



С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік  
 университетінің ғылыми журналы  
 Научный журнал Павлодарского государственного  
 университета имени С. Торайғырова

1997 ж. құрылған  
 Основан в 1997 г.



İ İ Ó  
 ÕÀÁÀÐØ ÛÑÛ

ÂÃÑÒÍ ÈÊ Ì ÑÓ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

**1-2** 2012

**ISSN 1811-1807. Вестник ПГУ**

Научный журнал Павлодарского государственного университета  
имени С. Торайгырова

**СВИДЕТЕЛЬСТВО**

о постановке на учет средства массовой информации  
№ 4533-Ж

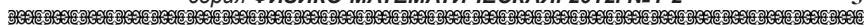
выдано Министерством культуры, информации и общественного согласия  
Республики Казахстан  
31 декабря 2003 года

Арын Е.М., д-р экон. наук, проф. (главный редактор)  
Пфейфер Н.Э., д-р пед. наук, проф. (главный редактор)  
Исинова К.С., канд. пед. наук, доцент (отв. секретарь)

**Редакционная коллегия:**

Ахметова Г.К., д-р пед. наук, проф.;  
Булатбаева К.Н., д-р пед. наук, проф.;  
Бурдина Е.И., д-р пед. наук, проф.;  
Жуматаева Е.О., д-р пед. наук, проф.;  
Каримова Р.Б., д-р псих. наук, проф.;  
Кертаева Г.М., д-р пед. наук, проф.;  
Лигай М.А., д-р пед. наук, проф.;  
Менлибекова Г.Ж., д-р пед. наук, проф.;  
Айтжанова Д.Н. (тех. редактор).

За достоверность материалов и рекламы ответственность несут авторы и рекламодатели.  
Мнение авторов публикаций не всегда совпадает с мнением редакции.  
Редакция оставляет за собой право на отклонение материалов.  
Рукописи и дискиеты не возвращаются.  
При использовании материалов журнала ссылка на «Вестник ПГУ» обязательна.



## МАЗМҰНЫ

|   |    |
|---|----|
| АЛЬЖАНОВ А.Б., ЖУКЕНОВ М.К.<br>Магнитэлектрик-пьезоэлектрик құрылымдардағы<br>электрмагниттік толқындардың таралуы туралы .....   | 9  |
| СЕЙТХАНОВА А.Қ., ИСҚАҚОВА А.Б., ИСПУЛОВ Н.А.<br>Термосерпімді жартылай кеністіктердің шекарасындағы<br>байланысқан серпімді және жылулық толқындардың шағылуы туралы .....  | 14 |
| АЛЬЖАНОВ А.Б., ДОСУМБЕКОВ К.Р.<br>Толқындық процестерді зерттеуде «Mathematica»<br>(КМЖ) компьютерлік математиканың жүйесі .....  | 22 |
| ӘМРЕНОВА Г.Ж., ЕРТАЙ Е., ХАМИТОВ М.Х.<br>Дифференциалдық теңдеудің оң периодты шешімі .....   | 27 |
| ЖҰМАБАЕВ Д.С., АСАНОВА А.Т.<br>Екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйелері<br>үшін импульстік әсері туралы .....   | 32 |
| АРИНОВ Е, СӘРСЕНБАЕВ Ж. Е.<br>Иілімді біртекті емес тау-кен жыныстарының горизонтальді қуыс<br>маңайындағы осесимметриялы серпімді-иілімді тұрақтылығының<br>өртүрлі формадағы жазықты орнықтылығының бұзылуы .....                                       | 41 |
| ИСПУЛОВ Н.А., СЕЙТХАНОВА А.К., ИСҚАҚОВА А.Б.<br>Анизотропты орталардың ромбылық және гексагоналдық<br>кластардағы термосерпімді толқындардың дифференциалдық<br>теңдеулердің жүйесін, матрицант құрылымын және<br>дисперсия теңдеулерін құру туралы ..... | 50 |
| ИСПУЛОВ Н.А., СЕЙТХАНОВА А.Қ.<br>Біртекті изотропты ортадағы рэлей толқындардың таралуы туралы .....  | 58 |
| ТЛЕУКЕНОВ С.Қ.<br>Пьезокристалдардағы таралатын электросерпімді толқындардың<br>коэффициенттер матрицасы талдауы туралы .....   | 65 |
| ТЛЕУКЕНОВ С.Қ., БЕЛЯЛОВА А.Б.<br>222 ромб сингониялы пьезокристалдағы электросерпімді<br>толқындардың таралуы туралы .....  | 72 |
| ТЛЕУКЕНОВ С.К., СЕЙТХАНОВА А.К., ИСПУЛОВ Н.А.<br>Анизотропты ортаның триклинды сингониядағы<br>термосерпімді толқындардың таралуы туралы .....  | 78 |
| ТЛЕУКЕНОВ С.Қ., ЖҰКЕНОВ М.Қ.<br>Изотропты және анизотропты диэлектрліктердің<br>шекарасындағы электрмагниттік толқындардың<br>шағылу және сыну коэффициенттері туралы .....   | 83 |
| ТЛЕУКЕНОВ С.Қ., ЗЕЙТОВА Ш.С.<br>Анизотропты орталардың тетрагоналды сингонияның<br>422 классы үшін қозғалыс теңдеулері мен максвелл теңдеулердің<br>фундаменталды шешулердің құрылымын құру .....   | 90 |

