & -p_{13} & 0 & p_{33} & 0 & 0 & p_{47} & p_{48} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} & 0 & 0 & 0 & p_{59} & p_{510} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} & 0 & 0 & p_{69} & p_{610} \\ 0 & -p_{18} & -p_{48} & p_{38} & 0 & 0 & p_{77} & 0 & 0 & 0 \\ -p_{27} & p_{17} & p_{47} & -p_{37} & 0 & 0 & 0 & p_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{610} & p_{510} & p_{99} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{69} & -p_{59} & 0 & p_{99} \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \end{pmatrix} \quad (17)$$

Раскрытие определителя в (8) с учетом (17) приводит к уравнению, которое разделяется на два уравнения второй и третьей степени:

$$[\lambda^2 - (p_{55} + p_{99})\lambda + p_{55}p_{99} - p_{69}p_{510} + p_{610}p_{59}] = 0 \quad (18)$$

$$[\lambda^3 + (-p_{11} - p_{77} - p_{33})\lambda^2 + (p_{13}p_{24} + p_{18}p_{27} - p_{38}p_{47} + p_{37}p_{48} + p_{33}p_{77} + p_{11}p_{33} + p_{11}p_{77} - p_{14}p_{23})\lambda + (-p_{18}p_{27}p_{33} - p_{17}p_{23}p_{38} + p_{13}p_{27}p_{38} + p_{18}p_{24}p_{47} - p_{17}p_{24}p_{48} - p_{13}p_{24}p_{77} + p_{11}p_{38}p_{47} - p_{11}p_{37}p_{48} - p_{11}p_{33}p_{77} + p_{14}p_{27}p_{48} + p_{14}p_{23}p_{77}) = 0] \quad (19)$$

Или
$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$$

Уравнение (18) имеет корни:

$$\tilde{p}_4 = \frac{1}{2} [p_{55} + p_{99} - \sqrt{(p_{55} - p_{99})^2 + 4(p_{69}p_{510} - p_{610}p_{59})}]$$

$$\tilde{p}_5 = \frac{1}{2} [p_{55} + p_{99} + \sqrt{(p_{55} - p_{99})^2 + 4(p_{69}p_{510} - p_{610}p_{59})}] \quad (20)$$

$$\cos \tilde{k}_4 = \tilde{p}_4; \quad \cos \tilde{k}_5 = \tilde{p}_5$$

Уравнение (19) имеет следующие корни:

$$\tilde{p}_1 = \frac{\alpha}{a\sqrt[3]{32}} - \frac{b}{3a} - \frac{\sqrt[3]{2}(3ac - b^2)}{3a\alpha},$$

$$\tilde{p}_2 = \frac{(1-i\sqrt{3})\alpha}{a\sqrt[3]{62}} - \frac{b}{3a} + \frac{(1+i\sqrt{3})(3ac - b^2)}{\sqrt[3]{32}\alpha} \quad (21)$$

$$\tilde{p}_3 = \frac{(1+i\sqrt{3})\alpha}{a\sqrt[3]{62}} - \frac{b}{3a} + \frac{(1-i\sqrt{3})(3ac - b^2)}{a\sqrt[3]{32}\alpha}$$

$$\alpha = \sqrt[3]{-2b^3 + 9acb - 27a^2d + \sqrt{4(3ac - b^2)^3 + (-2b^3 - 9acb - 27a^2d)^2}}$$

$$\cos \tilde{k}_1 = \tilde{p}_1; \quad \cos \tilde{k}_2 = \tilde{p}_2; \quad \cos \tilde{k}_3 = \tilde{p}_3$$

Уравнения дисперсии (13), (18), (19) характеризуют электроупругие свойства пьезоэлектрической среды.

Знание корней (14), (20), (21) дает уравнения дисперсии в неограниченной периодической структуре и в общем виде могут быть записаны как:

$$\cos \tilde{k}_i h = \tilde{p}_i \quad (22)$$

Для уравнений дисперсии (3.3.13) области прозрачности удовлетворяют условиям

$$|\operatorname{Re} \tilde{p}_i| < 1, \quad \operatorname{Im} \tilde{p}_i = 0.$$

Границы между зонами прозрачности и непропускания определяются равенствами

$$|\operatorname{Re} \tilde{p}_i| = 1, \quad \operatorname{Im} \tilde{p}_i = 0.$$

Дисперсионные кривые, определяемые из условия $p(\omega, c) = \pm 1$ дают границы зон пропускания и непропускания в неограниченной периодически неоднородной среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рязанов М.И. Электродинамика конденсированного вещества. М.: Наука, 1984-304с.
2. Богульский И.О., Петров С.Я., Шабассов А.В. Электромагнитные волны в неограниченных и конечных сверхрешетках. // Оптика и спектр. 1998. 84, №5, с.823-828
3. Голубев Л.В., Леонов Е.И. Сверхрешетки. М.: Знание. 1977-64с.
4. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред в периодической структуре. Киев: Наукова думка, 1981-200с.
5. Ярив А., П. Юх. Оптические волны в кристаллах. М.: Наука, 1987-616с.
6. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. – Новосибирск: Наука, 1982.
7. Глеукунов С.К., Сагайдак Т.В. Структура фундаментальных решений полной системы уравнений Максвелла и уравнений движения электроупругой волны Материалы науч. конф. молодых ученых, студентов, школьников «III Сатпаевские чтения». Павлодар, 2003, Т.7, С. 158-163.

Түйіндеме

Берілген мақалада толқынның таралу заңдылығын анықтайтын негізгі сипаттамасы болып табылатын 422 класы тетрагональды сингонияның шектелмеген құрылымындағы серпімді электрлік толқындардың дисперсияларының теңдеулері құрасытырылған.

Resume

In the given article the equations of a dispersion of elastic waves in unlimited periodic frame tetragonal singony of the class 422 are constructed, which one are basic performance determining regularity of a wave propagation.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛН РЭЛЕЯ ВДОЛЬ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД КУБИЧЕСКОЙ, ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ И РОМБИЧЕСКОЙ СИНГОНИЙ

Е.К. Баяубаев, С.К. Тлеукенов

*Павлодарский государственный университет
им. С. Торайгырова*

В рамках метода матрицанта [1,2] классические уравнения движения упругих анизотропных сред приводятся к матричному дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\frac{d\vec{W}}{dz} = \hat{B}\vec{W}$$

где $\vec{W} = [u_z, \sigma_{zz}, u_x, \sigma_{xz}, u_y, \sigma_{yz}]^T$; u_x, u_y, u_z - компоненты вектора смещения, $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$ - компоненты тензора напряжений.

Структура матрицы коэффициентов B позволяет ввести понятие и построить структуру матрицанта рассматриваемой системы уравнений. Одним из следствий построения матрицанта является возможность получения матрицанта однородных анизотропных сред в явной аналитической форме. Это представление позволяет рассмотреть и решить вопрос о существовании волн Рэлея на свободной границе анизотропных сред. На основе метода матрицанта были получены условия существования волн Рэлея на свободной границе для широкого класса анизотропных сред в виде [2]:

$$\sqrt{(b_{12}b_{43} - b_{13}^2)(b_{21}b_{34} - b_{24}^2)}b_{43} - (b_{12}b_{43} - b_{13}^2)b_{21} = 0 \quad (1)$$

При распространении упругих волн в кристаллах кубической, ромбической, гексагональной сингоний матрица коэффициентов \hat{B} приводится к структуре в виде:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & b_{45} & 0 \\ b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} \\ 0 & b_{15} & b_{45} & 0 & b_{65} & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Различия лишь только в коэффициентах $b_{i,j}$.

1. Кубическая сингония. Для кубической сингонии коэффициенты матрицы B принимают значения:

$$b_{12} = \frac{1}{c_{11}}, b_{13} = im \frac{c_{12}}{c_{11}}, b_{15} = in \frac{c_{12}}{c_{11}}, b_{21} = -\omega^2 \rho, b_{24} = im, b_{26} = in, b_{34} = \frac{1}{c_{44}},$$

$$b_{43} = -\omega^2 \rho + m^2 \left(\frac{c_{11}^2 - c_{12}^2}{c_{11}} \right) + n^2 c_{44}, b_{45} = mn \left(c_{12} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} + c_{44} \right), b_{56} = b_{34}, \quad (3)$$

$$b_{65} = -\omega^2 \rho + m^2 c_{44} + n^2 \left(\frac{c_{11}^2 - c_{12}^2}{c_{11}} \right)$$

где m, n – компоненты волнового вектора, C_j – упругие параметры среды, ω – круговая частота, ρ – плотность среды.

Для плоскости xz ($n=0$) данные коэффициенты (3) принимают вид:

$$b_{12} = \frac{1}{c_{11}}, b_{13} = im \frac{c_{12}}{c_{11}}, b_{15} = 0, b_{21} = -\omega^2 \rho, b_{24} = im, b_{26} = 0, b_{34} = \frac{1}{c_{44}},$$

$$b_{43} = -\omega^2 \rho + m^2 \left(\frac{c_{11}^2 - c_{12}^2}{c_{11}} \right), b_{45} = 0, b_{56} = b_{34}, \quad (4)$$

Условия существования волн Рэлея находим, подставляя (4) в (1):

$$\sqrt{\left(m^2 - \frac{\omega^2 \rho}{c_{11}} \right) \left(m^2 - \frac{\omega^2 \rho}{c_{44}} \right) \left(m^2 \frac{c_{11}^2 - c_{12}^2}{c_{11}} - \omega^2 \rho \right)} - \left(m^2 - \frac{\omega^2 \rho}{c_{11}} \right) \frac{1}{c_{11}} = 0 \quad (5)$$

Решая (5) получим зависимость скорости волн Рэлея от частоты.

Для плоскости yz ($m=0$)

$$b_{12} = \frac{1}{c_{11}}, b_{13} = 0, b_{15} = in \frac{c_{12}}{c_{11}}, b_{21} = -\omega^2 \rho, b_{24} = 0, b_{26} = in, b_{34} = \frac{1}{c_{44}},$$

$$b_{43} = -\omega^2 \rho + n^2 c_{44}, b_{45} = 0, b_{56} = b_{34}, b_{65} = -\omega^2 \rho + n^2 \left(\frac{c_{11}^2 - c_{12}^2}{c_{11}} \right)$$

Путем перестановки строк и столбцов матрица \hat{B} приводится к структуре (2), и уравнение (1) принимает вид:

$$\sqrt{(b_{12} b_{43} - b_{15}^2)(b_{21} b_{34} - b_{26}^2)} b_{43} - (b_{12} b_{43} - b_{15}^2) b_{21} = 0 \quad (6)$$

2. Для кристаллов ромбической сингонии коэффициенты матрицы (2) имеют вид:

$$b_{12} = \frac{1}{c_{33}}, b_{13} = im \frac{c_{13}}{c_{33}}, b_{15} = in \frac{c_{23}}{c_{33}}, b_{21} = -\omega^2 \rho, b_{24} = im, b_{26} = in, b_{34} = \frac{1}{c_{55}},$$

$$b_{43} = -\omega^2 \rho + m^2 \left(\frac{c_{11}^2 - c_{13}^2}{c_{33}} \right) + n^2 c_{66}, b_{45} = mn \left(c_{12} - \frac{c_{13} c_{23}}{c_{33}} + c_{66} \right), b_{56} = \frac{1}{c_{44}},$$

$$b_{65} = -\omega^2 \rho + m^2 c_{66} + n^2 \left(c_{22} - \frac{c_{23}^2}{c_{33}} \right)$$

Для плоскости xz (n=0)

$$b_{12} = \frac{1}{c_{33}}, b_{13} = im \frac{c_{13}}{c_{33}}, b_{15} = 0, b_{21} = -\omega^2 \rho, b_{24} = im, b_{26} = 0, b_{34} = \frac{1}{c_{55}},$$

$$b_{43} = -\omega^2 \rho + m^2 \left(\frac{c_{11}^2 - c_{13}^2}{c_{33}} \right), b_{45} = 0, b_{56} = \frac{1}{c_{44}}, b_{65} = -\omega^2 \rho + m^2 c_{66}$$

Для плоскости yz (m=0)

$$b_{12} = \frac{1}{c_{33}}, b_{13} = 0, b_{15} = in \frac{c_{23}}{c_{33}}, b_{21} = -\omega^2 \rho, b_{24} = 0, b_{26} = in, b_{34} = \frac{1}{c_{55}},$$

$$b_{43} = -\omega^2 \rho + n^2 c_{66}, b_{45} = 0, b_{56} = \frac{1}{c_{44}}, b_{65} = -\omega^2 \rho + n^2 \left(c_{22} - \frac{c_{23}^2}{c_{33}} \right)$$

2. Гексагональная сингония.

$$b_{12} = \frac{1}{c_{33}}, b_{13} = im \frac{c_{13}}{c_{33}}, b_{15} = in \frac{c_{13}}{c_{33}}, b_{21} = -\omega^2 \rho, b_{24} = im, b_{26} = in, b_{34} = \frac{1}{c_{44}},$$

$$b_{43} = -\omega^2 \rho + m^2 \left(\frac{c_{11} c_{33} - c_{13}^2}{c_{33}} \right) + n^2 \left(c_{11} - \frac{c_{12}}{2} \right), b_{45} = mn \left(c_{12} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}} + \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \right), b_{56} = b_{34},$$

$$b_{65} = -\omega^2 \rho + m^2 \frac{c_{11} - c_{12}}{2} + n^2 \left(c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}} \right)$$

Для плоскости xz (n=0)

$$b_{12} = \frac{1}{c_{33}}, b_{13} = im \frac{c_{13}}{c_{33}}, b_{15} = 0, b_{21} = -\omega^2 \rho, b_{24} = im, b_{26} = 0, b_{34} = \frac{1}{c_{44}},$$

$$b_{43} = -\omega^2 \rho + m^2 \left(\frac{c_{11} c_{33} - c_{13}^2}{c_{33}} \right), b_{45} = 0, b_{65} = -\omega^2 \rho + m^2 \frac{c_{11} - c_{12}}{2}$$

Для плоскости yz (m=0)

$$b_{12} = \frac{1}{c_{33}}, b_{13} = 0, b_{15} = in \frac{c_{13}}{c_{33}}, b_{21} = -\omega^2 \rho, b_{24} = 0, b_{26} = in, b_{34} = \frac{1}{c_{44}},$$

$$b_{43} = -\omega^2 \rho + n^2 \left(c_{11} - \frac{c_{12}}{2} \right), b_{45} = 0, b_{56} = b_{34}, b_{65} = -\omega^2 \rho + n^2 \left(c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}} \right)$$

В работе в явной форме приведены элементы матриц коэффициентов \hat{B} для анизотропных упругих сред кубической, гексагональной и ромбической сингоний. Подстановка явного вида b_{ij} в уравнения (1) и (6) позволяет определить скорости волн Рэлея вдоль свободной поверхности анизотропных упругих сред рассматриваемых сингоний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глеукунов С.К. Метод матрицанта. Павлодар: НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004. – 148 с.
2. Глеукунов С.К., Альжанов А.Б., Баяубаев Е.К. О поверхностных волнах Рэлея в анизотропных средах// II Ержановтык окулар Халықаралық ғылыми-техникалық конференция материалдары. Ақтөбе: Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе мемлекеттік университетінің Редакциялық – баспа бөлімі, 2007.- 512 б.
3. Физическая акустика Год ред. У. Мэзона. Том 6 Методы и приборы ультразвуковых исследований. Часть А. – М.: Мир, 1966. – 589 с.

Түйіндеме

Жұмыста матрицант әдісінің негізінде кубты, гексогалды және ромбты сингониялы серпімді анизотропты орталар арасындағы еркін шекарасында Релей толқындардың бар болу шарттары шығарылды. Сингониялар үшін коэффициенттер матрицасының элементтері келтірілген. b_{ij} элементтерінің анық қарастырылып отырған сингониялы анизотропты серпімді орталар арасындағы еркін бет бойымен таралатын Релей толқындар жылдамдығын анықтауға мүмкіндік береді.

Resume

In work on the basis of a method matrixer conditions of existence of waves Rayleigh on free border of elastic anisotropic environments cubic, hexagonal and rhombic system are received. Elements of matrixes of factors for these systems are resulted. Substitution of an obvious kind b_{ij} allows to define speeds of waves Rayleigh along a free surface of anisotropic elastic environments considered systems.

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В ПЬЕЗОКРИСТАЛЛАХ РОМБИЧЕСКОЙ СИНГОНИИ 222

А.Б. Беялова

*Павлодарский государственный университет
им. С. Торайгырова*

В данной статье рассматриваются закономерности распространения электроупругих волн в пьезокристаллах ромбической сингонии класса 222. Для изучения используется теоретический метод, основанный на построении структуры матрицанта полной системы уравнений Максвелла и уравнений движения для анизотропных диэлектрических сред. Метод матрицанта позволяет качественно изучать процессы распространения гармонических электроупругих волн в анизотропных средах всех классов [1,2,3].

Система уравнений Максвелла при равенстве нулю объемной плотности зарядов ρ и вектора плотности токов j запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Уравнениями движения упругой анизотропной среды имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{2}$$

Компоненты электрической и магнитной индукции выражаются в следующем виде:

$$D_i = e_{ikl}\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ik}E_k, \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \quad (3)$$

где e_{ikl} - пьезоэлектрические постоянные, связывающие электрическое поле с механическими напряжениями; \hat{Y}_k - компоненты тензора диэлектрической проницаемости;

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,l}) - \text{тензор деформации};$$

В случае пьезокристаллов система уравнений (1-3) рассматривается совместно с определяющим соотношением между напряжением и деформацией, которое будет содержать дополнительное слагаемое, связанное с электрическим полем [1]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{l,k} - e_{ikl}E_k, \quad (4)$$

где c_{ijkl} - упругие жесткости, ρ - плотность среды.

На основе метода разделения переменных система уравнений (1-4) может быть приведена к эквивалентной системе 1-го порядка, описывающей распространение гармонических волн:

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B}\vec{u}; \quad \vec{u} = (u_z, \sigma_{zz}, u_x, \sigma_{xz}, u_y, \sigma_{yz}, E_y, H_x, H_y, E_x)^t \quad (5)$$

где u_i, σ_{iz} - компоненты вектора смещения и тензора напряжения; E_y, H_x, H_y, E_x - компоненты электрических и магнитных полей; k_x, k_y - соответственно x и y - компоненты волнового вектора; символ t означает операцию транспонирования в вектор - столбец.

$$\hat{B} = \hat{B}[c_{ijkl}(z), e_{kij}(z), \varepsilon_{ij}(z), k_x, k_y] - \text{матрица коэффициентов}$$

Элементы этой матрицы содержат в себе параметры среды в которой распространяется электроупругая волна.

Ромбическая система характеризуется взаимно перпендикулярными осями симметрии второго порядка.

Ромбическая система класса 222 – система с тремя взаимно перпендикулярными осями, являющимися двукратными осями симметрии. Такая система должна отвечать двум моноклинным системам класса 2: одной с двукратной осью симметрии, параллельной оси Y , и другой – с двукратной осью симметрии, параллельной оси Z . Материальные постоянные должны определяться обеими моноклинными системами. Это условие приводит к уменьшению числа постоянных. Матрицы коэффициентов для ромбической системы класса 222 имеют вид [1]:

$$c_{ijkl} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}; e_{kij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & e_{25} & 0 \\ 0 & 0 & e_{36} \end{pmatrix}; \vartheta_{ij} = \begin{pmatrix} \vartheta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \vartheta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta_{33} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Здесь мы имеем 9 независимых коэффициентов c_{ijkl} , 3 коэффициента e_{kij} и 3 коэффициента ϑ_{ij} . Система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dU_z}{dz} &= \frac{1}{c_{33}} \sigma_{zz} + \left(\frac{ik_x c_{13}}{c_{33}} \right) U_x + \left(\frac{ik_y c_{13}}{c_{33}} \right) U_y, \quad \frac{d\sigma_{zz}}{dz} = -\rho\omega^2 U_z + ik_x \sigma_{xz} + ik_y \sigma_{yz} \\ \frac{dU_x}{dz} &= \frac{1}{c_{55}} \sigma_{xz} + ik_x U_z + \frac{e_{25}}{c_{55}} E_y, \\ \frac{d\sigma_{xz}}{dz} &= \frac{ik_x c_{13}}{c_{33}} \sigma_{zz} + (-\rho\omega^2 + k_x^2 c_{11} - \frac{k_x^2 c_{13}^2}{c_{33}} + k_y^2 c_{66} + \frac{k_y^2 e_{36}^2}{\vartheta_{33}}) U_x + (k_x k_y c_{12} - \frac{k_x k_y c_1}{c_{33}} \\ &+ \frac{k_x k_y e_{36}^2}{\vartheta_{33}}) U_y - \frac{ik_y^2 e_{36}}{\omega \vartheta_{33}} H_x + \frac{ik_x k_y e_{36}}{\omega \vartheta_{33}} H_y, \\ \frac{dU_y}{dz} &= \frac{1}{c_{44}} \sigma_{yz} + ik_y U_z + \frac{e_{14}}{c_{44}} E_x, \\ \frac{d\sigma_{yz}}{dz} &= \frac{ik_y c_{13}}{c_{33}} \sigma_{zz} + (-\rho\omega^2 + k_x^2 c_{66} + k_y^2 c_{22} - \frac{k_x^2 c_{23}^2}{c_{33}} + \frac{k_x^2 e_{36}^2}{\vartheta_{33}}) U_y + (k_x k_y c_{66} + \frac{k_x k_y e_{36}^2}{\vartheta_{33}} \\ &- \frac{k_x k_y c_{13} c_{23}}{c_{33}}) U_x + \frac{ik_x^2 e_{36}^2}{\omega \vartheta_{33}} H_y - \frac{ik_x k_y e_{36}}{\omega \vartheta_{33}} H_x, \\ \frac{dE_y}{dz} &= \frac{ik_x k_y}{\omega \vartheta_{33}} H_y + \left(-\frac{ik_y^2}{\omega \vartheta_{33}} + i\omega \mu \mu_0 \right) H_x + \frac{k_y^2 e_{36}}{\vartheta_{33}} U_x + \frac{k_x k_y e_{36}}{\vartheta_{33}} U_y, \\ \frac{dE_x}{dz} &= -\frac{ik_x k_y}{\omega \vartheta_{33}} H_x + \left(\frac{ik_x^2}{\omega \vartheta_{33}} - i\omega \mu \mu_0 \right) H_y + \frac{k_x k_y e_{36}}{\vartheta_{33}} U_x + \frac{k_x^2 e_{36}}{\vartheta_{33}} U_y, \\ \frac{dH_x}{dz} &= \frac{i\omega e_{25}}{c_{55}} \sigma_{xz} + \left(i\omega \frac{e_{25}^2}{c_{55}} + i\omega \vartheta_{22} - \frac{ik_x^2}{\omega \mu \mu_0} \right) E_y + \frac{ik_x k_y}{\omega \mu \mu_0} E_x, \\ \frac{dH_y}{dz} &= -\frac{i\omega e_{14}}{c_{44}} \sigma_{yz} + \left(-i\omega \frac{e_{14}^2}{c_{44}} - i\omega \vartheta_{11} + \frac{ik_y^2}{\omega \mu \mu_0} \right) E_x - \frac{ik_x k_y}{\omega \mu \mu_0} E_y, \end{aligned}$$

Запишем систему уравнений в матричной форме:

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B}\vec{u}; \vec{u} = (U_z, \sigma_{zz}, U_x, \sigma_{xz}, E_y, H_x, U_y, \sigma_{yz}, H_y, E_x) \quad (7)$$

где матрица \hat{B} в одномерном случае имеет следующую структуру:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega b_{35} & b_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} & 0 & b_{710} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{710} & 0 & b_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{56} & 0 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \end{pmatrix} \quad (8)$$

сходя из структуры матрицы коэффициентов следует, что в этом случае в пьезокристалле существует не один, а несколько типов волн, взаимодействие

между которыми определяют коэффициенты $b_{35} = \frac{e_{25}}{c_{55}}$ и $b_{710} = \frac{e_{14}}{c_{44}}$. Эти коэффициенты отражают связь между пьезоэлектрическими модулями и упругими постоянными среды, в которой распространяются волны. Упругая продольная волна, описываемая коэффициентами b_{12} и b_{21} распространяется независимо от других типов волн. Коэффициент b_{35} определяет взаимодействие между упругой поперечной волной x - поляризации и электромагнитной ТЕ-волной, а коэффициент b_{710} между упругой поперечной волной y - поляризации и электромагнитной ТМ- волной.