ТЛЕУКЕНОВ С.Қ., БЕЛЯЛОВА А.Б.

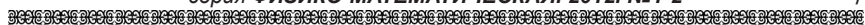
|  |     |
|--|-----|
| Анизотропты ортаның 422 тетрагоналды сингониядағы<br>электросерпімді толқындардың дисперсия теңдеулері туралы .....                        | 96  |
| ТЛЕУКЕНОВ С.Қ., ДОСАНОВ Т.С., ЖУКЕНОВ М.К. ....  | 103 |
| 42'2' классына жататын анизотропты орта шекарасында<br>ТМ электромагниттік толқынының шағылуы кезінде<br>энергия ағындарының есептеуі..... | 103 |
| <br>   |     |
| Наши авторы.....   | 151 |
| Правила для авторов .....  | 154 |
| Правила для авторов.....   | 156 |



## СОДЕРЖАНИЕ

|  |    |
|--|----|
| АЛЬЖАНОВ А.Б., ЖУКЕНОВ М.К.<br>О распространении электроупругих волн в структуре<br>магнитоэлектрик-пьезоэлектрик .....  | 9  |
| СЕЙТХАНОВА А.К., ИСКАКОВА А.Б., ИСПУЛОВ Н.А.<br>Об отражении связанных упругих и тепловых волн на границе<br>анизотропных термоупругих полупространств.....  | 14 |
| АЛЬЖАНОВ А.Б., ДОСУМБЕКОВ К.Р.<br>Система компьютерной математики (СКМ)<br>«Mathematica» при изучении волновых процессов.....  | 22 |
| ӘМРЕНОВА Г.Ж., ЕРТАЙ Е., ХАМИТОВ М.Х.<br>Дифференциалдық теңдеудің оң периодты шешімі .....  | 27 |
| ДЖУМАБАЕВ Д.С., АСАНОВА А.Т.<br>Об импульсном воздействии для систем<br>гиперболических уравнений второго порядка .....  | 32 |
| АРИНОВ Е., САРСЕНБАЕВ Ж.Е.<br>О различных формах плоской потери устойчивости осесимметричного<br>упругопластического равновесия пластического неоднородного<br>массива горных пород .....  | 41 |
| ИСПУЛОВ Н.А., СЕЙТХАНОВА А.К., ИСКАКОВА А.Б.<br>О построении системы дифференциальных уравнений,<br>структуры матрицанта и уравнений дисперсии термоупругих волн в<br>анизотропных средах ромбической и гексагональной классов ..... | 50 |
| ИСПУЛОВ Н.А., СЕЙТХАНОВА А.К.<br>О распространении рэлеевских волн<br>в неоднородной изотропной среде .....  | 58 |
| ТЛЕУКЕНОВ С.К.<br>Об анализе матриц коэффициентов электроупругих волн,<br>распространяющихся в пьезокристаллах .....   | 65 |
| ТЛЕУКЕНОВ С.К., БЕЛЯЛОВА А.Б.<br>О распространении электроупругих волн<br>в пьезокристаллах ромбической сингонии 222 .....   | 72 |
| ТЛЕУКЕНОВ С.К., СЕЙТХАНОВА А.К., ИСПУЛОВ Н.А.<br>О распространении термоупругих волн<br>в анизотропной среде триклинной сингонии .....   | 78 |
| ТЛЕУКЕНОВ С.К., ЖУКЕНОВ М.К.<br>О коэффициентах отражения и преломления<br>электромагнитных волн на границе изотропного<br>и анизотропного диэлектриков .....  | 83 |
| ТЛЕУКЕНОВ С.К., ЗЕЙТОВА Ш.С. ....  | 90 |
| Построение структуры фундаментальных решений<br>уравнений движения и уравнений максвелла<br>в случае анизотропных сред тетрагональной сингонии класса 422.....   | 90 |

|  |     |
|--|-----|
| ТЛЕУКЕНОВ С.К., БЕЛЯЛОВА А.Б. ....   | 96  |