При распространении волн в координатной плоскости xz система уравнений записывается в следующем матричном виде:

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B}\vec{u}; \vec{u} = (U_z, \sigma_{zz}, U_x, \sigma_{xz}, E_y, H_x, U_y, \sigma_{yz}, H_y, E_x) \quad (9)$$

где матрица \hat{B} имеет структуру:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega b_{35} & b_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} & 0 & b_{710} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{87} & 0 & b_{89} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{710} & 0 & b_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\omega}{i} b_{89} & 0 & b_{109} & 0 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ H_x \end{pmatrix} \quad (10)$$

В этом случае коэффициенты $b_{13} = \frac{ik_x c_{13}}{c_{33}}$, $b_{24} = \frac{1}{c_{55}}$ и $b_{35} = \frac{e_{14}}{c_{44}}$ определяют взаимосвязь между упругой продольной, упругой поперечной волной x - поляризации и электромагнитной ТЕ- волной, а $b_{710} = \frac{e_{14}}{c_{44}}$, $b_{89} = \frac{ik_x^2 e_{36}^2}{\omega \epsilon_{33}}$ между упругой поперечной волной y - поляризации и электромагнитной ТМ- волной.

При распространении волн в координатной плоскости yz система уравнений записывается в следующем матричном виде:

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B}\vec{u}; \vec{u} = (U_z, \sigma_{zz}, U_y, \sigma_{yz}, H_y, E_x, U_x, \sigma_{xz}, E_y, H_x) \quad (11)$$

где матрица \hat{B} имеет структуру:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & b_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{36} & 0 & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} & b_{79} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{87} & 0 & 0 & b_{810} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\omega}{i} b_{810} & 0 & 0 & b_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\omega b_{79} & b_{109} & 0 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \end{pmatrix} \quad (12)$$

В этом случае коэффициенты $b_{13} = \frac{ik_y c_{13}}{c_{33}}$, $b_{24} = ik_y$ и $b_{36} = \frac{e_{14}}{c_{44}}$ определяют взаимосвязь между упругой продольной, упругой поперечной волной y - поляризации и электромагнитной ТМ- волной, а коэффициенты $b_{79} = \frac{e_{25}}{c_{55}}$, $b_{810} = -\frac{ik_y^2 e_{36}}{\omega \epsilon_{33}}$ между упругой поперечной волной x - поляризации и электромагнитной ТЕ- волной.

Коэффициенты, определяющие взаимосвязь между различными типами волн, обеспечивают постоянный переход энергии упругих волн в энергию электромагнитных волн и наоборот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986.
2. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. – Новосибирск: Наука, 1982.
3. Глеукинов С.К. Распространение волн в неоднородных пьезокристаллах гексагональной сингонии. // Сб. научн. трудов. КазНТУ, ч. II. Алматы, 1994. С.62-65.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.

Түйіндеме

Берілген мақалада және аналитикалық әдісі негізінде 222 классты ромбальқ сингониялы пьезокристалдардағы сернімді электрлік толқындардың таралу заңдылықтары зерттелген. Максвел және қозғалыс теңдеулерінің толық жүйелері шешілген және анықталған, матрица коэффициенттерінің құрылымы құрастырылған.

Resume

In the given article and on the basis of an analytical method of a matrixiant are studied of regularity of distribution of elastic waves in piezocrystals rhombic singony of the class 222. Is obtained and the complete set of Maxwell equations and equations of motion is resolved, the frame of matrixes of factors is constructed.

УДК 539.3:534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДА КРИВОЛИНЕЙНЫХ СЕТОК ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

С.К. Ельмуратов

*Павлодарский государственный университет
им. С. Торайгырова*

Исследовать сходимость решений по вынужденным колебаниям пластин, а тем более оболочек – задача очень непростая. Обзор исследований в этой

области показал, что численные результаты для пластин и оболочек в литературе практически отсутствуют. Исключение составляют лишь несколько работ. Это работы И.В. Киселевой [1], В.К. Donaldson, S. Chander [2], Т. Sakata [3]. В книге А.С. Вольмира [4] приводятся различные зависимости амплитудно-частотных характеристик, по вынужденным нелинейным колебаниям, однако нет результатов в числах. Поэтому можно сравнить общий характер зависимости амплитудно-частотных характеристик от различных параметров. Примерно такие же зависимости приводятся в работе И.Г.Кильдибекова [5] при действии акустического давления. Даются зависимости амплитудно-частотных характеристик от начальных неправильностей и форм волнообразования.

Исходя из имеющихся задач по вынужденным колебаниям пластин и оболочек, будем исследовать сходимость метода криволинейных сеток применительно к данному классу задач. Рассмотрим шарнирно опертую изотропную плиту, в центре которой приложена вибрационная нагрузка и сосредоточенная масса. В работе И.В.Киселевой дается решение в двойных тригонометрических рядах для квадратной плиты. На рисунке 1 данное решение представлено горизонтальной линией 1.

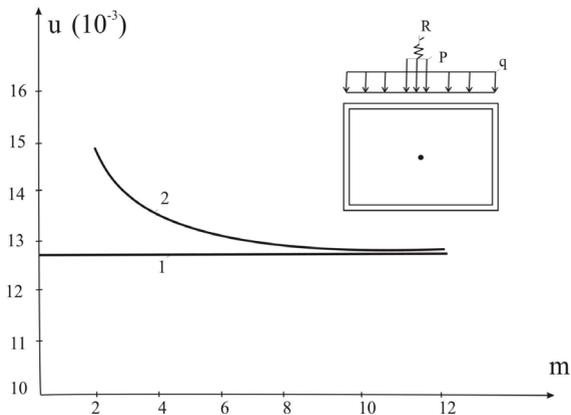


Рисунок 1 – График сходимости амплитудного прогиба

Будем решать эту задачу при различном числе делений сторон пластины, и наблюдать, как повлияет использование метода криволинейных сеток на результаты расчетов. На рисунке 1 по оси абсцисс будем откладывать число разностных делений « m » сторон плиты. По оси ординат откладываем амплитудное значение прогиба u , которое в данной задаче находится в точке приложения возмущающей нагрузки и сосредоточенной массы, а именно в центре плиты.

Расчеты показали, что при увеличении числа делений « m » результаты расчета уточняются. На рисунке 1 процесс изменения результатов расчета охарактеризован кривой 2, которая асимптотически стремится к прямой 1, то есть к решению, полученному И.В.Киселевой. При достижении числа делений сторон $m=10$, результаты, полученные на основе МКС, практически совпадают с решением в двойных тригонометрических рядах.

Далее исследуем вынужденные колебания цилиндрической оболочка-панели. Вдоль образующей оболочка-панель сжата статическими усилиями интенсивностью qI . Поперечную нагрузку зададим с учетом эффекта демпфирования. Тогда выражение для внешней нагрузки примет вид

$$\bar{q}(t) = \bar{R} \cdot \cos \theta t - 2 \cdot \varepsilon \cdot \frac{\gamma h}{g} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$$

Здесь второе слагаемое в правой части отражает демпфирование колебаний в предположении, что сила сопротивления пропорционально скорости $\partial u / \partial t$; ε – коэффициент демпфирования (рисунок 2).

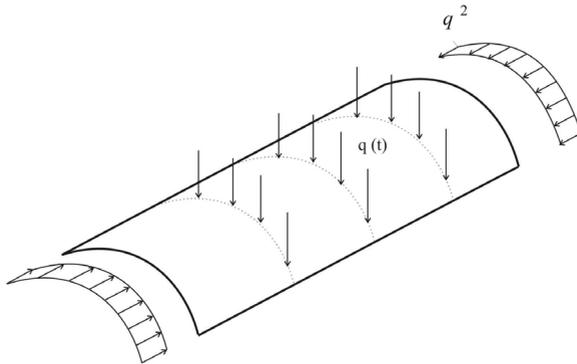


Рисунок 2 – Цилиндрическая оболочка-панель под действием периодической поперечной нагрузки

Приняты граничные условия шарнирного опирания. Строим зависимость $u-v$ для собственных нелинейных колебаний, и в результате получаем скелетную линию. На рисунке 3 скелетная линия представлена кривой 1. Будем теперь постепенно увеличивать частоту возмущающей нагрузки, мы наблюдаем последовательное увеличение амплитуды колебаний.

Построив, таким образом, зависимость амплитудного прогиба от частоты возмущающей силы, мы получили левую ветвь резонансной характеристики – кривую 2. При этом по оси абсцисс откладываем отношение частоты возмущающей силы к частоте собственных колебаний оболочки (v^*). Для

того чтобы построить правую ветвь необходимо идти от высоких частот, то есть, в обратном направлении уменьшая частоту возмущающей нагрузки. Получим правую ветвь, которая представлена кривой 3.

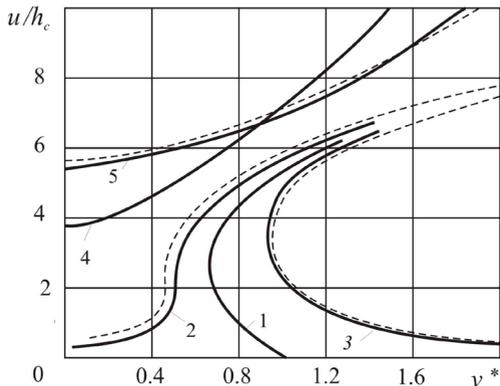


Рисунок 3 – Амплитудно-частотные зависимости для цилиндрической оболочки-панели

Анализируя полученные графики, можно сделать вывод, что одной и той же частоте могут соответствовать вынужденные колебания различного характера. Вынужденные колебания в нелинейных системах могут иметь дополнительные прогибы, отличные от первоначально полученных при той же частоте возмущающей силы. Пунктирными линиями приведены аналогичные амплитудно-частотные зависимости, полученные методом Бубнова-Галеркина и приведенные в работе [4]. Из сравнения графиков видно, что результаты, полученные методом криволинейных сеток при числе делений стороны $m = 16$, практически совпадают с результатами, полученными методом Бубнова-Галеркина, как по общему характеру кривых, так и по численным значениям. Далее для оболочки-панели рассмотрены амплитудно-частотные зависимости при наличии сжимающей силы. Причем, принято значение нагрузки $q_1 = 0,5 K_{кр}$ от верхней критической величины. Кривая 4 построена для оболочки с кривизной $k_1=12$, а кривая 5 при $k_1=24$. Кривая 5 сопоставлялась с аналогичной зависимостью, полученной методом Бубнова-Галеркина [4]. Здесь также значения амплитудно-частотных характеристик обоих методов очень близки, как по характеру, так, и по значениям. Решение задач по вынужденным колебаниям пластин и оболочек методом конечных разностей дает близкие значения амплитудных прогибов, отличающихся на (3÷5)% от решений метода криволинейных сеток в сторону запаса прочности.

В таблице 1 приведены значения прогибов в узлах сеточной области, полученные экспериментально [6] и методом криволинейных сеток.

Таблица 1

Прогибы в узлах сеточной области при $m=10$

Метод исследований	$\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$	1	2	3	4	5
	Экспериментальный	2	0,0302	0,0569	0,0821	0,0987
3		0,0533	0,1090	0,1462	0,1766	0,1876
4		0,0720	0,1417	0,2036	0,2483	0,2690
5		0,0839	0,1653	0,2349	0,2927	0,3220
6		0,0815	0,1583	0,2259	0,2740	0,2956
7		0,0683	0,1310	0,1858	0,2233	0,2378
8		0,0251	0,0912	0,0666	0,1557	0,1643
Теоретический	2	0,0312	0,0615	0,0853	0,1019	0,1082
	3	0,0557	0,1132	0,1516	0,1826	0,1946
	4	0,0759	0,1497	0,2119	0,2581	0,2773
	5	0,0966	0,1714	0,2436	0,3031	0,3340
	6	0,0841	0,1639	0,2329	0,2838	0,3054
	7	0,0708	0,1359	0,1924	0,2309	0,2453
	8	0,0259	0,0939	0,0692	0,1610	0,1699

Расхождение лежит в пределах ($4 \div 8$)%, что говорит о хорошей сходимости результатов расчета методом криволинейных сеток для задач вынужденных колебаний.

Рассмотренные примеры позволяют сделать вывод о том, что метод криволинейных сеток может быть обоснованно применен для исследования вынужденных колебаний пластин и оболочек, как при линейном, так и нелинейном деформировании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселева И.В. Колебание опертой по контуру прямоугольной ортотропной пластинки с учетом сосредоточенных масс в месте приложения вибрационной нагрузки // Труды МАДИ, 1957. – Вып. 21. – С. 131-136.
2. Donaldson B.K., Chander S. Numerical results for extended field method applications // J. of Sound and Vibr. 1973. – P. 437-444.
3. Sakata T. Forced vibration of rectangular plate with non- uniform thickness // J. Of Sound and Vibr. 1977. – Vol. 1. – P.147-158.
4. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
5. Кильдибеков И.Г. Исследование нелинейных колебаний пластинок // Теория пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971. – С. 151-154.

6. Ельмуратов С.К. Обследование, испытание и реконструкция зданий и сооружений. – Павлодар: ПГУ, 2003. – 93 с.

Түйіндеме

Мақалада қабықшалар мен пластинкалардың мәжбүрлі тербелісі мәселесін шешу кезінде қисықсызықты торлардың үйлесу әдістемесін зерттеуге көңіл бөлінген. Зерттеу, торлардың қолданылу жолымен, басқа да әдістермен салыстру кезінде жасалады, сонымен қатар автордың бұрыннан алған тәжірибелік мәліметтерімен жасалады. Қисықсызықты торлардың әдісі жақсы нәтиже береді деп көрсетілген және қабықшалар мен пластиналардың сызықты емес динамикасы арқылы мәселені шешуге негізделген және сәтті қолданылған.

Resume

The work researches the convergence of the tasks, got by the method of the curvilinear net. The tasks on forced rippling of the membranes and plates are taken as an example. The research is taking out by means of the net thickening, comparing the results got with other methods, as well as with the experimental data received by the author before. It is shown that the curvilinear net method gives good results and can be successfully applied while solving the tasks on the non-linear dynamics of the membranes and plates.

УДК 534.2:537.2

МАГНИТЭЛЕКТРЛІК ЭФФЕКТИСІ БАР ИЗОТРОПТЫ ЖӘНЕ АНИЗОТРОПТЫ ДИЭЛЕКТРЛІКТЕРДІҢ ШЕКАРАСЫНДАҒЫ ЭЛЕКТРМАГНИТТІК ТОЛҚЫННЫҢ ШАҒЫЛУ ЖӘНЕ СЫНУ КОЭФИЦИЕНТТЕРІ ТУРАЛЫ

М.Қ. Жүкенов

С. Торайғыров атындағы

Павлодар мемлекеттік университеті

Жұмыста матрицант әдісінің негізінде магнитэлектрлік эффектiсi бар диэлектрлік орталардың бөліну шегінде электромагниттік толқындардың әсерлесуінің шектік шарттары шығарылды. Изотропты диэлектрлік ортамен магнитэлектрлік эффектiсi бар анизотропты диэлектрлік ортаның шекарасындағы электрмагниттік толқынның шағылуы қарастырылған.

Магнитэлектрлік эффектісі бар орталардағы электромагниттік толқындық процесстерді зерттеу маңыздылығы әр-түрлі физика-механикалық эффекттер негізінде құралдар мен қондырғылар жасау үшін жана материалдарды іздеумен байланысты.

1. Магнитэлектрлік эффектісі бар орталарда электромагниттік толқындардың екіөлшемді таралуы материалдық қатынастары бар Максвелл теңдеулерімен сипатталады:

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j - \alpha_{ij} H_j \quad (1)$$

$$B_i = \mu_0 \mu_{ij} H_j - \alpha_{ij} E_j \quad (2)$$

Материалдық қатынастар бар Максвелл теңдеулерін (1), (2), толқындық процесстерді сипаттау кезінде 1-ші ретті теңдеулер жүйесіне келтіруге болады:

$$\frac{d\vec{U}}{dz} = B\vec{U} \quad \vec{U} = (E_y, H_x, H_y, E_x) \quad (3)$$

B матрицасының элементтерінің түрі:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & b_{14} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & 0 \\ 0 & -b_{14} & 0 & b_{34} \\ -b_{23} & 0 & b_{43} & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_{12} = i\omega\mu_0\mu_1; \quad b_{14} = i\omega\alpha_{\perp}$$

$$b_{21} = i\varepsilon_0 \left(\frac{k_x^2}{\beta} \varepsilon_2 + \omega\varepsilon_1 \right); \quad b_{23} = i \left(\frac{k_x^2}{\beta} \alpha_{11} + \omega\alpha_{\perp} \right) \quad (4)$$

$$b_{34} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon_1; \quad b_{43} = -i\mu_0 \left(\frac{k_x^2}{\beta} \mu_2 + \omega\mu_1 \right)$$

мұнда $\beta = \omega(\alpha_{11}^2 - \varepsilon_0\varepsilon_2\mu_0\mu_2)$, α_{ik} -симметриялық емес тензор, ε_{ij} , ε_{ij} -ортаның диэлектрлік және магниттік өтімділіктерінің тензорлары. ε_{ij} және ε_{ij} тензорлар тетрагоналды, тригоналды және гексагоналды сингонилардың анизотропиясына сәйкес келеді.

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

2. Матрицант әдісінің шеңберінде магнитэлектрлік эффектісі бар анизотропиялық орталарда электрмагниттік толқындардың таралуын сипаттайтын орташаландырылған матрицант келесі аналитикалық түрде жазылады:

$$T_{opt}^{\pm} = \left(\hat{\pi} + \frac{1}{2} E \right) \left(E \cos kz \pm \frac{B}{k} \sin kz \right) - \left(\hat{\pi} - \frac{1}{2} E \right) \left(E \cos \chi z \pm \frac{B}{\chi} \sin \chi z \right) \quad (5)$$

физика-механикалық параметрлердің тұрақты мәндерінде (5) матрицант (3) теңдеудің шешімі болып табылады:

$$\vec{U} = T \vec{U}_0 \quad (6)$$

(6) шешімінде тура және кері толқындардың қосындысы бар. Егер

$$\cos kz = \frac{1}{2} (e^{ikz} + e^{-ikz}), \quad \sin kz = \frac{1}{2} (e^{ikz} - e^{-ikz})$$

ескерсек, (5)-тен $z > 0$ және $z < 0$ бағыттары бойынша таралатын толқындар үшін матрицанттарды шығара аламыз

$$\begin{aligned} T_0^+ &= \frac{1}{2} \left(\hat{\pi} + \frac{1}{2} E \right) \left(E - \frac{B_0}{ik} \right) e^{-ikz} - \frac{1}{2} \left(\hat{\pi} - \frac{1}{2} E \right) \left(E - \frac{B_0}{i\chi} \right) e^{-i\chi z} \\ T_0^- &= \frac{1}{2} \left(\hat{\pi} + \frac{1}{2} E \right) \left(E + \frac{B_0}{ik} \right) e^{-ikz} - \frac{1}{2} \left(\hat{\pi} - \frac{1}{2} E \right) \left(E + \frac{B_0}{i\chi} \right) e^{-i\chi z} \end{aligned} \quad (7)$$

(5) және (7)-дегі

$$\hat{\pi} = \frac{\hat{P} - \tilde{P}_2 E}{\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2} - \frac{1}{2} E; \quad \hat{P} = E + \frac{1}{2} B^2 h^2$$

\tilde{P}_1, \tilde{P}_2 - келесі шарттын салдары ретінде шығатын сипаттама теңдеулердің түбірлері

$$\det(\hat{P} - \lambda E) = 0$$

k және χ толқындық сандар, ω^2 дейін ω мүшелерінің сақталуымен электрмагниттік толқындардың дисперсия теңдеулерінің жіктелуінен анықталады. Берілген жағдайда олар келесі түрде жазылады:

$$1 - \frac{k^2 h^2}{2} = \tilde{P}_1; \quad 1 - \frac{\chi^2 h^2}{2} = \tilde{P}_2$$

3. Шектік шарттар. Толқындардың екі жартылайкеңістіктің шегімен әсерлесуі кезіндегі толқындық өрістерге қойылатын шарттарды қарастырайық. Егер $z=0$ болса (7) матрицанттын түрі:

$$T_0^\pm = \frac{1}{2} E \mp R \quad (8)$$

R матрицасының түрі:

$$R = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} k - \chi \\ k\chi \end{pmatrix} \pi B - \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} k + \chi \\ k\chi \end{pmatrix} B \quad (9)$$

Егер \vec{U}_P - түскен толқындардың өрісі, \vec{U}_R - шағылған толқындардың өрісі және \vec{U}_I - сынған толқындардың өрісі десек, онда

$$T_0^P \vec{U}_P + T_0^R \vec{U}_R = T_0^I \vec{U}_I, \quad z=0 \text{ кезінде}$$

немесе

$$\left(\frac{1}{2} E - R_0 \right) \vec{U}_P + \left(\frac{1}{2} E + R_0 \right) \vec{U}_R = \left(\frac{1}{2} E - R^I \right) \vec{U}_I \quad (10)$$

Орталардың тиісуінде өрістердің үздіксіздігін ескерсек:

$$\vec{U}_P + \vec{U}_R = \vec{U}_I \quad (11)$$

шығатыны:

$$R_0 \vec{U}_P - R_0 \vec{U}_R = R^I \vec{U}_I \quad (12)$$

(11)-ді ескергенде (12)-ші өрнек $\vec{U}_P, \vec{U}_R, \vec{U}_I$ векторлар үшін іздеген матрицалық түрдегі шектік шарттар.

(11) және (12)-де \vec{U}_R мен \vec{U}_I векторлар белгісіз. (11)-ді (12)-ге қойғанда

$$\left(R_0 + R^I \right) \vec{U}_R = \left(R_0 - R^I \right) \vec{U}_P \quad (13)$$

осыдан шағылған толқындар үшін өрнек шығады:

$$\vec{U}_R = \left(R_0 + R^I \right)^{-1} \left(R_0 - R^I \right) \vec{U}_P \quad (14)$$

Сынған сәулелердің өрісі \vec{U}_t (11) өрнекпен анықталады.

4. (8)-гі R матрицасы келесі түрде өрнектеледі:

$$R = \frac{1}{2ik\chi(k + \chi)} \left[B_0^2 h^2 - (p_{11} + p_{22} - \Delta_0) E \right] \mathcal{B} \quad (15)$$

мұндағы

$$p_{11} = b_{12} b_{21} - b_{14} b_{23}; \quad p_{22} = b_{34} b_{43} - b_{14} b_{23}$$

$$\Delta_0 = \sqrt{(b_{12} b_{34} + b_{14}^2)(b_{21} b_{43} + b_{23}^2)} \quad (16)$$

Орталардың шекарасындағы шешулердің үздіксіздік шартының ескеруімен (10) немесе (12) шарттар шағылған, сынған және түске толқындар өрістерінің векторларына қойылатын шектік шарттардың матрицалық түрі болып табылады.

(16) өрнектің ескеруімен (15) теңдеуді шығару арқылы R матрицасының анық түрін шығаруға болады:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & 0 & r_{14} \\ r_{21} & 0 & r_{23} & 0 \\ 0 & -r_{14} & 0 & r_{34} \\ -r_{23} & 0 & r_{43} & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

R матрицасының элементтері келесі түрде шығады:

$$r_{12} = \frac{1}{2ik\chi(k + \chi)} \Delta_1 (b_{12} \Delta_2 - b_{43} \Delta_1), \quad r_{14} = \frac{1}{2ik\chi(k + \chi)} \Delta_1 (b_{14} \Delta_2 + b_{23} \Delta_1)$$

$$r_{21} = \frac{1}{2ik\chi(k + \chi)} \Delta_2 (-b_{34} \Delta_2 + b_{21} \Delta_1), \quad r_{23} = \frac{1}{2ik\chi(k + \chi)} \Delta_2 (b_{14} \Delta_2 + b_{23} \Delta_1)$$

$$r_{34} = \frac{1}{2ik\chi(k + \chi)} \Delta_1 (b_{34} \Delta_2 - b_{21} \Delta_1), \quad r_{43} = -\frac{1}{2ik\chi(k + \chi)} \Delta_2 (b_{43} \Delta_2 + b_{12} \Delta_1)$$

мұнда

$$\Delta_1 = \sqrt{b_{12} b_{34} + b_{14}^2}, \quad \Delta_2 = \sqrt{b_{21} b_{43} + b_{23}^2}$$

5. Егер

$$R_0 + R^t = \hat{\tau}^+, R_0 - R^t = \hat{\tau}^-$$

десек, онда

$$\vec{U}_R = (\hat{\tau}^+)^{-1} (\hat{\tau}^-) \vec{U}_P$$

$\hat{\tau}^+$ және $\hat{\tau}^-$ матрицаларының элементтері келесі түрде анықталады

$$\tau_{ij}^+ = r_{ij}^0 + r_{ij}^t, \quad \tau_{ij}^- = r_{ij}^0 - r_{ij}^t$$

$$\vec{U}_R = G \vec{U}_P; \quad G = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & g_{13} & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & g_{24} \\ g_{31} & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & g_{42} & 0 & g_{44} \end{pmatrix}$$

G матрицасының элементтерінің түрі

$$g_{11} = \frac{\tau_{43}^+ \tau_{21}^-}{\Lambda_2^2} + \frac{\tau_{23}^+ \tau_{23}^-}{\Lambda_2^2}, \quad g_{13} = \frac{\tau_{43}^+ \tau_{23}^-}{\Lambda_2^2} - \frac{\tau_{23}^+ \tau_{43}^-}{\Lambda_2^2}$$

$$g_{22} = \frac{\tau_{34}^+ \tau_{12}^-}{\Lambda_1^2} + \frac{\tau_{14}^+ \tau_{14}^-}{\Lambda_1^2}, \quad g_{24} = \frac{\tau_{34}^+ \tau_{14}^-}{\Lambda_1^2} - \frac{\tau_{14}^+ \tau_{34}^-}{\Lambda_1^2}$$

$$g_{31} = \frac{\tau_{23}^+ \tau_{21}^-}{\Lambda_2^2} - \frac{\tau_{21}^+ \tau_{23}^-}{\Lambda_2^2}, \quad g_{33} = \frac{\tau_{23}^+ \tau_{23}^-}{\Lambda_2^2} + \frac{\tau_{21}^+ \tau_{43}^-}{\Lambda_2^2}$$

$$g_{42} = \frac{\tau_{14}^+ \tau_{12}^-}{\Lambda_1^2} - \frac{\tau_{12}^+ \tau_{14}^-}{\Lambda_1^2}, \quad g_{44} = \frac{\tau_{14}^+ \tau_{14}^-}{\Lambda_1^2} - \frac{\tau_{12}^+ \tau_{34}^-}{\Lambda_1^2}$$

$$\Lambda_1 = \sqrt{\tau_{12}^+ \tau_{34}^+ + \tau_{14}^{+2}}, \quad \Lambda_2 = \sqrt{\tau_{21}^+ \tau_{43}^+ + \tau_{23}^{+2}}$$

6. Шағылған және сынған толқындардың өрістері үшін өрнектер.

$$\vec{U}_R = (E_{yR}, H_{xR}, H_{yR}, E_{xR})$$

болғандықтан

$$\vec{U}_P = (E_{yP}, \beta E_{yP}, 0, 0)$$

деп есептеп, шағылған толқындардың өрісін шығарамыз

$$E_{yR} = g_{11} E_{yP}; \quad H_{xR} = \beta g_{22} E_{yP}$$

$$H_{yR} = g_{31} E_{yP}; \quad E_{xR} = \beta g_{42} E_{yP}$$

Сынған толқындардың өрісі (4) негізінде анықталады.

ӘДЕБИЕТТЕР

- 1.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982 г.
- 2.Вайнштейн Б.К., Современная кристаллография. Том-4. Наука, 1979 г.
- 3.Тлеукунов С.К., Оспанов А.Т. Изучение электромагнитных полей в анизотропных средах. – Алматы: Наука, 1985. – 176 с.
- 4.Тлеукунов С.К. О характеристической матрице периодически неоднородного слоя. В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. – Ленинград: Зап. научн. семин., ЛОМИ, 1987. - Т.165. - С. 177-181.
5. Тлеукунов С.К., Метод матрицанта. - Павлодар, НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004г., 148 с.
6. Tleukenov S. The structure of propagator matrix and its application in the case of the periodical inhomogeneous media. Abstr. Semin. on Earthquake processes and their consequences Seismological investigations. 1989. - Kurukshetra, India. - P. 4.
- 7.Курманов А.А. Структура фундаментальных решений системы уравнений Максвелла для электромагнитных полей в анизотропных средах при наличии проводимости. Павлодар: Вестник ПГУ, №3, 2004.
8. Тлеукунов С.К., Жукенов М.К. Магнитэлектрлік эффектісі бар біртексіз және периодты біртексіз ортада электромагниттік толқындардың таралуы. Павлодар: Вестник ПГУ, №3, 2005.

Түйіндеме

В работе в рамках метода матрицанта получена матричная форма граничных условий взаимодействия электромагнитных волн с границей раздела диэлектрических сред с магнитоэлектрическим эффектом. Рассматривается отражение электромагнитной волны на границе изотропной диэлектрической среды с анизотропной диэлектрической средой с магнитоэлектрическим эффектом.

Resume

In operation within the framework of a method of a matrixiant the matrix shape a boundary requirement of interaction of electromagnetic waves with a demarcation of dielectric mediums with permanent-magnet by effect is obtained. The reflection of an electromagnetic wave on border of isotropic dielectric medium with anisotropic dielectric medium with permanent-magnet effect is considered.

СВЯЗАННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Н.А. Испулов, А.К. Сейтханова

*Павлодарский государственный университет
им. С. Торайгырова*

1 Матричная формулировка задач распространения термоупругих волн

Распространение термоупругих волн в анизотропных средах описывается уравнениями движения, решаемых совместно с уравнением теплопроводности Фурье и уравнением притока тепла, которые имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{U}_i \quad (1)$$

$$\lambda_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = -q_i \quad (2)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = -i\omega \beta_{ij} \varepsilon_{ij} - i\omega \frac{c_\varepsilon}{T_0} \theta \quad (3)$$

где σ_{ij} - тензор напряжения, ρ - плотность среды, λ_{ij} - тензор теплопроводности, q_i - вектор притока тепла, ω - круговая частота, β_{ij} - термомеханические постоянные $\beta_{ij} = \beta_{ji}$, ε_{ij} - тензор деформации, c_ε - теплоемкость при постоянной деформации, $\theta = T - T_0$ - приращение температуры

по сравнению с температурой естественного состояния T_0 , $\left| \frac{\theta}{T_0} \right| \ll 1$ для малых деформаций.

Физико-механические величины связаны соотношением Дюгамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \theta \quad (4)$$

Здесь C_{ij} - упругие параметры, $c_{ijkl}=c_{jikl}=c_{ijlk}=c_{klij}$; e^k - тензор малых деформаций Коши.

Уравнения (1)-(4) определяют взаимосвязь механических напряжений и температуры как функции независимых переменных – теплового поля и деформации.

Таким образом, соотношения (1)-(4) составляют замкнутую систему уравнений термоупругости, которая описывает распространение термоупругих волн.

На основе метода разделения переменных в случае гармонической зависимости от времени:

$$\left[U_i(x, y, z, t); \sigma_{ij}(x, y, z, t); \theta; q_z \right] = \left[U_i(z), \sigma_{ij}(z), \theta; q_z \right] e^{i(\omega t - mx - ny)} \quad (5)$$

Система уравнений (1)-(4) приводится к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка с переменными коэффициентами, описывающей распространение гармонических волн:

$$\frac{d\vec{W}}{dz} = B\vec{W} \quad (6)$$

Здесь $B = B[c_{ijkl}(z), \beta_{ij}(z), \omega, m, n]$ - матрица коэффициентов, элементы которой содержат в себе параметры среды, в которой распространяются термоупругие волны; m, n - компоненты волнового вектора \vec{K} .

Вектор \vec{W} имеет вид:

$$\vec{W}(x, y, z, t) = \left[u_z(z), \sigma_{zz}, u_x(z), \sigma_{xz}, u_y(z), \sigma_{yz}, \theta, q_z \right] \exp(i\omega t - imx - iny) \quad (7)$$

Символ t означает операцию транспонирования вектора - строки в вектор – столбец.

Неоднородность среды предполагается вдоль оси Z . При построении матрицы коэффициентов B используется представление решения в виде (5), из системы уравнений (1)-(4) выделяются производные по Z и исключаются компоненты тензора напряжения не входящие в граничные условия. Множитель $\exp(i\omega t - imx - iny)$ всюду опущен.

Структуры матрицы B и вектор – столбец граничных условий в объемном случае для ромбической и гексагональной сингонии в случае оси симметрии второго порядка и неоднородности вдоль оси Z :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & b_{45} & 0 & b_{47} & 0 \\ b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 \\ 0 & b_{15} & b_{45} & 0 & b_{65} & 0 & b_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega b_{17} & -i\omega b_{47} & 0 & -i\omega b_{67} & 0 & b_{87} & 0 \end{bmatrix}; \vec{W} = \begin{pmatrix} u_z \\ \sigma_{zz} \\ u_x \\ \sigma_{xz} \\ u_y \\ \sigma_{yz} \\ \theta \\ q_z \end{pmatrix} \quad (8)$$

Из структуры матрицы коэффициентов (8) следует, что в пространственном случае упругие волны различной поляризации и тепловая волна взаимосвязаны.

Отличные от нуля элементы матрицы B b_{13} , b_{24} определяют взаимную трансформацию продольной и поперечной X - поляризованной волн. Элементы b_{15} , b_{26} описывают взаимосвязь поперечной Y -поляризации с продольной волной. Отличный от нуля элемент b_{45} определяет взаимную трансформацию между волнами поперечной поляризации.

Отличие от нуля коэффициента b_{17} :

$$b_{17} = \frac{\beta_{33}}{c_{33}}$$

означает, что продольная волна распространяется с термоупругим эффектом.

Не нулевые элементы b_{47} и b_{67} :

$$b_{47} = \left(\frac{c_{13}}{c_{33}} \beta_{33} - \beta_{11} \right) i\omega \quad b_{67} = \left(\frac{c_{23}}{c_{33}} \beta_{33} - \beta_{22} \right) i\omega$$

означают влияние на упругие волны поперечных поляризаций термоупругого эффекта. При этом b_{47} описывает влияние термоупругого эффекта на упругую поперечную волну X - поляризации, а b_{67} влияние термоупругого эффекта на поперечную волну Y - поляризации.

Аналогично, для термоупругих волн, распространяющихся в анизотропной среде кубической сингонии построена матрица коэффициентов в объемном случае и проведен анализ матриц коэффициентов. Также получены структуры матриц коэффициентов при распространении термоупругих волн в анизотропных средах ромбической и гексагональной и кубической сингоний в плоскости XZ и YZ , определены типы волн и взаимная трансформация волн различной поляризации.

2 Структура матрицанта

Построение структуры матрицанта основано на его представлении в форме экспоненциального матричного ряда

$$T = E + \int_0^z B dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} B(z_1)B(z_2) dz_1 dz_2 + \dots \quad (9)$$

И аналогичном представлении обратного матрицанта T^{-1}

$$T^{-1} = E - \int_0^z B dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} B(z_2)B(z_1) dz_1 dz_2 - \dots \quad (10)$$

Оба ряда абсолютно и равномерно сходятся на любом конечном интервале, в котором элементы матрицы $B(z)$ непрерывны.

При этом справедливо соотношение:

$$TT^{-1} = T^{-1}T = E \quad (11)$$

Построение структуры матрицанта есть установление зависимости между элементами прямой и обратной матриц T и T^{-1} на основе поэлементного их сравнения.

Бесконечные матричные ряды можно представить в виде

$$T = T_{\text{ч}} + T_{\text{нч}}, \quad T^{-1} = T_{\text{ч}}^{-1} - T_{\text{нч}}^{-1} \quad (12)$$

где $T_{\text{ч,нч}}$ – сумма четных и нечетных рядов (9) и (10).

Методом математической индукции доказывается, что структура $T^{-1}(2n)$ и $T^{-1}(2n+1)$ сохраняется при любом n .

Структура матрицанта, в случае распространения термоупругих волн в кубической, гексагональной и ромбической сингоний в объемном случае, определена в виде:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} & -t_{42} & t_{32} & -t_{62} & t_{52} & -t_{82} & t_{72} \\ -t_{21} & t_{11} & t_{41} & -t_{31} & t_{61} & -t_{51} & t_{81} & -t_{71} \\ -t_{24} & t_{14} & t_{44} & -t_{34} & t_{64} & -t_{54} & t_{84} & -t_{74} \\ t_{23} & -t_{13} & -t_{43} & t_{33} & -t_{63} & t_{53} & -t_{83} & t_{73} \\ -t_{26} & t_{16} & t_{46} & -t_{36} & t_{66} & -t_{56} & t_{86} & -t_{76} \\ t_{25} & -t_{15} & -t_{45} & t_{35} & -t_{65} & t_{55} & -t_{85} & t_{75} \\ -t_{28} & t_{18} & t_{48} & -t_{38} & t_{68} & -t_{58} & t_{88} & -t_{78} \\ t_{27} & -t_{17} & -t_{47} & t_{37} & -t_{67} & t_{57} & -t_{87} & -t_{77} \end{pmatrix} \quad (13)$$

элементы t_{ij} матрицанта T^{-1} являются элементами прямого матрицанта T .

Получены структура матрицанта при распространении термоупругих волн в данных классах в плоскости XZ , в плоскости YZ .

В одномерном случае (распространение волн вдоль оси Z, $m=0$, $n=0$) структура (13) примет вид:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} & -t_{82} & t_{72} \\ -t_{21} & t_{11} & t_{81} & -t_{71} \\ -t_{28} & t_{18} & t_{88} & -t_{78} \\ t_{27} & -t_{17} & -t_{87} & t_{77} \end{pmatrix};$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{44} & -t_{34} \\ -t_{43} & t_{33} \end{pmatrix};$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{66} & -t_{56} \\ -t_{65} & t_{55} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Построение структуры матрицанта, в данном случае, есть установление зависимости между элементами прямой и обратной матриц T и T-1 на основе поэлементного их сравнения.

Разложение структуры (8x8) матрицы (13) на матрицу (4x4) и две матрицы (2x2) означает независимость распространения упругой продольной волны с термоэффектом и упругих поперечных волн. В то же время на упругие поперечные волны, при одномерном распространении в анизотропных средах кубической, гексагональной и ромбической сингоний, вдоль оси симметрии четного порядка, также распространяются без термоупругого эффекта.

3 Уравнения дисперсии для упругих и термоупругих анизотропных сред

Основной характеристикой, определяющей закономерности волновых процессов в неограниченных периодических структурах, являются уравнения дисперсии. Дисперсионные соотношения представляют собой зависимости $v = v(\omega)$, $k = k(\omega)$, $\omega = \omega(k)$, $\omega = \omega(v)$. Где v - скорость, ω - циклическая частота, k - волновой вектор. В частном случае мы получаем зависимость $k = k(\omega)$. Полученная выше структура матрицанта позволяет модифицировать условие существования нетривиальных решений и в два раза понизить степень характеристического уравнения.

На основе модифицированной формы условия существования нетривиальных решений:

$$\det[p - E \cos \tilde{k}h] = 0 \quad (15)$$

где

$$p = \frac{1}{2}[T + T^{-1}] \quad (16)$$

получены уравнения дисперсии термоупругих волн, распространяющихся в анизотропных средах кубической, гексагональной и ромбической сингоний в объемном случае, имеющие следующий вид:

$$\begin{aligned} \cos \tilde{k}_1 h &= -\frac{a}{4} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\sqrt{3\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{5(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}}} \right) - \\ &\frac{1}{5} \left(\sqrt{-\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{2(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}} + \frac{5(a^3 - 4ba + 8c)}{3\sqrt[3]{\gamma}}} + 3a^2 - 8b \right) \\ \cos \tilde{k}_2 h &= -\frac{a}{4} - \frac{1}{4} \left(\sqrt{3\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{5(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}}} \right) + \\ &+ \frac{1}{5} \left(\sqrt{-\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{2(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}} + \frac{5(a^3 - 4ba + 8c)}{3\sqrt[3]{\gamma}}} + 3a^2 - 8b \right) \\ \cos \tilde{k}_3 h &= -\frac{a}{4} + \frac{1}{4} \left(\sqrt{3\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{5(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}}} \right) - \\ &- \frac{1}{5} \left(\sqrt{-\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{2(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}} + \frac{5(a^3 - 4ba + 8c)}{3\sqrt[3]{\gamma}}} + 3a^2 - 8b \right) \\ \cos \tilde{k}_4 h &= -\frac{a}{4} + \frac{1}{4} \left(\sqrt{3\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{5(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}}} \right) + \\ &+ \frac{1}{5} \left(\sqrt{-\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{2(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}} - \frac{5(a^3 - 4ba + 8c)}{3\sqrt[3]{\gamma}}} + 3a^2 - 8b \right) \end{aligned}$$

где

$$\gamma = \sqrt[3]{2b^3 - 9(ac + 8d)b + 27(c^2 + a^2d) + \sqrt{(2b^3 - 9(ac + 8d)b + 27(da^2 + c^2))^2 - 4(b^2 - 3ac + 12d)^3}}$$

a, b, c – элементы матрицы (16)

Данные уравнения дисперсии получены с помощью математического пакета Mathematic 4.0.