| Об уравнениях дисперсии электроупругих волн<br>в анизотропной среде тетрагональной сингонии 422 .....  | 96  |
| ТЛЕУКЕНОВ С.К., ДОСАНОВ Т.С., ЖУКЕНОВ М.К.<br>Расчет потоков энергии при отражении электромагнитной<br>ТМ волны от анизотропной среды класса 42'2' ..... | 103 |
| Наши авторы .....  | 151 |
| Правила для авторов .....  | 154 |
| Правила для авторов .....  | 156 |



## CONTENTS

|  |    |
|--|----|
| ALZHANOV A.B., ZHUKENOV M.K.<br>About propagation of electromagnetic waves in structure<br>of magnitoelektrik-piezoelectric material .....   | 9  |
| SEYTHANOVA A.K., ISKAKOVA A.B., ISPULOV N.A.<br>About the reflection of the bound elastic and thermal<br>waves on border of thermoelastic semispaces.....  | 14 |
| АЛЬЖАНОВ А.Б., ДОСУМБЕКОВ К.Р.<br>Application of a mathematical package<br>«Mathematica» in studying of wave processes .....   | 22 |
| AMRENOVA G.ZH., ERTAI E., KHAMITOV V.KH.<br>The positive periodic solutions of differential equations .....  | 27 |
| DHUMABAEV D.S., ASANOVA A.T.<br>About impulse effect<br>for system of hyperbolic equations of second order .....   | 32 |
| ARINOV E., SARSENBAEV ZH. Y.<br>Various forms of flat loss of stability of asymmetric elastic-plastic<br>equilibrium of plastic heterogeneous massif of rocks around horizontal PIT.....   | 41 |
| ISPULOV N.A., SEYTHANOVA A.K., ISKAKOVA A.B.<br>About creation of system of differential equations, structures<br>of the matriciant and the equations of dispersion of thermoelastic<br>waves in non-isotropic mediums rhombic and hexagonal classes ..... | 50 |
| ISPULOV N.A., SEYTKHANOVA A.K.<br>About propagation rayleigh waves in the non-uniform isotropic medium .....   | 58 |
| TLEUKENOV S.<br>About the analysis of matrixes of factors of the electroelastic<br>waves extending in piezocrystals .....  | 65 |
| TLEUKENOV S.K., BELYLOVA A.B.<br>About propagation of electroelastic waves in rhombic<br>singoniya's piezocrystals 222 .....   | 72 |
| TLEUKENOV S.K., SEYTKHANOVA A.K., ISPULOV N.A.<br>About distribution of thermoelastic waves in triklinna<br>singoniya's non-isotropic medium .....   | 78 |
| TLEUKENOV S.K., ZHUKENOV M.K.<br>Reflectivities and refractives of an electromagnetic<br>waves on border of an isotropic dielectric and<br>anisotropic of a dielectric .....   | 83 |
| TLEUKENOV S.K., ZEITOVA SH.<br>Creation of structure of fundamental solutions of equations<br>of motion and maxwell's equations in case of tetragonal<br>singoniya's non-isotropic mediums of the class 422 .....  | 90 |
| TLEUKENOV S.K., BELYLOVA A.B.<br>About the equations of dispersion of electroelastic waves<br>in tetragonal singony's non-isotropic medium 422 .....   | 96 |