Знание матрицы монодромии (матрицант одного периода неоднородности) позволяет в аналитической форме получить представление матрицанта произвольного периодически неоднородного слоя.

При наличии n периодов последовательность уравнений

$$\vec{u}_1 = T\vec{u}_0, \vec{u}_2 = T\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n = T\vec{u}_{n-1} \quad (17)$$

приводит к уравнению

$$\vec{u}_n = T^n \vec{u}_0 \quad (18)$$

Таким образом, вычисление матрицанта периодически неоднородного слоя, имеющего n периодов, связано с вычислением n -ой степени матрицы монодромии.

Введение важной для регулярных структур матрицы p (16) дает рекуррентное соотношение:

$$T^2 = 2pT - E \quad (19)$$

Последовательное применение (19) позволяет представить T^n в виде:

$$T^n = P_n(p)T - P_{n-1}(p) \quad (20)$$

где $P_n(p)$ – матричные полиномы Чебышева – Гегенбауэра.

Получены уравнения дисперсии упругих волн в однородных анизотропных слоях при различных граничных условиях: уравнение дисперсии упругих волн в анизотропном слое ромбической сингонии при жестком закреплении границ; уравнение дисперсии упругих волн в анизотропном слое в случае свободных границ и в случае свободно-жестких границ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тлеукунов С.К. Метод матрицанта. Павлодар: НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004.- 148 с.
2. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1986.- 556 с.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.- 552 с.
4. Тлеукунов С. К., Орынбасаров К. А. О матрицах фундаментальных решений уравнений динамики неоднородных анизотропных сред. Изв. АН Каз ССР, сер. физ.-мат., 1991, N 5.- С. 87-91.

Түйіндеме

Термомеханикалық эффектімен болатын серпінді орталарда толқындық процестердің заңдылықтарды зерттеу актуалдығы,

геофизика, сейсмология, композиттік материалдардың механикасының теориялық және қолданбалы есептерді шешуінде қажеттілігімен байланысты. Байланысқан қозғалыс теңдеулері мен жылуоткізгіштік теңдеулері физика–механикалық параметрлердің күрделілігі мен көп болуымен ерекшеленеді. Осыған байланысты деформацияланатын қатты дене механикасының – термосерпімділік деген тарауы қарқынды дамып келеді. Осы бағыттың аясында анизотропты орталардың кейбір физика–механикалық қасиеттерін қолдана отырып, байланысқан жылулық және механикалық өрістер зерттеледі.

Resume

The urgency of research of laws of wave processes in elastic environments with thermo mechanical effect is connected with necessity of the decision of theoretical and applied problems of geophysics, seismology, mechanics of composite materials etc. Connected equations of movement and the heat conductivity equation differ complexity and an abundance of physical–mechanical parameters. In this connection the section of mechanics of a deformable firm body, - thermo elasticity intensively develops. Within the limits of this direction, leaning against use of certain physical–mechanical properties anisotropic environments, the connected thermal and mechanical fields are studied.

УДК 534.2:537.2

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В ПЬЕЗОКРИСТАЛЛАХ

С.К. Тлеукунов

*Павлодарский государственный университет
им. С. Торайгырова*

При рассмотрении макроскопических свойств кристаллов, можно отвлечься от их дискретного микропериодического строения. При этом кристалл выступает как сплошная однородная анизотропная среда. В самом деле, рассматривая макроскопические свойства кристаллов, мы имеем дело с расстояниями, существенно большими, чем наибольший из периодов кристаллической решетки, и с объемами, гораздо большими, чем объем ячейки. Поэтому можно рассматривать кристалл как сплошную (непрерывную) среду. Следует помнить, что кристалл можно рассматривать как сплошную однородную среду лишь с некоторой точностью, так как реальный пьезоэлектрический кристалл

содержит различного рода примеси и несовершенства, имеющие различное объемное распределение (секториальное, зонарное и т.д.). Физические свойства кристалла анизотропны и зависят от направления, их описание зависит от ориентации системы координат. Анизотропность среды определяется либо ее внутренней структурой, либо создается наложением внешних полей- магнитных, электрических, упругих деформаций.

Анализ распространения волн в пьезоэлектрических средах основывается на уравнениях упругости, решаемых совместно с уравнениями Максвелла.

Система уравнений Максвелла при равенстве нулю объемной плотности зарядов ρ и вектора плотности токов j запишем следующим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad (4)$$

При $\varphi = 0, j = 0$ уравнения (3), (4) являются следствием уравнений (1), (2).

Компоненты электрической индукции выражаются через деформации и напряженность электрического поля:

$$D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ik} E_k, \quad (5)$$

где e_{ikl} - пьезоэлектрические постоянные, связывающие электрическое поле с механическими напряжениями;

ε_{ik} - компоненты тензора диэлектрической проницаемости;

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{l,k} + u_{k,l}) \quad \text{- тензор деформации;}$$

Связь же вектора магнитной индукции \vec{A} с напряженностью магнитного поля \vec{I} можно представить в форме:

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H} \quad (6)$$

В случае пьезокристаллов система уравнений (1), (2), (5), (6) рассматривается совместно с определяющим соотношением между напряжением и деформацией, которое будет содержать дополнительное слагаемое, связанное с электрическим полем:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{l,k} - e_{ikl} E_k, \quad (7)$$

Уравнениями движения упругой анизотропной среды имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (8)$$

где c_{ijkl} - упругие жесткости, ρ - плотность среды.

С учетом высказанных выше исходных положений представление волновых полей \vec{E} , \vec{H} , \vec{B} , \vec{D} рассматриваются в виде:

$$\vec{F} = \vec{F}(\omega, z) e^{i\omega t' ik_x x' ik_y y} \quad (9)$$

На основе метода разделения переменных система уравнений (1-8) может быть приведена к эквивалентной системе 1-го порядка, описывающей распространение гармонических волн:

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B} \vec{u}; \quad \vec{u} = (u_z, \sigma_{zz}, u_x, \sigma_{xz}, u_y, \sigma_{yz}, E_y, H_x, H_y, E_x)' \quad (10)$$

где u_i, σ_{ij} - компоненты вектора смещения и тензора напряжения; E_y, H_x, H_y, E_x - компоненты электрических и магнитных полей; k_x, k_y - соответственно x и y - компоненты волнового вектора; символ t означает операцию транспонирования в вектор - столбец.

$$\hat{B} = \hat{B} [c_{ijkl}(z), e_{kij}(z), \varepsilon_{ij}(z), k_x, k_y] \text{-матрица коэффициентов}$$

Элементы этой матрицы содержат в себе параметры среды в которой распространяется электроупругая волна.

Неоднородность среды предполагается вдоль оси z . При построении матрицы коэффициентов \hat{B} используется представление решения в виде (10) из системы уравнений (1-8) выделяются производные по z и исключаются компоненты тензора напряжений не входящие в граничные условия, при неоднородности вдоль оси z .

Тетрагональная система класса 422 – имеет четырехкратную ось симметрии, параллельную оси Z , и характерные признаки ромбической системы класса 222. Коэффициенты матрицы должны одновременно определяться тетрагональной системой класса 4 и ромбической системой класса 222. В результате получаем следующие матрицы материальных коэффициентов:

$$c_{ijk} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}; e_{kij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & e_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Здесь мы имеем 6 независимых коэффициентов C_{ijk} , 1 коэффициент ε_{ki} и 2 коэффициента ε_{ij} .

Проведя аналогичные пункту 1.2. вычисления получен явный вид дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dU_z}{dz} = \frac{1}{c_{33}} \sigma_{zz} + \left(\frac{ik_x c_{13}}{c_{33}} \right) U_x + \left(\frac{ik_y c_{13}}{c_{33}} \right) U_y$$

$$\frac{d\sigma_{zz}}{dz} = -\rho\omega^2 U_z + ik_x \sigma_{xz} + ik_y \sigma_{yz}$$

$$\frac{dU_x}{dz} = \frac{1}{c_{44}} \sigma_{xz} + ik_x U_z + \frac{e_{14}}{c_{44}} E_y$$

$$\frac{d\sigma_{xz}}{dz} = \frac{ik_x c_{13}}{c_{33}} \sigma_{zz} + (-\rho\omega^2 + k_x^2 c_{11} - \frac{k_x^2 c_{13}^2}{c_{33}} + k_y^2 c_{66}) U_x + (k_x k_y c_{12} - \frac{k_x k_y c_{13}^2}{c_{33}} + k_x k_y c_{66}) U_y$$

$$\frac{dU_y}{dz} = \frac{1}{c_{44}} \sigma_{yz} + ik_y U_z + \frac{e_{14}}{c_{44}} E_x$$

$$\frac{d\sigma_{yz}}{dz} = \frac{ik_y c_{13}}{c_{33}} \sigma_{zz} + (-\rho\omega^2 + k_x^2 c_{66} + k_y^2 c_{11} - \frac{k_y^2 c_{13}^2}{c_{33}}) U_y + (k_x k_y c_{66} + k_x k_y c_{12} - \frac{k_x k_y c_{13}^2}{c_{33}}) U_x$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_y}{dz} &= \frac{ik_x k_y}{\omega_{33}} H_y + \left(-\frac{ik_y^2}{\omega_{33}} + i\alpha \mu \mu_0 \right) H_x \\ \frac{dE_x}{dz} &= \frac{ik_x k_y}{\omega_{33}} H_x + \left(\frac{ik_x^2}{\omega_{33}} - i\alpha \mu \mu_0 \right) H_y \\ \frac{dH_x}{dz} &= \frac{i\omega_{14}}{c_{44}} \sigma_{xz} + \left(i\omega \frac{e_{14}^2}{c_{44}} + i\omega_{11} - \frac{ik_x^2}{\alpha \mu \mu_0} \right) E_y + \frac{ik_x k_y}{\alpha \mu \mu_0} E_x \\ \frac{dH_y}{dz} &= \frac{i\omega_{14}}{c_{44}} \sigma_{yz} + \left(-i\omega \frac{e_{14}^2}{c_{44}} - i\omega_{11} + \frac{ik_y^2}{\alpha \mu \mu_0} \right) E_x - \frac{ik_x k_y}{\alpha \mu \mu_0} E_y \end{aligned} \quad (12)$$

Запишем систему уравнений в матричной форме:

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B} \vec{u}; \vec{u} = (U_z, \sigma_{zz}, U_x, \sigma_{xz}, E_y, H_x, U_y, \sigma_{yz}, H_y, E_x) \quad (13)$$

где матрица \hat{B} в случае распространения электроупругих волн вдоль оси Z имеет следующую структуру:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega b_{35} & b_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{34} & 0 & -b_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\omega b_{35} & 0 & -b_{65} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{56} & 0 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \end{pmatrix} \quad (14)$$

Исходя из структуры матрицы коэффициентов в пьезокристалле тетрагональной сингонии класса 422 распространяется пять волн: упругая продольная, упругая поперечная волна x- поляризации связанная с электромагнитной ТЕ- волной и упругая поперечная волна y- поляризации связанная с электромагнитной ТМ- волной.

При распространении волн вдоль координатной плоскости xz система уравнений записывается в следующем матричном виде:

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B}\vec{u}; \vec{u} = (U_z, \sigma_{zz}, U_x, \sigma_{xz}, E_y, H_x, U_y, \sigma_{yz}, H_y, E_x) \quad (15)$$

где матрица \hat{B} имеет структуру:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega b_{35} & b_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{34} & 0 & -b_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{87} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\omega b_{35} & 0 & b_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{109} & 0 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \end{pmatrix} \quad (16)$$

Исходя из структуры матрицы коэффициентов вдоль координатной плоскости xz распространяется пять волн: упругая продольная связанная с упругой поперечной волной x- поляризации и с электромагнитной ТЕ- волной и упругая поперечная волна y- поляризации связанная с электромагнитной ТМ- волной.

При распространении волн вдоль координатной плоскости yz система уравнений записывается в следующем матричном виде:

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B}\vec{u}; \vec{u} = (U_z, \sigma_{zz}, U_y, \sigma_{yz}, H_y, E_x, U_x, \sigma_{xz}, E_y, H_x) \quad (17)$$

где матрица \hat{B} имеет структуру:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & b_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{36} & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{34} & -b_{36} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{87} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{36} & b_{109} & 0 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \end{pmatrix} \quad (18)$$

Исходя из структуры матрицы коэффициентов вдоль координатной плоскости yz распространяется пять волн: упругая продольная связанная с упругой поперечной волной y- поляризации и с электромагнитной ТМ- волной и упругая поперечная волна x- поляризации связанная с электромагнитной ТЕ- волной.

Матричные уравнения (13,15,17), являющиеся системой десяти обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами, есть искомые, основные в дальнейших исследованиях, уравнения. Они описывают гармонически зависящие во времени электроупругие волновые процессы в одномерно- неоднородных материальных средах, а также в координатных плоскостях при проявлении анизотропии в свойствах среды самого общего вида.

Матрица \hat{B} - называется матрицей коэффициентов. Зависимость между ее элементами определяет ее структуру и называется структурой матрицы коэффициентов.

В пьезоэлектрической среде связь между электрическими и механическими величинами, выражаемая с помощью уравнений (5) и (7), приводит к взаимодействию электромагнитных и упругих волн. Наличие электромагнитных волн, связанных с упругими волнами, приводит к возрастанию эффективных значений соответствующих модулей упругости, то есть к увеличению эквивалентной «жесткости» кристалла.

В пьезоэлектрическом кристалле благодаря указанной связи могут распространяться три упругие и две электромагнитные волны. По своим фазовым скоростям эти волны распадаются на два типа: одни из них имеют фазовые скорости, приблизительно равные скорости электромагнитных волн, другие- скорости упругих волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.П. Шаскольская. Кристаллография.-М.:Высшая школа, 1984-376с.
2. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред.-М.: Наука, 1982- 620с.
3. М.И. Рязанов. Электродинамика конденсированного вещества. М.: Наука, 1984-304с.
4. А.И. Ахиезер, И.А. Ахиезер. Электромагнетизм и Электромагнитные волны. М.: Наука, 1985.
5. С.К. Тлеукенов, К.А. Орынбасаров, А.Т. Оспан. О свойствах уравнений распространения электромагнитных волн в неоднородных анизотропных средах. // Труды Межд. Симпозиума, посвященного 100-летию со дня рождения К.И. Сатпаева. Ч.3 Алматы, 1999-с.130-133.
6. С.К. Тлеукенов, К.А. Орынбасаров, А.Т. Оспан. Распространение электромагнитных волн в неоднородных анизотропных диэлектриках ромбической сингонии. //Поиск.-1999,№6.
7. Тлеукенов С.К., Сагайдак Т.В. «Структура фундаментальных решений полной системы уравнений Максвелла и уравнений движения электроупругой

волны» Материалы науч. конф. молодых ученых, студентов, школьников «III Сатпаевские чтения». Павлодар, 2003, Т.7, С. 158-163.

8. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. Пер. с франц. / Под. ред. В.В. Леманова.-М.: Наука. глав. редакция физ.-мат. лит.-ры, 1982.

9. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986.

Түйіндеме

Берілген мақалада және аналитикалық әдісі негізінде 422 классты тетрагональдық сингониялы пьезокристалдардағы серпінді электрлік толқындардың таралу заңдылықтары зерттелген. Максвел және қозғалыс теңдеулерінің толық жүйелері шешілген және анықталған, матрица коэффициенттерінің құрылымы құрастырылған.

Resume

In the given article and on the basis of an analytical method of a matriciant are studied of regularity of distribution of elastic waves in piezo-crystals tetragonal singony of the class 422. Is obtained and the complete set of Maxwell equations and equations of motion is resolved, the frame of matrixes of factors is constructed.

УДК 534.2:537.2

СТРУКТУРА МАТРИЦАНТА В СЛУЧАЕ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД ТЕТРАГОНАЛЬНОЙ СИНГОНИИ КЛАССА 422

Ш.С. Зейтова

*Павлодарский государственный университет
им. С. Торайгырова*

Система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B}\vec{u}; \vec{u} = (U_z, \sigma_{zz}, U_x, \sigma_{xz}, E_y, H_x, U_y, \sigma_{yz}, H_y, E_x) \quad (1)$$

где $\hat{B} = \|b_{ij}(z)\|_1^n$ - непрерывная матричная функция в некотором интервале (z_1, z_2) изменения аргумента z , имеет нормированное решение, обращающееся в единичную матрицу при $z=z_0$. Нормированное решение уравнения (2.1.1) называется матрицантом. Любое другое решение, имеющее смысл матрицы фундаментальных решений имеет вид:

$$\hat{X} = \hat{T}(z_0, z) \hat{C} \quad (2)$$

где $\hat{T}(z_0, z)$ - матрицант, \hat{N} - произвольная постоянная матрица. Поскольку

$$\vec{u} = \hat{T} \vec{u}_0 \quad (3)$$

\vec{u}_0 - вектор-столбец, определяемый начальными условиями при $z=z_0$, то

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \frac{d\hat{T}}{dz} \vec{u}_0 = \hat{B} \hat{T} \vec{u}_0 \quad (4)$$

Следовательно, матрицант также удовлетворяет уравнению (1) в виду произвольности вектора \vec{u}_0 :

$$\frac{d\hat{T}}{dz} = \hat{B} \hat{T} \quad (5)$$

Нормированное решение уравнения (1) может быть построено методом последовательных приближений, исходя из рекуррентных соотношений:

$$\frac{d\hat{T}_k}{dz} = \hat{B} \hat{T}_{k-1} \quad (6)$$

Полагая $\hat{T}_k(z_0) = \hat{E} (k = 0, 1, 2, \dots)$ для \hat{T}_k получим:

$$\hat{T}_k = \hat{E} + \int_{z_0}^z \hat{B}(z_1) \hat{T}_{k-1}(z_1) dz_1 \quad (7)$$

Таким образом

$$T_0 = E, \quad T_1 = E + \int_{z_0}^z B(z_1) dz_1 \quad (8)$$

$$T_2 = E + \int_{z_0}^z B(z_1)dz_1 + \int_{z_0}^z \int_{z_0}^{z_1} B(z_1)B(z_2)dz_1dz_2 + \dots$$

Из (8) следует представление \dot{O} в форме бесконечного матричного ряда:

$$T = E + \int_{z_0}^z B(z_1)dz_1 + \int_{z_0}^z \int_{z_0}^{z_1} B(z_1)B(z_2)dz_1dz_2 + \dots \quad (9)$$

Для матрицанта справедливы формулы:

$$1. T(z_0, z) = T(z_1, z)T(z_0, z_1) \quad (10)$$

$$2. \ln|T(z_0, z)| = \int_{z_0}^z \text{sp } B(z_1)dz_1 \quad (11)$$

$$3. \text{Если } B=B_0 \text{ - постоянная матрица, то } T_0 = \exp[B_0(z - z_0)] \quad (12)$$

$$4. \frac{dT^{-1}}{dz} = -T^{-1}B \quad (13)$$

Дифференциальная формула (13) следует из определения мультипликативного интеграла:

$$\int_{z_0}^z (E + Bdz) = \lim_{n \rightarrow \infty} [E + B(z_n)\Delta z_n [E + B(z_{n-1})\Delta z_{n-1}] \dots [E + B(z_1)\Delta z_1]$$

и введения мультипликативной производной:

$$D_z T = \frac{dT}{dz} T^{-1}$$

Операции D_z и $\int_{z_0}^z$ взаимно обратные. Из четвертого свойства матрицанта следует представление в форме бесконечного матричного ряда для обратного матрицанта. Полагая, как и при получении (9):

$$T_0^{-1} = E, \quad T_k^{-1} = E - \int_{z_0}^z T_{k-1}(z_1)B(z_1)dz_1$$

имеем:

$$T_1^{-1} = E - \int_{z_0}^z B(z_1) dz_1$$

$$T_2^{-1} = E - \int_{z_0}^z B(z_1) dz_1 + \int_{z_0}^z \int_{z_0}^{z_1} B(z_2) B(z_1) dz_1 dz_2$$

откуда следует искомое представление T^{-1} :

$$T^{-1} = E - \int_{z_0}^z B(z_1) dz_1 + \int_{z_0}^z \int_{z_0}^{z_1} B(z_2) B(z_1) dz_1 dz_2 + \dots \quad (14)$$

Бесконечный матричный ряд (14) также абсолютно и равномерно сходится на любом интервале.

При этом справедливо соотношение:

$$TT^{-1} = T^{-1}T = E \quad (15)$$

Матричные ряды (9) и (14) есть сумма матриц:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_{(n)}, \quad T^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T_{(n)}^{-1}$$

Индекс (n) совпадает с числом перемножаемых под знаками интеграла матриц $B(z_i)$.

Построение структуры матрицанта, в данном случае, есть установление зависимости между элементами прямой и обратной матриц T и T^{-1} .