ТЛЕУКЕНОВ С.К., ДОСАНОВ Т.С., ЗХУКЕНОВ М. К.

Calculation of streams of energy at reflection electromagnetic  
TM waves from the anisotropic environment of the class 42'2'

.....103

Наши авторы.....151

Правила для авторов .....154

Правила для авторов.....156

**А.Б. АЛЬЖАНОВ, М.К. ЖУКЕНОВ**  
**О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В**  
**СТРУКТУРЕ МАГНИТОЭЛЕКТРИК-ПЬЕЗОЭЛЕКТРИК**

1. Уравнения движения упругих анизотропных сред и уравнений Максвелла для электромагнитных волн для сред с указанными свойствами, могут быть приведены к системам уравнений 1-го порядка:

$$\frac{d\vec{W}}{dz} = B_1 \vec{W} \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{W}}{dz} = B_2 \vec{W} \quad (2)$$

Вектор  $\vec{W}$  имеет следующие компоненты:

$$\vec{W} = (U_z, U_x, U_y, E_z, E_x, E_y, H_z, H_x, H_y) \quad (3)$$

Учет малости толщины слоев ( $\lambda \gg h_1, h_2$ ) и представление уравнений (1) и (2) в конечно-разностном виде приводит к уравнению:

$$\frac{d\vec{W}}{dz} = B \vec{W} \quad (4)$$

где

$$B = B_1 + B_2; \quad = \frac{h_1}{h_1 + h_2}; \quad = \frac{h_2}{h_1 + h_2} \quad (5)$$

Физико-механические свойства рассматриваемых сред учитываются элементами матрицы  $B$ .

2. Структура матрицы  $B$  в случае гетероструктуры магнитоэлектрик-пьезоэлектрик, при распространении электроупругой волны в направлении неоднородности имеет следующий вид ( $k_x = 0, k_y = 0$ ) [1, 2]:

$$\begin{matrix}
 & 0 & b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & b_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \div \\
 & 0 & 0 & 0 & b_{34} & 0 & 0 & b_{37} & 0 & 0 & 0 \div \\
 & 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \div \\
 B = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 & 0 & b_{510} \div \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \div \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} & 0 & b_{710} \div \\
 & 0 & 0 & 0 & i & b_{37} & 0 & 0 & b_{87} & 0 & b_{89} \div \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & b_{510} & 0 & b_{710} & 0 & b_{910} \div \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{89} & 0 & b_{109} & 0 & 0 \div
 \end{matrix} \quad (6)$$