Структура матрицанта полной системы уравнений Максвелла и уравнений движения электроупругой волны в пьезокристалле тетрагональной

сингонии 422 строится на основе поэлементного сравнения матриц $\dot{O}_{(n)}$ и

$T_{(n)}^{-1}$ каждого из слагаемых рядов (9) и (14), исходя из структуры матрицы коэффициентов в случае при одномерном распространении электроупругих волн в пьезокристалле тетрагональной сингонии класса 422 структура прямого и обратного матрицанта имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{38} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{44} & 0 & 0 & t_{47} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55} & 0 & 0 & 0 & t_{59} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{66} & 0 & 0 & 0 & t_{610} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{74} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{83} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{88} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{99} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{1010} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{48} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{65} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{84} & 0 & 0 & 0 & t_{87} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{96} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{105} & 0 & 0 & 0 & t_{109} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{34}}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{33} & 0 & 0 & -\frac{t_{83}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{66} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{106}}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{55}}{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & \omega t_{38} & 0 & 0 & t_{88} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega t_{47} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{610} & 0 & 0 & 0 & t_{1010} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{59} & 0 & 0 & 0 & t_{99} \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} t_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{34} & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{84}}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{31}}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{56} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{96}}{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{65} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{105}}{\omega} \\ 0 & 0 & \omega t_{48} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega t_{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{510} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{69} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{109} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Структуру, аналогичную (16-17) имеют среды:

- кубической сингонии, вдоль координатной оси z
- гексагональной сингонии класса 622, вдоль координатной оси z
- ромбической сингонии класса 222, вдоль координатной оси z

При анизотропии тетрагональной сингонии класса 422 структура матрицанта уравнений распространения электроупругих волн в плоскости (xz) ($\omega=0$) определяется матрицей коэффициентов

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega b_{35} & b_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{34} & 0 & -b_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{87} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\omega b_{35} & 0 & b_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{109} & 0 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \end{pmatrix} \quad (18)$$

Для матриц \hat{B} вида (18) структура прямого и обратного матрицанта имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & t_{14} & 0 & 0 & t_{17} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & t_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{32} & t_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{38} & 0 & 0 \\ t_{41} & 0 & 0 & t_{44} & 0 & 0 & t_{47} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55} & 0 & 0 & 0 & t_{59} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{66} & 0 & 0 & 0 & t_{610} \\ 0 & 0 & 0 & t_{74} & 0 & 0 & t_{77} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{82} & t_{83} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{88} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{95} & 0 & 0 & 0 & t_{99} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{106} & 0 & 0 & 0 & t_{1010} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & 0 & 0 & t_{24} & 0 & 0 & t_{27} & 0 & 0 & 0 \\ t_{31} & 0 & 0 & t_{34} & 0 & 0 & t_{37} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{42} & t_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{48} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{56} & 0 & 0 & 0 & t_{510} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{65} & 0 & 0 & 0 & t_{69} & 0 \\ 0 & t_{72} & t_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{78} & 0 & 0 \\ t_{81} & 0 & 0 & t_{84} & 0 & 0 & t_{87} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{96} & 0 & 0 & 0 & t_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{105} & 0 & 0 & 0 & t_{109} & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & 0 & 0 & t_{32} & 0 & 0 & \frac{t_{52}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{11} & t_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{14} & t_{44} & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{74}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ t_{23} & 0 & 0 & t_{33} & 0 & 0 & \frac{t_{53}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{66} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{106}}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{95}}{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & \omega t_{38} & 0 & 0 & t_{88} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega t_{17} & \omega t_{47} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{610} & 0 & 0 & 0 & t_{1010} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{59} & 0 & 0 & 0 & t_{99} \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{22}}{\omega} & 0 & 0 \\ t_{21} & 0 & 0 & t_{51} & 0 & 0 & \frac{t_{51}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ t_{24} & 0 & 0 & t_{34} & 0 & 0 & \frac{t_{84}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{13} & t_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{21}}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{56} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{66}}{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{105}}{\omega} & 0 \\ 0 & \omega t_{18} & \omega t_{48} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{78} & 0 \\ \omega t_{27} & 0 & 0 & \omega t_{37} & 0 & 0 & 0 & t_{87} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{510} & 0 & 0 & 0 & t_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{69} & 0 & 0 & 0 & t_{109} & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Структуру, аналогичную (19-20) имеют среды:

– гексагональной сингонии класса 622, вдоль координатной плоскости xz

Структура матрицанта есть зависимость между элементами прямого и обратного матрицанта в форме (20), а также зависимость между элементами T и T⁻¹, следующие из тождества:

$$TT^{-1} = T^{-1}T = E \quad (21)$$

Структура матрицанта отражает фундаментальные свойства и внутреннюю структуру решений уравнений Максвелла и уравнений движения электроупругих волн для неоднородных диэлектрических сред. Главная особенность структуры (20) и соотношений, вытекающих из тождества (21), - в их инвариантности относительно конкретного вида неоднородности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред.-М.: Наука, 1982- 620с.
2. Бриллюэн Л., Н. Пароди. Распространение волн в периодических структурах. М.:И.А., 1959-452с.
3. Глеуков С.К., Орынбасаров К.А., Оспан А.Т. Распространение электромагнитных волн в неоднородных анизотропных средах тетрагональной и гексагональной сингоний. // Материалы Межд. Конференции.- Караганда.1999.

4. А.Т. Оспан. Построение матрицанта уравнений распространения электромагнитных волн в периодически неоднородной среде.// Материалы Межд. Конференции.-Караганда.1999.

5. Тлеукунов С.К., Сагайдак Т.В. «Уравнения Максвелла и системы уравнений первого порядка для диэлектрических сред тригональной и ромбической сингоний» Материалы науч. конф. молодых ученых, студентов, школьников «II Сатпаевские чтения». Павлодар, 2002, Т.2, С. 110 –114.

6. Тлеукунов С.К. Построение структуры матрицанта уравнений движения изотропных и анизотропных упругих сред: автореферат дис.д.ф. – м.н. Алматы, 1995.

7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука,1988.

8. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986.

9. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. – Новосибирск: Наука, 1982.

Түйіндеме

Берілген мақалада тізбектей жуықтаулар әдісі арқылы Максвелл және анизотропты ортада 422 класты тетрагональды сингониялы анизотропты ортада Z өсі мен XZ жазықтығы бойымен толқынның таралуы үшін болған жағдайдағы қозғалыстың теңдеулерінің толық жүйесінің матрицантының құрылымы құрастырыған.

Resume

In the given article an approximation method the frame of a matrixicant of a complete set of Maxwell equations and equations of motions is constructed in case of an anisotropic medium tetragonal singony of the class 422 at a wave propagation lengthwise axis Z and plane XZ.

ОТНОШЕНИЕ ИНДЕКСНОЙ СРАВНИМОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ГРУППЫ

И. И. Павлюк, Л.И. Теняева,

Павлодарский государственный университет

им. С. Торайгырова,

И.И. Ляшенко

Инновационный Евразийский университет, г. Павлодар

Изучены основные свойства отношения индексной сравнимости элементов группы, модулятора элемента в группе, ядра класса индексно эквивалентных элементов группы. Получены следующие теоремы: Минимальная не FC – группа с конечными классами индексно-эквивалентных элементов являются периодической группой; Пересечение индексных ядер элементов группы G равно ее FC – центру; Модулятор нейтрального элемента группы G совпадает с FC – центром группы G ; Пусть $M(a)$ – модулятор элемента a группы G .

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ [1]. Подгруппа A группы G индексно сравнима ($A \equiv_i B$) в группе G с подгруппой B из G , если индекс $|B : B \cap A| < \infty$ (конечен), т.е.

$$(\forall A, B < G)((A \equiv_i B) \stackrel{def}{\Leftrightarrow} (|B : B \cap A| < \infty)) \quad (1)$$

Очевидно, произвольная группа G индексно сравнима с любой своей подгруппой, т.е. в группе G для любой ее подгруппы A верна формула $(\forall A \leq G)(G \equiv_i A)$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (А.Пуанкаре [2]). Подгруппы A и B группы G соизмеримы (индексно эквивалентны « \equiv_i » [1]) в группе G тогда и только тогда, когда $(A \equiv_i B)$ и $(B \equiv_i A)$, т.е. когда в группе G справедлива формула

$$(A \equiv_i B) \stackrel{def}{\Leftrightarrow} ((A \equiv_i B) \& (B \equiv_i A)). \quad (2)$$

3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $A < G$ и $A \equiv_i G$. Тогда $G_i \equiv A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $A < G$, то $G \cap A = A$ и $(G \cap A)_i \equiv A$. Отсюда $G_i \equiv A$. А поскольку $A_i \equiv G$, то $G_i \equiv A$.

Предложение доказано.

4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Отношение « \equiv », заданное на подгруппах группы G транзитивно, т.е. если $K \equiv H$ и $H \equiv G$, то $K \equiv G$, где $K, H < G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r = |G : H|$, а $|H : K| = s$, очевидно $(H \Leftrightarrow Hx)$ мощность множества элементов в каждом из r смежных классов G по H равномощно подгруппе H . Далее, так как $K_0 = (K \cap H) \equiv H$, а $H \equiv G$, то разложения $G = H \cup Hx_2 \cup \dots \cup Hx_r$, $H = K_0 \cup K_0y_2 \cup \dots \cup K_0y_s$ состоят из конечного множества смежных классов по H и по K_0 соответственно. Пусть $g \in G$. Очевидно, $g = hx_j$, где $h \in H$ и g имеет однозначное представление. Аналогично, $h = ky_i$, где $k \in K_0$, $j = 1, \dots, r$, $i = 1, \dots, s$. Поэтому $K_0y_ix_j$ - смежные классы группы G по подгруппе K_0 . Для того, чтобы два таких смежных класса совпали, они должны принадлежать одному и тому же смежному классу по Hx_j и поэтому им должен соответствовать один и тот же представитель x_j . Умножая $K_0y_ix_j$ на x_j^{-1} справа, мы видим, что для них должны также соответствовать и представители y_i . Таким образом, смежные классы G по K_0 задаются комплексами $K_0y_ix_j$, причем, эти выражения представляют различные смежные классы G по K_0 . Отсюда следует, что

$$|G : K_0| = |G : H| \cdot |H : K_0|, \quad (3)$$

а так как $K_0 < K$, то вместе с тем установлена справедливость формулы

$$((K \dots H) \& (H \dots G)) \Leftrightarrow (K \dots G). \quad (4)$$

Предложение доказано.

5. СЛЕДСТВИЕ. Если $A < B < C$ и $A \equiv G$, то $B \equiv G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $|G : A| < \infty$, $A < B < G$, то $|B : A| \leq |G : A|$. Отсюда следует, что $B \equiv A \equiv G$. Далее из формулы (3) имеем $B \equiv G$, поскольку $|G : A|$ и $|B : A|$ конечны.

Следствие доказано.

6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $A, B < G$ и $A \equiv G$, то $B \equiv (B \cap A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно так как $|B : B \cap A| \leq |G : A| < \infty$.

7. СЛЕДСТВИЕ. Если $A, B < G$ и $A \equiv G$, то $G \equiv A$ и $A \equiv B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из формулы (4) и Предложения 6.

8. ЛЕММА. Если $A, B < G$ и $A \equiv G$, $B \equiv G$, то $D = A \cap B \equiv G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $A \equiv B$, а $B \equiv A$ (Следствие 7), то $A \equiv B$. Очевидно, $D \equiv A \equiv G$. По формуле (4) $D \equiv G$.

Лемма доказана.

9. ТЕОРЕМА. (А.Пуанкаре [3]). Если $A, B < G$ и $|G : A| < \infty, |G : B| < \infty$, то $|G : A \cap B| < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, очевидно, вытекает из Леммы 8.

10. СЛЕДСТВИЕ. Пересечение конечного множества подгрупп конечного индекса группы имеет конечный индекс в ней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко получить, используя Теорему 9, так как это следствие достаточно доказать для двух подгрупп.

11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элемент b индексно сравним с элементом a в группе G ($b \equiv_i a$), если индекс $|C(a) : C(a) \cap C(b)| < \infty$ (конечен), т.е. в группе G верна формула

$$(\forall a, b \in G) \left(b \equiv_i a \stackrel{def}{\Leftrightarrow} (C(b) \equiv_i C(a)) \right). \quad (5)$$

12. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Бинарное отношение « \equiv_i » индексной сравнимости на элементах группы G является рефлексивным и транзитивным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in G$. Тогда, очевидно, $a \equiv_i a$ (формула (1)). Пусть теперь $a, b, c \in G$ и $a \equiv_i b, b \equiv_i c$. Докажем, что $a \equiv_i c$. Действительно, соотношения $|C(b) : C(b) \cap C(a)| < \infty, |C(c) : C(c) \cap C(b)| < \infty$, верны по условию. Поскольку $C(a)$ содержит подгруппу $C(b) \cap C(a) = Q$, которая имеет конечный индекс в $C(b)$, а $C(b)$ содержит подгруппу $C(c) \cap C(b) = D$ такую, что $|C(c) : D| < \infty$, то из $D \leq C(b)$ следует, что $|D : Q \cap D| < \infty$. Так как $A = Q \cap D$ имеет конечный индекс D , то из соотношений $|C(c) : D| < \infty$ и $|D : A| < \infty$ следует, что $|C(c) : A| < \infty$ (формула 3). Отсюда следует, что $a \equiv_i c$.

Предложение доказано.

13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ [1]. Модулятором элемента a группы G в G назовем множество $M_G(a)$ элементов группы G такое, что $(\forall x \in M_G(a))(x \equiv_i a)$, т.е. по определению верно равенство

$$M_G(a) \stackrel{def}{=} \{x / x \equiv_i a\}. \quad (6)$$

14. ЛЕММА. $M(a)$ – подгруппа группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно $e \equiv_i a$ и $e \in M_G(a)$. Пусть $x, y \in M_G(a)$. Тогда $|C(a) : C(a) \cap C(x)| < \infty$ и $|C(a) : C(a) \cap C(y)| < \infty$. Так как $C(x) = C(x^{-1})$, то $(\forall x \in M_G(a))(x^{-1} \in M_G(a))$. Далее,

из $x^z = x$ и $y^z = y$, где $z \in G$, следует, что $(xy)^z = xy$. Отсюда $C(x) \cap C(y) \leq C(xy)$. Так как $|C(a): C(x) \cap C(y)| < \infty$ (Теорема 9), то отсюда следует, что $|C(a): C(a) \cap C(xy)| < \infty$. Таким образом, $(\forall x, y \in M_G(a)) (\forall xy \in M(a))$.

Лемма доказана.

Используя Предложение 12, дадим следующее определение.

15. ОПРЕДЕЛЕНИЕ [1]. Элементы a и b группы G индексно эквивалентны в $(a \equiv b)$, если $|C(a): C(a) \cap C(b)| < \infty$ и $|C(b): C(a) \cap C(b)| < \infty$, т.е.

$$(\forall a, b \in G) \left((a \equiv b) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (C(a) \equiv C(b)) \right). \quad (7)$$

Очевидно, (формула (7) и Предложение 12) бинарное отношение « \equiv » является отношением эквивалентности.

16. ЛЕММА.

$$(\forall a, b \in G) ((a \equiv b) \Leftrightarrow (M_G(a) = M_G(b))). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Если $a \equiv b$, то $a \equiv b$ и $b \equiv a$. Отсюда, очевидно, следует, что $(\forall x \in M(a)) (x \equiv a \equiv b)$. Из транзитивности отношения « \equiv » следует, что $x \in M(b)$ и $M(a) \leq M(b)$. Аналогично устанавливается, что $M(b) \leq M(a)$. Теперь $M(a) = M(b)$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $M(a) = M(b)$. Очевидно, $a \in M(b)$ и $a \equiv b$. Но $b \in M(a)$ и $b \equiv a$. Из сравнений $b \equiv a$, $a \equiv b$, следует, что $a \equiv b$.

Лемма доказана.

17. ЛЕММА. Если $a \equiv b$ и $b \equiv a$, то $b \equiv a$ и $b \equiv a$, где a, b - элементы группы G , т.е. $(\forall a, b \in G) ((a \equiv b) \& (b \equiv a)) \Rightarrow (b \equiv a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $a \equiv b$, то $C(a) \cap C(b) = Q$ имеет конечный индекс в $C(a)$. Поскольку $b \equiv a$, то в G существует элемент x такой, что $a^x = b$. Так как $C(a^x) = (C(a))^x = C(b)$ (Следствие 4.1.11) и имеет место изоморфизм $C(a) \cong (C(a))^x = C(b)$, то подгруппа $Q \leq (C(a))^x$ имеет конечный индекс в $C(a)$. Отсюда, очевидно, из сравнений $a \equiv b$ и $a^x = b \equiv a$ имеем сравнение $b \equiv a$.

Лемма доказана.

18. СЛЕДСТВИЕ. В группе G имеет место формула

$$(\forall a, x \in G) ((a \equiv a^x) \vee (a^x \equiv a)) \Rightarrow (a \equiv a^x). \quad (9)$$

где символ \vee - дизъюнкция («или»).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из Леммы 17.

19. ТЕОРЕМА. В группе G имеет место высказывательная форма

$$(\forall g \in G)((a \equiv_i b) \Leftrightarrow (a^g \equiv_i b^g)). \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $a \equiv_i b$. Тогда $|C(b) : Q| < \infty$, где $Q = C(a) \cap C(b)$. Очевидно $(\forall g \in G)(Q^g \leq (C(b))^g)$. Так как имеет место изоморфизм $C(b) \cong (C(b))^g$ и $|(C(b))^g : Q^g| < \infty$, то $(\forall g \in G)(Q^g \leq (C(a))^g \cap (C(b))^g)$. Отсюда следует, что $(\forall g \in G)(|(C(b))^g : (C(b))^g \cap (C(a))^g| < \infty)$. Поскольку $(\forall g \in G)((C(b))^g = C(b^g))$, то $(\forall g \in G)(a^g \equiv_i b^g)$. Таким образом, $(\forall g \in G)((a \equiv_i b) \Rightarrow (a^g \equiv_i b^g))$.

Достаточность. Пусть теперь $(\forall g \in G)(a^g \equiv_i b^g)$. Отсюда и из установленного $(\forall g \in G)((a \equiv_i b) \Rightarrow (a^g \equiv_i b^g))$ имеем $(\forall g \in G)((a^g \equiv_i b^g) \Rightarrow ((a^g)^{g^{-1}} \equiv_i (b^g)^{g^{-1}}))$ и $(\forall g \in G)((a^g \equiv_i b^g) \Rightarrow (a \equiv_i b))$.

Лемма доказана.

20. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. В группе G верна формула

$$(\forall a, b, c \in G)((b \equiv_i a) \& (c \equiv_i a) \Rightarrow ((bc \equiv_i a) \& (cb \equiv_i a))). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b \equiv_i a$ и $c \equiv_i a$. Тогда $|C(a) : C(a) \cap C(b)| < \infty$ и $|C(a) : C(a) \cap C(c)| < \infty$. Так как $|C(a) : C(a) \cap C(b) \cap C(c)| < \infty$ (Теорема 9), и $C(b) \cap C(a) \cap C(c) \leq C(bc)$, $C(b) \cap C(a) \cap C(c) \leq C(cb)$, то $C(bc) \equiv_i C(a)$, $C(cb) \equiv_i C(a)$. Отсюда $bc \equiv_i a$, $cb \equiv_i a$.

Предложение доказано.

21. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. В группе G верна формула

$$(\forall a, b \in G)((a \equiv_i b) \Leftrightarrow (|\{a^{C_G(b)}\}| < \infty)). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $a \equiv_i b$. Поскольку $|a^G| = |G : G \cap C_G(a)| = |G : C_G(a)|$ [2] и по условию предложения $|C_G(b) : C_G(b) \cap C_G(a)| < \infty$, то $|C_G(b) : C_{C(b)}(a)| = |\{a^{C_G(b)}\}|$ и $|\{a^{C_G(b)}\}| < \infty$.

Достаточность. Пусть $|\{a^{C_G(b)}\}| < \infty$, т.е. множество элементов из $C_G(b)$

конечно или $|C_G(b) : C_G(b) \cap C_G(a)| < \infty$. В любом случае, $a \equiv b$.

Предложение доказано.

22. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть G – группа. $M(a)$ – модулятор элемента a в группе G . Тогда

$$(\forall g \in G)((M(a))^g = M(a^g)). \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $M(a) = \{x / x \equiv a\}$, а $M(a^g) = \{y / y \equiv a^g\}$, то из сравнения $y \equiv a^g$ следует, что $y^{g^{-1}} \equiv a$ (Лемма 19). Таким образом, $y^{g^{-1}} \in M(a)$. Отсюда следует, что $y^{-g} \in \{x\}$ и $y \in \{x\}^g$. Отсюда следует, что $M(a^g) \leq (M(a))^g$. Далее, очевидно, $(M(a))^g = \{x^g / x^g \equiv a^g\}$, поскольку из $x \equiv a$ следует, что $x^g \equiv a^g$ (Лемма 19) и $\{x^g\} \subseteq \{y\}$. Отсюда следует, что $(M(a))^g \leq M(a^g)$. Таким образом, $(\forall a \in G)(\forall g \in G)((M(a))^g = M(a^g))$.

Теорема доказана.

23. ТЕОРЕМА. В группе G верна формула

$$(\forall g \in G)(\forall a, b \in G)((a \equiv b) \Leftrightarrow (a^g \equiv b^g)). \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $a \equiv b$. Тогда $M(a) = M(b)$ (Лемма 16). Очевидно, $(\forall g \in G)((M(a))^g = (M(b))^g)$ (Предложение 22). Отсюда в силу Теоремы 22 $(\forall g \in G)(M(a^g) = M(b^g))$ и вновь по Лемме 16 имеем, что $a^g \equiv b^g$.

Достаточность. Пусть теперь $(\forall g \in G)(a^g \equiv b^g)$. Тогда $M(a^g) = M(b^g)$ и $(M(a))^g = (M(b))^g$. Отсюда следует, что $M(a) = M(b)$ и $a \equiv b$.