Построен матрицант (нормированное решение) системы дифференциальных уравнений 1-го порядка с переменными коэффициентами (4) [3]:

$$\begin{matrix}
 & t_{22} & t_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & t_{21} & t_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \div \\
 & 0 & 0 & t_{44} & t_{34} & 0 & 0 & \frac{t_{84}}{i} & \frac{t_{74}}{i} & \frac{t_{104}}{i} & \frac{t_{94}}{i} \div \\
 & 0 & 0 & t_{43} & t_{33} & 0 & 0 & \frac{t_{83}}{i} & \frac{t_{73}}{i} & 0 & \frac{t_{93}}{i} \div \\
 T^{-1} = & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{66} & t_{56} & \frac{t_{86}}{i} & \frac{t_{76}}{i} & \frac{t_{76}}{i} & \frac{t_{96}}{i} \div \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{65} & t_{55} & \frac{t_{85}}{i} & 0 & \frac{t_{105}}{i} & \frac{t_{95}}{i} \div \\
 & 0 & 0 & i & t_{48} & i & t_{38} & 0 & i & t_{58} & t_{88} & t_{78} & t_{108} & t_{98} \div \\
 & 0 & 0 & i & t_{47} & i & t_{37} & i & t_{67} & i & t_{57} & t_{87} & t_{77} & t_{107} & t_{97} \div \\
 & 0 & 0 & i & t_{410} & i & t_{310} & i & t_{610} & i & t_{510} & t_{810} & t_{710} & t_{1010} & t_{910} \div \\
 & 0 & 0 & 0 & i & t_{39} & i & t_{69} & i & t_{59} & t_{89} & t_{79} & t_{109} & t_{99} \div
 \end{matrix} \quad (7)$$

3. Для получения уравнений дисперсии необходимо найти корни характеристического уравнения. Характеристическое уравнение определяются из условия:

$$\det[P - E] = 0 \quad (8)$$

где P – важная для регулярных структур матрица, определяется как:

$$P = \frac{1}{2}(T + T^{-1}) \quad (9)$$

Для рассматриваемого случая матрица P имеет следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix}
 p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & p_{33} & 0 & 0 & 0 & p_{37} & p_{38} & p_{39} & p_{310} \\
 0 & 0 & 0 & p_{33} & 0 & 0 & p_{47} & p_{48} & 0 & p_{410} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} & 0 & p_{57} & p_{58} & p_{59} & p_{510} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} & p_{67} & 0 & p_{69} & p_{610} \\
 0 & 0 & i p_{48} & i p_{38} & 0 & i p_{58} & p_{77} & 0 & p_{79} & p_{710} \\
 0 & 0 & i p_{47} & i p_{47} & i p_{67} & i p_{57} & 0 & p_{77} & p_{89} & p_{810} \\
 0 & 0 & i p_{410} & i p_{310} & i p_{610} & i p_{510} & p_{810} & p_{710} & p_{99} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & i p_{39} & i p_{69} & i p_{59} & p_{89} & p_{79} & 0 & p_{99}
 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Условие (8) совместно с (10) приводит к системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 & p_{11} = 0 \\
 & 4 + a^3 + b^2 + c - d = 0
 \end{aligned} \quad (11)$$

где a, b, c, d – коэффициенты выражаемые через элементы матрицы P.

Корни системы уравнений (17) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & 1 = p_{11} \\
 & 2 = \frac{1}{12} (3a + 6) + \sqrt[3]{3(6a^2 + 16b + 2) + \sqrt[3]{4} \frac{4\sqrt[3]{2}(b^2 + 3(ac + 4d))}{1} + \frac{3(a^3 + 4ab + 8c)}{2}} \\
 & 3 = \frac{1}{12} (3a + 6) + \sqrt[3]{3(6a^2 + 16b + 2) + \sqrt[3]{4} \frac{4\sqrt[3]{2}(b^2 + 3(ac + 4d))}{1} + \frac{3(a^3 + 4ab + 8c)}{2}} \\
 & 4 = \frac{1}{12} (3a + 6) + \sqrt[3]{3(6a^2 + 16b + 2) + \sqrt[3]{4} \frac{4\sqrt[3]{2}(b^2 + 3(ac + 4d))}{1} + \frac{3(a^3 + 4ab + 8c)}{2}} \\
 & 5 = \frac{1}{12} (3a + 6) + \sqrt[3]{3(6a^2 + 16b + 2) + \sqrt[3]{4} \frac{4\sqrt[3]{2}(b^2 + 3(ac + 4d))}{1} + \frac{3(a^3 + 4ab + 8c)}{2}}
 \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}
 & 1 = \sqrt[3]{2b^3 + 9acb + 72db + 27c^2 + 27a^2d + \sqrt{(2b^3 + 9acb + 72db + 27c^2 + 27a^2d)^2 - 4(b^2 + 3(ac + 4d))^3}} \\
 & 2 = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}} \frac{2b}{3} + \frac{\sqrt[3]{2}(b^2 + 3ac + 12d)}{3}
 \end{aligned}$$