Теорема доказана.

24. СЛЕДСТВИЕ. Индексная сравнимость (эквивалентность) инвариантна относительно действия внутренних автоморфизмов группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из Теоремы 23.

25. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $FC(G)$ элементов группы G такое, что $(\forall x \in FC(G))(G \equiv C(x))$, назовем FC -центром группы G .

26. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. FC – инвариантная подгруппа группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $e \in FC(G)$. Пусть $x, y \in FC(G)$. Так как $(C(x))^{-1} = C(x^{-1}) = C(x)$, то $x^{-1} \in FC(G)$. Поскольку $Q = C(x) \cap C(y) \leq C(xy)$, а $|G : Q| < \infty$, то $|G : C(xy)| < \infty$. Отсюда следует, что $(\forall x, y \in FC(G))(xy \in FC(G))$. Таким образом,

$FC(G)$ – подгруппа группы G . Пусть x^g – элемент сопряженный с элементом $x \in FC(G)$. Известно, что $C(x^g) = (C(x))^g$ (4.1.11). Так как, $|G : C(x)| < \infty$ и $|G^g : (C(x))^g| < \infty$, то $|G : C(x^g)| < \infty$. Отсюда следует, что $(\forall x \in FC(G))(\forall g \in G)(x^g \in FC(G))$.

Предложение доказано.

27. ЛЕММА. Модулятор $M_G(e)$ нейтрального элемента группы G в G совпадает с FC -центром $FC(G)$ группы G , т.е.

$$M_G(e) = FC(G). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a_{i \equiv}$ – класс индексно эквивалентных элементов группы G такой, что $e \in a$. Так как $a_{i \equiv} e$, и $|G : C(a)| < \infty$, а $(\forall g \in G)(C(g) \leq G)$ то $|C(g) : C(g) \cap C(a)| < \infty$ (Предложение б). Отсюда следует, что $\forall x \in G$ такого что $|C(a) : C(a) \cap C(x)| < \infty$ $x \in M(g)$. Таким образом, $(\forall g \in G)(M(a) \leq M(g))$. Так как $M(a)$ -подгруппа группы G (Лемма 14), то $(\forall a \in a_{i \equiv})(a \in M(a))$. Отсюда следует, что $a_{i \equiv} \subset M(a) \leq M(g)$ и

$$a_{i \equiv} \subset \bigcap_{g \in G} M(g) = K. \quad (16)$$

Далее, пусть $g \in K$. Так как $g_{i \equiv} g$ – произвольный элемент из K , то $K \leq M(e)$. Поскольку $e \in a$ и $M(e) = M(a)$ (Лемма 16), $(\forall a \in a_{i \equiv})(\forall y \in M(a) = M(e))(e_{i \equiv} y \& y \in a_{i \equiv})$. Таким образом, $K \subset a_{i \equiv}$. Из последнего соотношения и формулы (16) следует, что $K = a_{i \equiv}$. Этим установлено, что $a_{i \equiv}$ – подгруппа группы G . Так как $(\forall g \in G)(M(e) \leq M(g))$, то $\bigcap_{g \in G} M(g) = M(e)$. Поскольку $a_{i \equiv} \subset M(e)$, то $(\forall a \in a_{i \equiv})(|G : C(a)| < \infty)$. Отсюда следует, что $(\forall g \in G)(a^g \in M(e) = a_{i \equiv})$. Таким образом, $a_{i \equiv} = M(e) = FC(G)$.

28. СЛЕДСТВИЕ. В группе G $(\forall g \in G)(\bigcap_{g \in G} M(g) = FC(G))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По Лемме 27 $M(e) = FC(G)$. Так как $(\forall x \in M(e))(x_{i \equiv} e)$, то $(\forall g \in G)(x_{i \equiv} g)$ и $x \in M(g)$. Отсюда следует,

что $M(e) < M(g)$. С другой стороны, $x \in FC(G)$. Таким образом,

$$FC(G) = \bigcap_{g \in G} M(g). \quad (17)$$

Следствие доказано.

29. ТЕОРЕМА. Группа G тогда и только тогда является FC -группой, когда $(\forall a \in G) \left(M(a) \subseteq a \right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть G – FC -группа. Тогда

$$(\forall a \in G) (|G : C(a)| < \infty) \text{ и } a \equiv e$$

Отсюда следует, что $G = FC(G) = M(e) = a$ (Лемма 27). Теперь, очевидно, что $(\forall a \in G) \left(M(a) \subseteq a \right)$.

Достаточность. Пусть теперь $(\forall a \in G) \left(M(a) \subseteq a \right)$.

Так как $M(a)$ – подгруппа группы G (Лемма 14), то $e \in a$ и $a = FC(G)$ (Лемма 27). Поскольку элемент a произвольный из группы G , то $G \leq FC(G)$. Но $FC(G) \leq G$. Таким образом, $G = FC(G)$.

Теорема доказана.

30. ЛЕММА. Группа G тогда и только тогда является FC -группой, когда в ней все неединичные элементы индексно-эквивалентны и она обладает FC -подгруппой конечного индекса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть G – FC -группа.

Тогда $(\forall g \in G) (|G : C(g)| < \infty)$ и, если $a \in G \setminus e$, то $|G : C(a)| < \infty, |C(a) : C(a) \cap C(g)| < \infty$ и $|C(g) : C(g) \cap C(a)| < \infty$. Отсюда следует, что $(\forall g, a \in G \setminus e) (a \equiv g)$ и, очевидно, G обладает подгруппой конечного индекса.

Достаточность. Пусть $F < G$ и $|G : F| < \infty$. Так как в группе G все неединичные элементы индексно эквивалентны, то $(\forall x \in F) (\forall g \in G \setminus F) (x \equiv g)$. Поскольку $x \in F$, а F – FC -группа, то $|F : F \cap C(x)| < \infty$. Отсюда следует, что $|G : C(x)| < \infty$ и $(\forall x \in F) (x \equiv e)$. Таким образом, $F \leq FC(G)$. Поскольку $|G : F| < \infty$, а $F \leq FC(G)$, то $|G : FC(G)| < \infty$. Пусть элемент $g \in G \setminus FC(G)$. По условию $g \equiv x$, а $|G : C(x)| < \infty$

Отсюда следует, что $|G : C(g)| < \infty$. Далее, так как

$(\forall g, x \in G)(gx \equiv x)$, а $C(g) \cap C(x) \leq C(gx)$ (4.1.21), то нетрудно видеть, что $|G : C(gx)| < \infty$. Отсюда следует, что G -FC-группа.

Лемма доказана.

31. ЛЕММА. Элементы смежного класса группы G по ее FC – центру $FC(G)$ индексно эквивалентны, т.е.

$$(\forall a, b \in G)((aFC(G) = bFC(G)) \Rightarrow (a \equiv b)). \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a, b \in xF$, где $F = FC(G)$. Тогда $a = xh_1, b = xh_2$ для подходящих $h_1, h_2 \in F$. Легко видеть, что $a^{-1}b = h_1^{-1}x^{-1}xh_2 = h_1^{-1}h_2 \in F$. Так как $F = FC(G) = \bigcap M(g)$ (Формула 17), то $a^{-1}b \in M(b)$. Поскольку $b \in M(b)$ и $M(b)$ – подгруппа (Лемма 14) группа G , то $a \in M(b)$ и $a \equiv b$. Аналогично $a^{-1}b \in M(a), b \in M(a)$ и $b \equiv a$. Из сравнений $a \equiv b, b \equiv a$ следует, что $a \equiv b$.

Теорема доказана.

32. ТЕОРЕМА. В группе G один класс индексно эквивалентных элементов тогда и только тогда, когда $G = FC(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть в группе $G(\forall a \in G)(a \equiv a)$. Отсюда $e \in a$ и $a(e) = FC(G)$ (Лемма 27). Таким образом, $e = a \subset M(e)$ и $G \leq M(e)$: Отсюда $G = FC(G)$.

Достаточность. Пусть $G = FC(G)$. Тогда $(\forall a, b \in G)((G : C(a)) < \infty$ и $C(b) \equiv C(a)$. Отсюда $a \equiv b$ и в группе G один класс индексно эквивалентных элементов.

Теорема доказана.

33. ЛЕММА. Если в группе G элементы a, b принадлежат одному смешанному классу группы G по FC – центру $FC(G)$, то модуляторы этих элементов равны, т.е.

$$(\forall a, b \in G)((b, a \in FC(G)) \Rightarrow (M(a) = M(b))). \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По Лемме 31 элементы $a, b \in aFC(G)$ индексно – эквивалентны. По Лемме 16 $(\forall a, b \in aFC(G))(M(a) = M(b))$ так как $a \equiv b$.

Лемма доказана.

34. ТЕОРЕМА. В группе конечной над FC – центром конечное множество классов индексно – эквивалентных элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть элемент $a \in G \setminus FC(G)$. Тогда, очевидно, элементы каждого смешанного класса $aFC(G)$ индексно – эквивалентны (Теорема 31), а таких классов конечное множество.

Теорема доказана.

35. ЛЕММА. Класс индексно-элементарных элементов группы G , содержащей нейтральный элемент группы G совпадает с FC – центром $FC(G)$ группы G , т.е. $e \equiv FC(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a - класс индексно-элементарных элементов группы G такой, что $e \in a$. Так как $a \equiv e$, то $(\forall g \in G)(M(a) \leq M(g))$. Поскольку $M(a) \leq G$, то $(\forall a \in a)(a \in M(a))$. Отсюда следует, что $a \subset M(a) \leq M(g)$ и $a \subset \bigcap_{g \in G} M(g)$. Далее, пусть $x \in \bigcap_{g \in G} M(g)$. Так как g – произвольный элемент из G , то $\bigcap_{g \in G} M(g) \leq M(e)$. Поскольку $e \in a$ (по условию) и $(\forall a \in a)(M(e) = M(a))$ (Лемма 16), то $x \in M(a) = M(e)$ и $a \equiv e \equiv x$, $x \in a$. Таким образом, $\bigcap_{g \in G} M(g) \subset a$. Отсюда имеем $a = \bigcap_{g \in G} M(g)$. Этим установлено, что a - подгруппа G . Так как $(g \in G)(M(e) \leq M(g))$, то $\bigcap_{g \in G} M(g) = M(e)$.

Так как $M(e) \equiv FC(G)$ (Лемма 27), $FC(G) = \bigcap_{g \in G} M(g) = a$, то $a = FC(G)$.

Лемма доказана.

36. ЛЕММА. В не- FC – группе с собственными FC – подгруппами нецентральные перестановочные элементы индексно – эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x, y \in G \setminus Z(G)$ и $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = e$. Так как $x, y \notin Z(G)$, то $C(x) < G, C(y) < G$, а поскольку $xy = yx$, то $x \in C(y)$, а $y \in C(x)$. Поскольку $C(x), C(y)$ - FC – подгруппы G , то $|C(x) : C(x) \cap C(y)| < \infty$ и $|C(y) : C(y) \cap C(x)| < \infty$. Отсюда следует, что $y \equiv x$.

Лемма доказана.

37. ЛЕММА. Пусть G – минимальная не- FC – группа. Тогда

$$(\forall x \in G)(x \cup Z(G) = K \leq G). \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что K не подгруппа G . Предположим также, что $(\forall a \in G)(M(a) = G)$. Отсюда будет следовать, что $(\forall b \in G)(a \equiv b)$, т.е. в группе G один класс индексно эквивалентных элементов и $x = G$ (Лемма 11). Противоречие. Отсюда теперь следует, что $(\exists x \in G)(M(x) < G)$. Предположим, что $C(x)$ – конечная группа. Тогда $(\forall g \in G)(C(g) \equiv C(x))$ и $M(x) = G$. Противоречие. Таким образом,

$C(x)$ – бесконечная группа. Рассмотрим случай, когда $|C(x) : Z(G)| = \infty$. Очевидно $(\forall g \in G)(\forall z \in Z(G))(gz \equiv_i g)$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $x \notin Z(G)$ и показать, что если $y, c \in x$, то $yc \in Z(G)$ или $yc \in x$. Предположим, что $yc \notin Z(G)$. Так как $y \equiv_i x \equiv_i c$, то пересечение $C(x) \cap C(c) \cap C(y)$ есть подгруппа конечного индекса в $C(x)$. (Следствие 10). Следовательно, в $C(x)$ найдется нецентральный элемент t такой, что $t \in C(x) \cap C(c) \cap C(y) \equiv_i C(x)$. Поэтому $x \equiv_i yc$ (Лемма 36) и $yc \in x$. Пусть теперь $|C(x) : Z(G)| < \infty$. Тогда из бесконечности $C(x)$ и конечности индекса $|C(x) : Z(G)|$ следует, что $Z(G)$ бесконечная группа. Так как $x \notin Z(G)$, то $C(x)$ – собственная FC – группа. Отсюда, очевидно, $(\exists z \in Z(G))(z \equiv_i x)$ и $x \in Z(G)$. Противоречие.

Теорема доказана.

38. ЛЕММА. В не – FC – группе с собственными FC – подгруппами не – FC – центральные перестановочные элементы индексно- эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x, y \in G \setminus FC(G)$. Если $Z(G) = FC(G)$ то утверждение леммы следует из Леммы 36. Таким образом, $Z(G)$ – собственная подгруппа $FC(G)$. Так как $C(y), C(x)$, – FC – подгруппы G , то $|C(x) : C(x) \cap C(y)| < \infty$, $|C(y) : C(y) \cap C(x)| < \infty$ и $x \equiv_i y$

Лемма доказана.

39. ТЕОРЕМА. В минимальной не – FC – группе G имеет место формула

$$(\forall x \in G)(x \cup_i FC(G) = L \leq G). \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что L не есть подгруппа группы G . Далее, предположим, что $(\forall a \in G)(M(a) = G)$. Отсюда следует, что в группе G один класс индексно эквивалентных элементов и $G = FC(G)$ (Лемма 35) и L – группа. Противоречие. Отсюда следует, что $(\exists x \in G)(M(x) < G)$. Если предположить, что $C(x)$ – конечная группа, то $M(x) = G$. Противоречие. Таким образом, $C(x)$ – бесконечная группа. Рассмотрим случай когда $|C(x) : C(x) \cap FC(G)| = \infty$. Так как $Z(G) \leq FC(G)$, а L – не группа по предположению, то $Z(G) \neq FC(G)$ (Лемма 37). Таким образом, $Z(G)$ – собственная подгруппа $FC(G)$. Пусть $x, e \in x$ и $yc \notin FC(G)$. Тогда следует, что существует элемент $t \in C(x)$ такой, что $t \in C(x) \cap C(c) \cap C(y) \equiv_i C(x)$ очевидно $[t, x] = [t, yc] = e$ и $x \equiv_i yc$ (Лемма 36). В этом случае L – группа. Противоречие. Таким образом, $|C(x) : C(x) \cap FC(G)| < \infty$. Так как $C(x)$ – бесконечная группа, то $C(x) \cap FC(G)$ бесконечная группа. А так как $C(x)$

–FC– группа, то $(\exists z \in FC(G))(z \in C(x) \setminus e)$ и $z \equiv x$. Отсюда следует, что $x \in FC(G)$. Противоречие.

Теорема доказана.

40. ТЕОРЕМА. Минимальная не –FC– группа с конечными классами индексно эквивалентных элементов периодическая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По Лемме 35 $FC(G) - FC$ - центр группы G конечен. По Теореме 39 $L = x \cup FC(G)$ конечная группа. Так как x – произвольный элемент группы G , то $(\forall g \in G)(\exists n \in \mathbb{Z})(x^n = e)$, т.е. группа G – периодическая.

Теорема доказана.

41. ЛЕММА. Если в группе G $FC(G) \neq e$, то

$$(\forall g \in G) \left| \left. g \right|_{i \equiv} \right| = |FC(G)|. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $g \in FC(G)$, то $\left| \left. g \right|_{i \equiv} \right| = |FC(G)|$. Пусть $g \notin FC(G)$, тогда $g \notin FC(G)$, $(\forall c \in FC(G))(gc \equiv g)$, $gc \in g$.

Очевидно, $\left| \left. g \right|_{i \equiv} \right| = |gFC(G)| = |FC(G)|$.

Лемма доказана.

42. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Индексным ядром элемента a группы G в группе G назовем множество $F(a)$ элементов h группы G , удовлетворяющих сравнению $ha = b$, где $a, b \in a$, т.е. индексное ядро элемента a в группе G – это множество решений $R(ha = b) = \{h\}$ сравнения $(a, b \in a)$, т.е. $F(a) = R(ha = b)$.

43. ЛЕММА. В группе G индексные ядра индексно эквивалентных элементов равны между собой, т.е.

$$(\forall a, b \in G)((a \equiv b) \Leftrightarrow (F(a) = F(b))). \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $a, b \in a$. Тогда $F(a) = R(ha = b)$ и $F(b) = R(hb = a)$, где $a, b \in a$. Отсюда следует, что $R(ha = b) = R(hb = a)$ и $F(a) = F(b)$.

Достаточность. Пусть $F(a) = F(b)$. Тогда $R(ha = b) = R(hb = a)$ где $a, b \in a$ (Определение 42). Так как $a, b \in a$, то $a \equiv b$.

Лемма доказана.

44. ТЕОРЕМА. Группа G тогда и только тогда является FC – группой, когда

$$(\forall g \in G)(F(g) = G). \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $G - FC$ – группа. Тогда в G один класс e индексно эквивалентных элементов (Теорема 32) и $(\forall g \in G)(F(g) = G)$.

Достаточность. Пусть теперь $(\forall g \in G)(F(g) = G)$. Тогда $(\forall a, b \in G)(F(a) = F(b))$. По Лемме 43 $a \equiv b$. Отсюда следует, что в G один класс a индексно эквивалентных элементов. Очевидно, нейтральный элемент $e \in a$. По Лемме 35 $G - FC$ – группа.

Теорема доказана.

45 СЛЕДСТВИЕ. В произвольной группе G индексное ядро нейтрального элемента e равно FC – центру группы G , т.е.

$$F(e) = FC(G) \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из Теоремы 44 следует, что $F(e) - FC$ – группа и $(\forall c \in FC(G))(F(c) = F(e))$. Так как в $FC(G)$ сравнение $ha=b$, где $a, b \in FC(G)$, для фиксированных a, b имеет единственное решение, а элементы a, b пробегают всю группу $FC(G)$, то и решение (например $he = b$) $(\forall b \in G)$ будут принимать значения каждого элемента группы $FC(G)$. Отсюда следует, что $F(e)=FC(G)$.

Следствие доказано.

46. ТЕОРЕМА. В нетривиальной группе G существует элемент x , индексное ядро $F(x)$ которого нетривиальное, т.е.

$$(\exists x \in G)(F(x) \neq e) \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $(\forall a \in G)(F(a) = e)$. Пусть $x, y \in a$. Тогда $(\forall h \in F(a))(hx = y)$ и $x = y$. Таким образом, $(\forall a \in G)(|a| = 1)$. Так как $(\forall a \in a)(a^{-1} \in a)$, то $(\forall a \in G)(a^2 = e)$. Отсюда группа G – абелева и в ней один класс индексно эквивалентных элементов, т.е. $F(x)=G=e$. Противоречие.

Теорема доказана.

47. ЛЕММА. $F(a)$ – подгруппа G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $F(a) = \{h / ha = b\}$ где $a, b \in a$ и $(\forall a \in a)(a^{-1} \in a)$, то $e \in F(a)$. Очевидно, что $h^{-1} = (ba^{-1})^{-1} = ab^{-1}$ и $h = ba^{-1}$. Так как $a, b^{-1} \in a$, то

$h^{-1} \in R(ha = b)$, т.е. $(\forall h \in F(a))(h^{-1} \in F(a))$. Пусть теперь $(\forall x, y, z \in a)(h_1x = y, h_2y = z, h_3x = z)$. Тогда $h_2h_1x = z$ и $h_2h_1 = h_3 \in F(a)$. Так как в группе G x и z фиксированы, а решение уравнения $(h_2h_1)x = z$ относительно h_2h_1 в группе G единственно, то имеем, $h_2h_1 \in F(a)$. Таким образом, $(\forall h_2h_1 \in F(a))(h_1 \cdot h_2 \in F(a))$.

48. СЛЕДСТВИЕ. В группе имеет место утверждение

$$(\forall a \in G)(F(a) \leq M(a)). \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что $(\forall a \in a)(a \in M(a))$, а поскольку $F(a) = \{h / ha = b\}$, где $a, b \in a$, то $F(a) \leq M(a)$.

49. ЛЕММА. В группе G имеет место формула

$$(\forall g \in G \setminus FC(G))(FC(G) < F(g)). \quad (28)$$

Если $FC(G) = e$ то $(e) < J(g)$ поскольку $F(g)$ - группа (Лемма 47). Далее, пусть теперь $FC(G) \neq e$. Тогда по Лемме 31 элементы смежного класса $gFC(G)$ группы G по подгруппе $FC(G)$ индексно эквиваленты, т.е. $(\forall z \in FC(G))(g \equiv gz)$. Отсюда $g(gz)^{-1} \in R(hg = gz)$ и $gzg^{-1} \in F(g)$. Но $z^{g^{-1}} \in FC(G)$, поскольку $FC(G)$ - характеристическая подгруппа. Отсюда следует, что $z \in FC(G)$ и $FC(G) < F(g)$.

Лемма доказана.

50. СЛЕДСТВИЕ. Пересечение индексных ядер $F(g)$ не- FC -центральных элементов группы G равно FC - центру группы G т.е.

$$\bigcap_{g \in G \setminus FC(G)} F(g) = FC = F. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из Леммы 49, поскольку элемент $g \in G \setminus FC(G)$ взят произвольно из G .

51. ТЕОРЕМА. Пересечение индексных ядер элементов группы G равно её FC - центру, т.е. для произвольной групп G верна формула.

$$(\forall g \in G) \left(\bigcap_{g \in G} F(g) = FC(G) \right) \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По Лемме 35 $e = FC(G)$. Очевидно $F(e) = FC(G)$. Теперь ввиду Леммы 49 и её Следствия 50

$$\bigcap_{g \in G \setminus FC(G)} F(g) \cap \bigcap_{g \in FC(G)} F(g) = FC(G) = \bigcap_{g \in G} F(g) \quad (31)$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлюк И.И. Сравнение и проблема Черникова в теории групп // Монография. Издание ПГУ. - Павлодар, 2002. - 222 с.
2. Горчаков Ю.М. Группы с конечными классами сопряженных элементов // Наука, 1978. - 120 с.
3. Poincaré H.J. Journ. Math//1887. - P. 409.
4. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп // Наука, 1982. - 288 с.
5. Теняева Л.И., Павлюк И.И. О единичных сравнениях в группе // Материалы республиканской научной конференции. IV Сатпаевские чтения. - Павлодар, ПГУ им. С. Торайгырова, 2004. Т.6. - С. 141-143.

Түйіндеме

Бұл жұмыста элементтер тобын индекс бойынша салыстырудың жаңа бинарлы жолы қарастырылған. Бұнда элементтер тобына модулятор деген жаңа ұғым және осы ұғымдардың қасиетіне элементтердің эквивалентті индексті ядро класстары енгізілген.

Resume

The new binary relation of group elements index comparison is studied in this work. New notions of group elements modulator and the kernel class index-equipment elements (are given in the article). These notions are deeply studied in this work.

УДК 550.831.1; 51-74

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ЗОНДИРОВАНИЯ НАД ПОГРЕБЕННОЙ СКЛАДЧАТОСТЬЮ

Б.Г. Муканова

Казахский национальный университет
им. аль-Фараби, г. Алматы

Зондирование постоянным током – один из способов исследования земной коры в геофизике и геологии [1,2]. Суть метода заключается в том,

что при помощи одного или нескольких источников постоянного тока в среде возбуждается электрическое поле. Основным материалом для анализа являются параметры поля на поверхности среды – потенциал либо разность потенциалов на некоторой измерительной базе.

Общепринятой математической моделью для данного метода является уравнение Лапласа для потенциала постоянного тока в неоднородной среде, с естественными граничными условиями на бесконечности и на поверхности среды, а также на внутренних контактных границах.

Базовая модель слоисто-неоднородной среды с плоско залегающими пластами плохо удовлетворяет запросам практики, поэтому задача расчета поля и его производных для разнообразной геометрии залегания пластов все еще остается актуальной [1]. Ранее в [3] нами был рассмотрен случай локально залегающей неоднородности в пласте, с двумерной и трехмерной геометрией залегания неоднородности. Задача вычисления потенциала поля была сведена к интегральному уравнению, численное решение которого описано в [4]. Сведение уравнений Лапласа и Пуассона к интегральным уравнениям есть классический прием для анализа свойств решений и получений априорных оценок [5]. До 90-х годов прошлого века примеров численного решения интегральных уравнений в литературе было немного [6-10] и они ограничивались применениями к локальным неоднородностям простой формы. Возможно, отсутствие интереса к данному методу объяснялось с одной стороны, успехами разностных методов в решении эллиптических задач, и, с другой стороны, относительной узостью сферы применения метода. Для специфического круга задач метод обладает рядом преимуществ перед разностными методами - повышенная точность, экономичность. В частности, если среда имеет выраженные геоэлектрические границы, то задача определения поля может быть сведена к одному или нескольким интегральным уравнениям [10].

В данной работе обосновывается численный метод решения интегрального уравнения для расчета поля над средой с погребенным складчатым рельефом. Сформулируем математическую постановку задачи зондирования постоянным током.

Относительно геометрии залегания пластов сделаем следующие предположения:

1. Пусть плоскость (x,z) в декартовых координатах совпадает с поверхностью Земли, и распределение проводимостей не зависит от координаты z .

2. Существует параметризация сечения границы Γ плоскостью $z=const$ вида: $y=f(x)$, (рисунок 1) и функция $y=f(x)$ удовлетворяет условиям:

$$f(x) \in C^2(R), \quad (1)$$

Распределение проводимостей кусочно-постоянно и двумерно:

$\sigma(x,y,z)=\sigma_1$, если $y \geq f(x)$ и $\sigma(x,y,z)=\sigma_2$, если $y < f(x)$ для всех $\{(x,y,z)|y>0\}$.

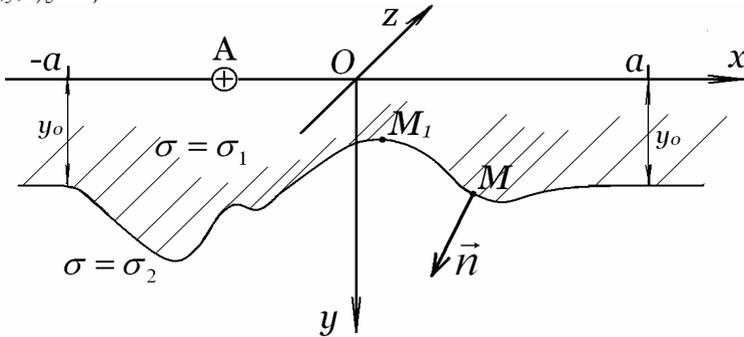


Рисунок 1 – Схема вертикального электрического зондирования для одного питающего электрода и геометрия залегания пластов. А - полюс источника постоянного тока. $y_M=f(x_M)$, $y_{M1}=f(x_{M1})$, $r_{MM1}=MM_1$.

Хотя распределение проводимостей двумерно, электрическое поле в среде возбуждается точечными источниками, поэтому параметры поля зависят от трех пространственных координат. Для стационарного поля и в отсутствии объемных источников электростатический потенциал в точках среды определяется уравнением Лапласа

$$\Delta\varphi=0 \quad (2),$$

с граничными условиями:

$$\varphi|_{\Gamma_-} = \varphi|_{\Gamma_+}, \quad \sigma_1 \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\Gamma_-} = \sigma_2 \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\Gamma_+}, \quad (3).$$

Должны также удовлетворяться условия убывания на бесконечности $\varphi(\infty) = 0$ и граничное условие на земной поверхности:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{y=0} = -\sum_k I_k \delta(\vec{r} - \vec{OA}_k), \quad k=1, \dots, K \quad (4)$$

Здесь K есть количество источников тока, A_k – точки размещения источников на поверхности, I_k – силы тока. Представим решение задачи в произвольной точке M в виде суммы потенциалов точечных источников в однородном полупространстве и неизвестной регулярной добавки:

$$\varphi(M) = \frac{I_0}{\sigma_1} (U_0(M) + u(M)) = \frac{I_0}{\sigma_1} \left(\sum_{k=1}^K \frac{I_k}{2\pi I_0 |\vec{MA}_k|} + u(M) \right), \quad (5)$$

где I_0 есть единица измерения силы тока. Функция $u(M)$ также удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, за исключением геоэлектрических границ, а граничные условия (3-4) для $u(M)$ переписываются в виде :

$$\sigma_1 \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma_-} - \sigma_2 \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma_+} = - \left(\sigma_1 \left. \frac{\partial U_0}{\partial n} \right|_{\Gamma_-} - \sigma_2 \left. \frac{\partial U_0}{\partial n} \right|_{\Gamma_+} \right), \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (7)$$

Будем искать решение $u(M)$ в виде потенциала простого слоя, создаваемого вторичными источниками, распределенными на геоэлектрической границе Γ и ее отражении в полупространстве $\{y < 0\}$. Симметричное отражение использовано для того, чтобы обеспечить выполнение условия (7) на поверхности Земли. В качестве искомой функции рассматривается плотность простого слоя $v(M)$. Потенциал поля $u(M)$ восстанавливается по формулам Грина через плотность простого слоя интегрированием по поверхности контакта сред и ее отражению в верхнем полупространстве:

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} v(M) \left[\frac{1}{r_{PM}} + \frac{1}{r_{PM'}} \right] d\Gamma(M)$$

Из условий (6) на нормальную производную поля на Γ и формул Грина для функции $v(M)$ получаем интегральное уравнение:

$$v(M) = \frac{\lambda}{2\pi} \iint_{\Gamma} v(M_1) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{MM_1}} + \frac{1}{r_{MM_1'}} \right) d\Gamma(M_1) + \lambda F_0(M) \quad (8)$$

где $F_0(M) = \partial U_0 / \partial n(M)$, $\lambda = (\sigma_1 - \sigma_2) / (\sigma_1 + \sigma_2)$.

Здесь точки M, M_1 принадлежат поверхности интегрирования Γ , а M_1' - ее отражению в полупространстве $\{y < 0\}$, r_{MM_1}, r'_{MM_1} есть расстояния от точки M до M_1 и M_1' соответственно. В отличие от аналогичного интегрального уравнения из [5] для зондирования над наклонно залегающим пластом, здесь появилось дополнительное слагаемое, связанное с тем, что геоэлектрическая граница Γ в данном случае не является плоской, причем ядро уравнения (8) является полярным, т.к. точки M, M_1 лежат на одной поверхности Γ . Имеет место следующая лемма:

Лемма. Пусть выполнены условия (1) и функция $v(x, z)$ ограничена и непрерывна на Γ и удовлетворяет условию убывания вида $|v(x, z)| \leq C \sqrt{|x|}$

при $|x| \rightarrow \infty$. Тогда функции $\mu(x, z) = \iint_{\Gamma} v(x_1, z_1) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{MM_1}} \right) d\Gamma(x_1, z_1)$ и $\mu_1(x, z) = \iint_{\Gamma} v(x_1, z_1) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{MM'_1}} \right) d\Gamma(x_1, z_1)$ удовлетворяют неравенствам: $\mu(x, z) \leq C_1(K, a, C_v) \sup_{\Gamma} |v(x, z)|$,

$$\mu_1(x, z) \leq C_2(K, a, C_v) \sup_{\Gamma} |v(x, z)|, \mu(x, z), \mu_1(x, z) \sim O(1/|x|) \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Доказательство. Можно показать, что производная по некоторому направлению l есть

$$\partial / \partial \vec{l} \left(1/r_{MM_1} + 1/r_{MM'_1} \right) = \cos \psi / r_{MM_1}^2 + \cos \psi' / r_{MM'_1}^2, \quad (10)$$

где углы ψ и ψ' образованы вектором l и направлениями M_1M и M'_1M соответственно.

Преобразуем выражения для $\mu(x, z)$, $\mu_1(x, z)$ с учетом (10) и перейдем к параметризации поверхности Γ согласно условию (1):

$$\mu(x, z) = \iint_{\Gamma} v(x_1, z_1) \left(\frac{\cos \psi}{r_{MM_1}^2} \right) \sqrt{1 + f'(x_1)} dx_1 dz_1 \quad \text{и} \quad (12)$$

$$\mu_1(x, z) = \iint_{\Gamma} v(x_1, z_1) \left(\frac{\cos \psi'}{r_{MM'_1}^2} \right) \sqrt{1 + f'(x_1)} dx_1 dz_1$$

В силу выбора параметризации Γ векторы MM_1 , MM'_1 , n имеют компоненты:

$$MM_1 = (x_1 - x, f(x_1) - f(x), z_1 - z), \quad MM'_1 = (x_1 - x, f(x_1) + f(x), z_1 - z),$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} (-f'(x), 1, 0)$$

поэтому выражения (12) могут быть представлены в виде:

$$\mu(x, z) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \frac{v(x_1, z_1) (f(x_1) - f(x) - f'(x)(x_1 - x))}{r_{MM_1}^3} dx_1 dz_1 \quad (13)$$

и аналогично для $\mu_1(x, z)$.

Докажем сначала утверждение леммы для функции $\mu(M)$. Возьмем некоторое $b > 2a$. Рассмотрим два случая: а) точка $M(x, z)$ такова, что $|x| > b$ и б) $|x| \leq b$.

Запишем (12) в виде:

$$\mu(M) = \int_{|x|>a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x_1, z_1) \cos \Psi}{r_{MM1}^2} \sqrt{1 + f'(x_1)^2} dx_1 dz_1 + \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x_1, z_1) \cos \Psi}{r_{MM1}^2} \sqrt{1 + f'(x_1)^2} dx_1 dz_1.$$

В силу предположений относительно функции $f(x)$ и из (13) для $|x|>b>2a$, $|x_1|>a$ первое слагаемое равно нулю, отсюда

$$\begin{aligned} |\mu(M)| &\leq \sup_{\Gamma} |v(M)| \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1+K^2}}{(x-x_1)^2 + (z-z_1)^2} dx_1 dz_1 = \sup_{\Gamma} |v(M)| \cdot \sqrt{1+K^2} \pi \int_{-a}^a \frac{dx_1}{|x-x_1|} \\ &\leq \sup_{\Gamma} |v(M)| \cdot \sqrt{1+K^2} \pi \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| \leq \sup_{\Gamma} |v(M)| \cdot \sqrt{1+K^2} \pi \ln \left(\frac{b+a}{b-a} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая асимптотику функции $\ln|(x+a)/(x-a)|$ при $x \rightarrow \infty$ отсюда получаем также, что для $|x| \rightarrow \infty$ $\mu(M) \sim O(1/|x|)$.

Для случая $|x| \leq b$ рассмотрим отдельно две возможности: если $x > a$ и если $x \leq a$.

В первом варианте подынтегральная функция обращается в нуль при $|x_1| > a$, поэтому из (13) получаем для $x > a$:

$$|\mu(M)| \leq \sup_{\Gamma} |v(M)| \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x_1) - f(x) - f'(x)(x_1 - x)}{\left(\sqrt{(x-x_1)^2 + (z-z_1)^2} \right)^2} dx_1 dz_1. \quad (15)$$

Разложим $f(x_1)$ в ряд Тейлора до второго порядка с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x_1) - f(x) - f'(x)(x_1 - x) = f''(c)(x_1 - x)^2 / 2 \leq K(x_1 - x)^2 / 2. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15) и интегрируя по z_1 , получим:

$$\begin{aligned} |\mu(M)| &\leq \frac{K}{2} \sup_{\Gamma} |v(M)| \int_{-a}^a (x-x_1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{(x-x_1)^2 + (z-z_1)^2} \right)^2} dz_1 dx_1 \\ &= \frac{K}{2} \sup_{\Gamma} |v(M)| \int_{-a}^a 2 dx_1 = 2Ka \sup_{\Gamma} |v(M)| < 2Kb \sup_{\Gamma} |v(M)|. \end{aligned} \quad (17)$$

Для $x < a$ в (13) разбиваем область интегрирования по x_1 и учитываем (16) и условия леммы:

$$|\mu(M)| \leq \frac{K}{2} \sup_{\Gamma} |v(M)| \int_{-b}^b (x-x_1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (z-z_1)^2}} dz_1 dx_1 + \int_{|x_1|>b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_v}{|x_1| [(x-x_1)^2 + (z-z_1)^2]} dx_1 dz_1 \leq \frac{K}{2} \sup_{\Gamma} |v(M)| \int_{-b}^b 2 dx_1 + C_v \pi \int_{|x_1|>b} \frac{dx_1}{|x_1| \cdot |x-x_1|}.$$

Вычисляя элементарные интегралы и используя асимптотическое поведение и ограниченность функции вида $\ln(I\gamma x)/x$ при $x \rightarrow 0$ получаем:

$$|\mu(x, z)| \leq 2Kb \sup_{\Gamma} |v(M)| + C_v \pi \frac{1}{x} \ln \frac{b+x}{b-x} \leq (2Kb + 3\pi C_v / b) \sup_{\Gamma} |v(M)| \quad (18)$$

Объединяя (14), (17), (18), получаем утверждение леммы относительно функции $\mu(M)$:

$$\mu(M) \leq \left[\pi \sqrt{1+K^2} \pi \ln \frac{b-a}{b+a} + 2Kb + 3\pi C_v / b \right] \sup_{\Gamma} |v(M)| = C_1 \sup_{\Gamma} |v(M)|. \quad (19)$$

Докажем утверждение леммы для функции $\mu_1(M)$. Пусть $x > a$. Из выражения (13) и условий на функцию $f(x)$ следует:

$$\begin{aligned} \mu_1(x, z) &= \int_{|x_1|>a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2y_0 v(x_1, z_1)}{\left((x_1-x)^2 + 4y_0^2 + (z_1-z)^2 \right)^{3/2}} dx_1 dz_1 + \\ &+ \int_{|x_1|<a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x_1, z_1)(y_0 + f(x_1))}{\left((x_1-x)^2 + (y_0 + f(x_1))^2 + (z_1-z)^2 \right)^{3/2}} dx_1 dz_1 \leq 4y_0 \sup_{P \in \Gamma} |v(P)| \times \\ &\times \int_{|x_1|>a} \frac{C_v dx_1}{|x_1| \left((x_1-x)^2 + 4y_0^2 \right)} + 2(y_0 + M) \sup_{P \in \Gamma} |v(P)| \int_{|x_1|<a} \frac{dx_1}{(x_1-x)^2 + 4m^2}. \end{aligned}$$

Вычисляя элементарные интегралы, получаем:

$$\begin{aligned} |\mu_1(x, z)| &\leq \frac{4C_v y_0 \sup_{P \in \Gamma} |v(P)|}{x^2 + 4y_0^2} \left(\ln \frac{\sqrt{4y_0^2 + (a-x)^2} \sqrt{4y_0^2 + (a+x)^2}}{a^2} + x \left(\arctg \frac{a+x}{2y_0} - \arctg \frac{a-x}{2y_0} \right) \right) + \\ &+ \frac{(y_0 + M) \sup_{P \in \Gamma} |v(P)|}{m} \left(\arctg \frac{x+a}{2m} - \arctg \frac{x-a}{2m} \right) \leq C(C_v, y_0, m, M, a) \sup_{P \in \Gamma} |v(P)| \quad (20) \end{aligned}$$

Анализируя асимптотику полученных формул при $|x| \rightarrow \infty$, устанавливаем, что

$$\mu_1(x,z) \sim O(\ln(x)/x^2) + O(1/x^2).$$

Если $x \leq a$, то

$$\begin{aligned} \mu_1(x,z) &= \int_{|x_1| < a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f(x_1) + f(x) - f'(x)(x_1 - x))v(x_1, z_1)}{\left((x_1 - x)^2 + (f(x) + f(x_1))^2 + (z_1 - z)^2\right)^{3/2}} dx_1 dz_1 + \\ &+ \int_{|x_1| > a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x_1, z_1)(y_0 + f(x))}{\left((x_1 - x)^2 + (f(x) + y_0)^2 + (z_1 - z)^2\right)^{3/2}} dx_1 dz_1 \leq 2(M + Ka) \sup_{P \in \Gamma} |v(P)| \times \\ &\times \int_{|x_1| < a} \frac{dx_1}{(x_1 - x)^2 + 4m^2} + 2(y_0 + M) \sup_{P \in \Gamma} |v(P)| \int_{|x_1| > a} \frac{dx_1}{(x_1 - x)^2 + 4m^2}. \end{aligned}$$

Интегрируя по x_1 , получаем:

$$\mu_1(x,z) \leq \frac{\pi}{m} \sup_{\Gamma} |v(M)| \cdot \max(M + Ka, M + y_0). \quad (21)$$

Рассмотрим итерационную схему решения уравнения (8). Зададим некоторое начальное приближение функции $v_0(M)$, удовлетворяющее условиям леммы. Каждое следующее приближение $v_{m+1}(M)$ будем вычислять из уравнения (8), подставляя в правую часть $v_m(M_1)$ вместо $v(M_1)$:

$$v_{m+1}(M) = \frac{\lambda}{2\pi} \iint_{\Gamma} v_m(M_1) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{MM_1}} + \frac{1}{r_{MM'_1}} \right) d\Gamma(M) + \lambda F_0(M), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Теорема. В предположениях (1) и при достаточно малом λ итерационный процесс (22) сходится равномерно на Γ к решению интегрального уравнения (8) при любом начальном $v_0(M)$, удовлетворяющем условиям леммы.

Доказательство. Оценим равномерную норму разности двух последовательных приближений. Из (22) следует:

$$\sup_{\Gamma} |v_{m+1} - v_m| \leq \frac{\lambda}{2\pi} \iint_{\Gamma} |v_m - v_{m-1}| \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{MM_1}} + \frac{1}{r_{MM'_1}} \right) d\Gamma, \quad m = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Оценивая интегралы на основании леммы, получаем

$$\sup_{\Gamma} |v_{m+1} - v_m| \leq \frac{\lambda}{2\pi} (C_1(K, a, C_v) + C_2(K, a, C_v)) \sup_{\Gamma} |v_m - v_{m-1}|$$

Отсюда следует, что при достаточно малом λ итерационный процесс (22) сходится равномерно на Γ как геометрическая прогрессия со знаменателем

$q = \lambda(C_1(K, a, C_v) + C_2(K, a, C_v)) / 2\pi$ к некоторой функции $v(M)$. Переходя к пределу в (22) при $m \rightarrow \infty$, получаем, что функция $v(M)$ удовлетворяет интегральному уравнению (8). Операция перехода к пределу под интегралом в данном случае корректна с силу существования интегралов, равномерной сходимости подинтегральной функции и равномерной сходимости несобственного интеграла относительно x_1, z_1 .

Примененный метод расчета открывает перспективы для создания достаточно детализированной базы данных кривых зондирования для трехмерных геоэлектрических структур.

Литература

1. Электроразведка: справочник геофизика в двух книгах. Книга первая. - М.: Недра, 1989.-438 с..
2. Куфуд, О. Зондирование методом сопротивлений. //М.: Недра, 1980. - 232 с.
3. Орунханов М.К., Муканова Б.Г., Сарбасова Б.К. Сходимость метода интегральных уравнений в задаче зондирования над локальным включением. //Вычислительные технологии, ИВТ СОРАН, 2004г. т.9, №6, - С. 68-72.
4. M. Orunkhanov and B. Mukanova. The integral equations method in problems of electrical sounding. //Advances in High Performance Computing and Computational Sciences, V. 93/2006, p. 15-21. Springer Berlin / HeidelbergA. H
5. Тихонов. Об электроразведании над наклонным пластом. //Труды института теоретической геофизики. /Изд-во АН СССР, М.-Л.,1946. т.1, С.116-136.
6. D. Colton and R. Kress, Integral equation methods in scattering theory, Wiley, New York, 1983.
7. Дмитриев В.А., Захаров Е.В. Метод расчета поля постоянного тока в неоднородно проводящих средах. //Вычислительные методы и программирование – М.: Изд-во МГУ, 1973 вып.20. - С.175-186.
8. Barthes V., Vasseur G. Three-dimensional resistivity modeling by the integral equation method.// Avd. Eur. Geotherm. Res. Proc. 2nd Int. Semin. Results EC Geotherm. Enegy. Res., Strasburg,1980. Dordrect e.a., 1980. – p. 854-876.
9. Georgescu P. Three-dimensional models for resistivity data // Revue Roumaine la Geologie, Geophysic et Geographic.- Ser. Geophysique. -1977. v.21,n2.-p 249-265.
10. Орунханов М.К., Муканова Б.Г., Сарбасова Б.К. Численная реализация метода потенциалов в задаче зондирования над наклонным пластом. // Вычислительные технологии. ИВТ СОРАН, 2004г. т.9, Специальный выпуск: Труды российско-казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям. - С. 45-48.

Түйіндеме

Жер асты рельефті ортаның үстінен тұрақты ток арқылы электрбарлау амалының математикалық моделі қарастырылған. Есеп электр өткізгіштігі тұрақты – үзілісті ортадағы электр өрісінің потенциалын табуға әкеледі. Потенциал теориясына негізделіп есеп екінші ретті интегралды теңдеуге келтірілген. Бұл теңдеуді шешуге арналған сандық амал теориялық негізі тұрғызылған.

Resume

Mathematical model of vertical electrical sounding above the medium containing a buried topography is studied. The problem consists of the determination of the unknown electrical field potential in the media with piecewise constant conductivity. Using a potential theory the problem is reduced to the second order integral equation. The numerical method is theoretically justified.

УДК 666.9.017

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ОБЖИГА НА ПРОЦЕССЫ МИНЕРАЛООБРАЗОВАНИЯ В КЕРАМИЧЕСКОЙ КОМПОЗИЦИИ ЛЕССОВИДНЫЙ СУГЛИНОК – ТАЛЬК

С.А. Монтаев, С.П. Пазылова

*Западно-Казахстанский аграрно-технический университет
им. Жангир хана, г. Уральск*

Опережающие темпы развития жилищного строительства в Республике Казахстан порождает большой спрос к стеновым материалам, особенно, к керамическому кирпичу с высокими эксплуатационными свойствами. Однако основной сырьевой базой для производства стеновой керамики в Республике Казахстан служат некондиционные лессовидные суглинки [1]. В этих условиях одним из основных направлений повышения эффективности производства керамического кирпича является корректировка химического и минерального состава керамических масс на основе лессовидных суглинков для улучшения технологических и физико-механических свойств готового продукта.

Цель исследования – установление основных закономерностей изменения фазо - и минералообразования в керамической композиции в системе лессовидный суглинок – тальк.

В качестве основного сырья был выбран лессовидный суглинок Кызылординского месторождения, а в качестве корректирующей добавки использованы тальковые сланцы Шиелинского месторождения (Кызылординская обл.).

Лессовидный суглинок сначала высушивался и разламывался до прохождения через сито 1,0 мм, а тальковые сланцы после раздробления на куски размерами 2,0 – 4,0 см молотились в лабораторной шаровой мельнице до удельной поверхности 1000 – 1200 г/см².

Для экспериментальных исследований из выбранных сырьевых материалов разработана керамическая композиция, ограниченная следующими концентрациями масс, %.

Лессовидный суглинок – 95,0 – 97,0.

Тальк – 3,0 – 5,0.

Из указанных шихтовых составов отформованы образцы – цилиндры, и после сушки до постоянной массы обжигались в интервале температур 600 – 1100 °С с экспозицией 1 час в каждой соответствующей температуре. Термообработанные образцы подвергались исследованию электронной микроскопии, рентгенофазовым, термографическим и петрографическим методам анализа.

Термограмма образцов обожженного при 700 °С показывает, что глинистые минеральные составляющие не претерпели полной термической деструкции. Однако в глинистых минералах начались процессы дегидратации и аморфизации, на этом фоне сохраняет кристаллическую структуру только кварц, который дает высокую интенсивность максимумов, а в тальке также еще сохранилась кристаллическая структура, которая хорошо регистрируется рентгеновским методом.

При изучении структурообразования композиции особый интерес вызывают превращения талька [3] в зависимости от температуры термообработки. По данным термографического анализа в интервалах температур 560-580 °С и 830°С наблюдаются эндотермические эффекты связанные с потерей воды из хлоритов, а следующий эндоэффект при 900 °С обусловлен удалением конституционной воды из талька.

Сравнения кривых дифференциально-термического анализа (ДТА) показывают, что при низких температурах обжига (до 700 °С) кривая ДТА исходного суглинка и керамической композиции с добавкой талька практически идентична, что свидетельствует об отсутствии каких либо структурных изменений керамической массы на основе чистого суглинка и в присутствии талька. С повышением температуры обжига в исследуемой керамической композиции происходят следующие изменения:

- Дегидратация, протекающая постепенно вплоть до 800 – 1000 °С;
- Перестройка структуры с формированием амфиболовых колец и пироксеновых полуколец;
- Образование стеклофазы.

Следует отметить, что все эти процессы налагаются друг на друга и при обжиге керамической композиции протекают параллельно с образованием высокотемпературных фаз авгита, акерманита и санидина.

При этом температурный интервал появления акерманита в составе керамической массы составляет 950 – 1100 °С, что еще раз указывает на доминирующее участие талька в процессах структурообразования.

Результаты рентгенофазового анализа также подтверждают, что в образцах обожженного при 700 °С еще присутствуют глинистые минералы как кварц, слюда, полевой шпат, а на рентгенограммах образцов термообработанных в интервале температур 950 - 1100 °С снижается интенсивность линии глинистых минералов с увеличением интенсивности дифракционных максимумов высокотемпературных фаз авгита и санидина.

С дальнейшим увеличением температуры обжига существенно снижается интенсивность дифракционных максимумов кварца, исчезают линии кальцита и талька.

В керамической композиции с содержанием 5% талька на рентгенограмме образца обожженного при 1000 – 1100 °С количество санидина начинает увеличиваться и появляется дополнительная высокотемпературная фаза – акерманит.

В обожженных образцах в интервале температур 950 – 1100 °С стабильно присутствуют минералы санидина, авгита и акерманита, придающих керамическому черепку твердость, химическую устойчивость и прочность [3].

В результате детального анализа структурообразования керамической композиции выявлены существенные отличия от процессов структурообразования традиционных каолиновых и монтмориллонитовых керамических масс. Фазово-минеральный состав обожженных образцов подтверждает перспективность использования тальковых сланцев как эффективного корректирующего компонента в составе лессовидных суглинков, улучшающих структурно-реологические свойства массы и физико-механические свойства готового продукта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ботвина Л.М. Строительные материалы из лессовидных суглинков.- Ташкент: Укитовчи, 1984. - 128 с.
2. Монтаев С.А. Производство керамического кирпича в полигонных условиях Приаралья. – Алматы: Ғылым, 2001. - 107 с.
3. Августиник А.И. Изменение талька при нагревании / сборник статей под ред. И.Д. Финкельштейна.- М., 1952.- С. 81-102.

Түйіндеме

Мақала орманды суглиндер-талық жүйесінде керамикалық композицияның фазо және минералды қалыпталудың негізгі заңдылығын құруға арналған.

Resume

The article is devoted to defining of the main rules of changes of phase- and mineral formation of ceramic composition in the system of loess-like adobe-talc.

УДК 65.001.4(574)

МОДЕЛЬ РЕСУРСОВ ПРЕДПРИЯТИЙ

А.К. Турсунбаева

Карагандинский государственный технический университет, г.Караганда

Введение. Обобщенное понятие «ресурса» коммуникационной (в том числе и предприятия) системы впервые было введено Л.И.Розноэром [1]. В этой работе обмен и распределение ресурса в системе рассматривались как происходящие по законам, аналогичным закону распределения энергии в замкнутой системе механических частиц. Позже понятие «ресурса» коммуникационной системы стали связывать с наличием некоторого множества коммуникаций, соединяющих элементы системы, и с характеристиками этих коммуникаций.

В настоящей работе на основе классической термодинамики мы вводим понятие «прогнозных» или «скрытых» ресурсов предприятия.

Ресурсы предприятия. Производство предполагает использование ресурсов. Ресурсы, вовлечённые в производство, выполняют роль факторов производства. Ресурсы выступают в роли факторов производства, если они задействованы в производстве, если есть определённый результат. Ресурсы подразделяются на экономические (функционирующие), потенциальные (не вовлечённые в хозяйственный оборот). Экономические ресурсы включают: природные, ресурсы трудовые (население в трудоспособном возрасте), материальные (все созданные человеком средства производства, являющиеся результатом производства), финансовые (денежные средства, которые общество в состоянии выделить на организацию производства), информационные (научная, научно-техническая, проектно-конструкторская, статистическая, технологическая, информационная

информация, а также др. виды интеллектуальных ценностей, необходимых для создания экономического продукта).

Факторы производства - это параметры, определяющие характер и результативность протекания экономических процессов, предопределяющие количество и качество производимого экономического продукта. Факторы не столько производственные ресурсы, сколько производственный потенциал экономики. Факторы можно рассматривать как причины, а экономический продукт как следствие экономического производственного процесса. В Западной экономической теории выделяют следующие факторы: земля, капитал, труд и предпринимательский фактор.

Термодинамическая модель прогнозных ресурсов.

Мы будем называть прогнозными ресурсами предприятия ее «истинное» значение определяющего фактора (характеристики), в отличие от «ресурсов потребления» или фактических ресурсов, которые сложились при функционировании системы на данный период (или момент) времени.

Сделаем несколько замечаний. Если мы возьмем некоторое число однотипных систем, то в зависимости от количества сырья, денег и т.п. «вес» основной ее характеристики будет изменяться. В связи с этим мы введем понятие «концентрации» основной характеристики системы, понимая под этим термином величину этой характеристики в единице «объема» системы.

«Объем» системы определяется для конкретной системы (величина капитала, количество рабочих и т.д.).

Если исходить из представлений классической термодинамики, то можно ввести понятие «энергии образования» предприятия в результате термодинамического цикла (например, цикла Карно). Такой подход был использован Н.И.Сафроновым, который ввел понятие «энергии рудообразования» [2]. Тогда формула для определения затрат энергии на термодинамический цикл образования системы будет иметь вид:

$$\Delta F = \alpha T \Delta S = \alpha RT \ln X, \quad (1)$$

где $X = C/C_0$ (для прямого цикла) и $X = C_0/C$ (для обратного цикла); α - число элементов, вовлеченных в процесс образования системы; R - универсальная газовая постоянная; C_0 - начальная и C - конечная концентрации основной характеристики.

Концентрацию основной характеристики сложной системы выразим через равновесную концентрацию C_p . Этот параметр пропорционален к.п.д. цикла, так что полная энергия имеет вид:

Для прямого и обратного цикла

$$C_p = \frac{\alpha'}{\sum_i \alpha_i}, \quad C_p = \frac{\alpha''}{\sum_i \alpha_i}, \quad (3)$$

где α' , α'' - количество элементов, вовлеченных в процесс образования системы в прямом и обратном циклах; $\sum_i \alpha_i$ - общее число элементов, вовлеченных в образование системы.

Очевидно, что в прямом цикле $\alpha = \alpha'X$ и в обратном $\alpha = \alpha''X$. Подставляя α и C_p в (2), имеем:

$$\Delta F_n = RTX \ln X \sum_i \alpha_i \quad (4)$$

Не меняя общности рассуждений, положим $\sum_i \alpha_i = 1$, тогда получим

$$\Delta F_n = X \ln X \quad (5)$$

Если дифференцированные ресурсы системы в единице «объема» обозначить через Π_x , то

$$\Pi_x = \frac{1}{X \ln X}. \quad (6)$$

В работах [3,4] были применены методы неравновесной термодинамики к информационным системам и получено выражение для функции отклика этой системы на внешнее воздействие с учетом диссипативных процессов. После линеаризации полученного выражения, функция отклика Φ системы имеет вид:

$$\Phi = \beta \frac{E}{\Delta G^0} \cdot \bar{N}, \quad (7)$$

где E – «емкость» элементарного звена предприятия; \bar{N} - среднее число звеньев в системе; ΔG^0 - энергия Гиббса термостата (внешней среды); β - некоторая постоянная теории, величина которой вычисляется для каждой конкретной системы по процедуре, изложенной в [3,4].

Для идеальных процессов $\Delta G^0 = \Delta F_n$ и, с учетом (5), (6) и (7), получим

$$\Pi_x = \frac{\beta E \bar{N}}{\Phi}. \quad (8)$$

Если «объем» предприятия мы обозначим через V , то прогнозные ресурсы предприятия будут равны

$$\Pi = \frac{\beta E \bar{N}}{\Phi} \cdot V. \quad (9)$$

Интуитивно ожидалось, что ресурсы предприятия будут возрастать с увеличением числа элементарных звеньев и емкости элементарного звена предприятия.

В качестве функции отклика системы Φ следует брать производственную функцию в одной из ее модификаций, рассмотренных выше. Например, в

случае функции Кобба-Дугласа, для прогнозных ресурсов предприятия имеем:

$$П = \frac{\beta E \bar{N}}{\alpha K^b L^{b-1}} \cdot V \quad (10)$$

Заключение.

Рассмотренная нами термодинамическая модель прогнозных ресурсов предприятия позволяет оценить «запас прочности» этой системы, что особенно актуально в период экономического спада или реформирования экономики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розоноэр Л.И. Обмен и распределение ресурсов (обобщенный термодинамический подход)// Автоматика и телемеханика. – 1973. – №5. – С.115-133, №6. – С.65-80, №8. – С.82-104.
2. Сафронов Н.И., Мещеряков С.С., Иванов Н.П. Энергия рудообразования и поиски полезных ископаемых. –Л.: Недра, 1978. – 215 с.
3. Портнов В.С. Термодинамический подход к задачам геофизического опробования железорудных месторождений. - Караганда, 2003. – 178 с.
4. Яворский В.В., Юров В.М. Прикладные задачи термодинамического анализа неравновесных систем. - М.: Энергоатомиздат, 2008. – 336 с.

Түйіндеме

Кәсіпорынның болжау ресурстарынын термодинамикалық үлгі қарастырылған. Экономиканың тұрақсыздық кезінде маңызды болатын үлгі «қор төзімділігін» бағалауға мүмкіндік береді.

Resume

The thermodynamic model of possible resources of the enterprise is considered. The model allows to evaluate “safety margin” which is actual in economic instability.

НАШИ АВТОРЫ

Альжанов Альмухан Балгабекович – ст. преподаватель, кафедра общей и теоретической физики, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова.

Баяубаев Ербол Кабжалелович – ст. преподаватель кафедры общей и теоретической физики, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова.

Белялова Айнагуль Баянбековна - преподаватель, кафедра общей и теоретической физики, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова.

Ельмуратов Сембай Кайкенович - д.тех.н., профессор, Павлодарский государственный университет им.С.Торайгырова.

Жукенов Марат Каратаевич - ст. преподаватель кафедры общей и теоретической физики, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова.

Зейтова Шолпан Сериковна - преподаватель, кафедра общей и теоретической физики, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова.

Испулов Нурлыбек Айдаргалиевич - к.ф.-м.н., доцент кафедры общей и теоретической физики, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова.

Ляшенко И.И. – ст. преподаватель, Инновационный Евразийский университет, г. Павлодар.

Монтаев С.А. - д.т.н., Западно-Казахстанский аграрно-технический университет им. Жангир хана, г. Уральск.

Муканова Балгайши Гафуровна – к.ф.-м.н., доцент, докторант, кафедра компьютерных и вычислительных технологий, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы.

Павлюк Иван Иванович – к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой алгебры и математического анализа, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова.

Пазылова С.П. - Западно-Казахстанский аграрно-технический университет им. Жангир хана, г. Уральск.

Сейтханова Айнура Кусбековна - ст. преподаватель, кафедра общей и теоретической физики, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова.

Теняева Лилия Ивановна - ст. преподаватель, кафедра алгебры и математического анализа, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова.



Тлукенов Садритен Кабдыгалиевич – доктор физико-математических наук, профессор, академик АЕН, декан факультета физики, математики и информационных технологий, Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова.

Турсунбаева Асель Кенжибековна - к.т.н., профессор, директор центра маркетинга и договорных отношений, Карагандинский государственный технический университет, г. Караганда.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

(“Вестник ПГУ”, “Наука и техника Казахстана”,
“Өлкетану-Краеведение”)

1. В журналы принимаются рукописи статей по всем научным направлениям в 1 экземпляре, набранных на компьютере, напечатанных на одной стороне листа с полуторным межстрочным интервалом, с полями 3 см со всех сторон листа и дискета со всеми материалами в текстовом редакторе “Word 7,0 (’97, 2000) для Windows”.

2. Общий объем рукописи, включая аннотацию, литературу, таблицы и рисунки, не должен превышать **8-10 страниц**.

3. Статья должна сопровождаться рецензией доктора или кандидата наук для авторов, не имеющих ученой степени.

4. Статьи должны быть оформлены в строгом соответствии со следующими правилами: - УДК по таблицам универсальной десятичной классификации;

- название статьи: кегль -14 пунктов, гарнитура - **Times New Roman Cyr** (для русского, английского и немецкого языков), **KZ Times New Roman** (для казахского языка), заглавные, жирные, абзац центрованный;

- инициалы и фамилия(-и) автора(-ов), полное название учреждения: кегль - 12 пунктов, гарнитура - Arial (для русского, английского и немецкого языков), KZ Arial (для казахского языка), абзац центрованный;

- аннотация на казахском, русском и английском языках: кегль - 10 пунктов, гарнитура - Times New Roman (для русского, английского и немецкого языков), KZ Times New Roman (для казахского языка), курсив, отступ слева-справа - 1 см, одинарный межстрочный интервал;

- текст статьи: кегль - 12 пунктов, гарнитура - Times New Roman (для русского, английского и немецкого языков), KZ Times New Roman (для казахского языка), полуторный межстрочный интервал;

- список использованной литературы (ссылки и примечания в рукописи обозначаются сквозной нумерацией и заключаются в квадратные скобки). Список литературы должен быть оформлен в соответствии с ГОСТ 7.1-84.-

напрмер:

ЛИТЕРАТУРА

1. Автор. Название статьи // Название журнала. Год издания. Том (например, Т.26.) номер (например, № 3.) страница (например С. 34. или С. 15-24.)

2. Андреева С.А. Название книги. Место издания (например, М.:) Издательство (например, Наука,) год издания. Общее число страниц в книге (например, 239 с.) или конкретная страница (например, С. 67.)

На отдельной странице (в бумажном и электронном варианте) приводятся сведения об авторе: - Ф.И.О. полностью, ученая степень и ученое звание, место работы (для публикации в разделе “Наши авторы”);

- полные почтовые адреса, номера служебного и домашнего телефонов, E-mail (для связи редакции с авторами, не публикуются);

- название статьи и фамилия (-и) автора(-ов) на казахском, русском и английском языках (для “Содержания”).

4. Иллюстрации. Перечень рисунков и подрисовочные надписи к ним представляют по тексту статьи. В электронной версии рисунки и иллюстрации представляются в формате TIF или JPG с разрешением не менее 300 dpi.

5. Математические формулы должны быть набраны как Microsoft Equation (каждая формула - один объект).

6. Автор просматривает и визирует гранки статьи и несет ответственность за содержание статьи.

7. Редакция не занимается литературной и стилистической обработкой статьи. Рукописи и дискеты не возвращаются. Статьи, оформленные с нарушением требований, к публикации не принимаются и возвращаются авторам.

8. Рукопись и дискету с материалами следует направлять по адресу:
140008, Республика Казахстан, г. Павлодар, ул. Ломова, 64,

П а в л о д а р с к и й г о с у д а р с т в е н н ы й у н и в е р с и т е т
им. С.Торайгырова,

Издательство «КЕРЕКУ»

Тел. (8 7182) 67-36-69

E-mail: publish@psu.kz

Теруге 20.03.2010ж. жіберілді. Басуға 30.03.2010 ж. қол қойылды.
Форматы 70x100 1/16. Кітап-журнал қағазы.
Көлемі шартты 6,97 б.т. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.
Компьютерде беттеген М.А. Ескожинова
Корректорлар: Г.Т. Ежиханова, Б.В. Нұрғожина
Тапсырыс №1125
Сдано в набор 20.03.2010 г. Подписано в печать 30.03.2010 г.
Формат 70x100 1/16. Бумага книжно-журнальная.
Объем 6,97 ч.-изд. л. Тираж 300 экз. Цена договорная.
Компьютерная верстка М.А. Ескожинова
Корректоры: Г.Т. Ежиханова, Б.В. Нургожина
Заказ №1125

«КЕРЕКУ» баспасы
С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік университеті
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.
67-36-69
E-mail: publish@psu.kz