Поскольку  $\cos k_i h = \dots$ , то из (12) следуют искомые уравнения дисперсии в явном аналитическом виде.

Последовательная подстановка численных значений в матрицы В, Т, Т-1, Р и корни системы уравнений (11) позволяет провести численный анализ.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тлеукунов С.К., Зейтова Ш.С. Магнит-электрлік эффектiсi бар анизотропты ортада магниттi-серпiмдi толқындардың таралуы // «Механиканың және машинажасаудың өзектi мәселелерi» атты халықаралық ғылыми конференцияның материалдары, т.1, 330-333 б. Алматы, Қ.И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТУ, 17-19 маусым, 2005.

2. Тлеукунов С.К., Билялова А.Б. Распространение пьезоупругих волн в анизотропных средах с магнитоэлектрическим эффектом // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиноведения», т.1, с. 326-329. Алматы, КазНТУ им. К.И. Сатпаева, 17-19 июня, 2005.

3. Тлеукунов С.К. Метод матрицанта. Павлодар, НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004, 151 с.

Подъяпольский Г.С. Отражение и преломление на границе двух сред в случае нежесткого контакта. Изв. АН СССР, Сер. Географическая, 1963, №4, с. 525-531.

4. Тлеукунов С.К. Об условиях контакта упругих сред с тонкой прослойкой. В кн. Математические вопросы теории распространения волн. Зап. научн. семин. ЛОМИ им. В.А. Стеклова АН СССР, т. 173, 1988, с. 163-166.

5. Тлеукунов С.К. О поглощении энергии и разрыве смещений на границах с нежесткими контактами. В кн. Математические вопросы теории распространения волн. Зап. научн. семин. ЛОМИ им. В.А. Стеклова АН СССР, т. 128, 1983, с. 166-171.

Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар. Материал поступил в редакцию 15.08.2012 г.

А.Б. АЛЪЖАНОВ, М.К. ЖУКЕНОВ  
МАГНИТЭЛЕКТРИК-ПЬЕЗОЭЛЕКТРИК ҚҰРЫЛЫМДАРДАҒЫ  
ЭЛЕКТРМАГНИТТІК ТОЛҚЫНДАРДЫҢ ТАРАЛУЫ ТУРАЛЫ  
A.B. ALZHANOV, M.K. ZHUKENOV  
ABOUT PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN  
STRUCTURE OF MAGNITOELEKTRIK-PIEZOELECTRIC MATERIAL



### Түйіндеме

Берілген физика-механикалық қасиеттерге ие болатын жасанды материалдарды жасаудың бір бағыты көп қабатты гетероқұрылымдар болып табылады. Осындай орталарда табиғаты әртүрлі толқындардың таралу заңдылықтарын зерттеу акусто-оптоэлектроникада әртүрлі құралдар мен құрылғыларды құрастыру үшін ерекше қызығушылық тудырады. Мұнда табиғаты әртүрлі толқындардың гетероқұрылымдардағы әрекеттесуін, олардың өзара трансформациясын, генерация мүмкіншілігін, толқындық процестерді басқаруды және күшеюін зерттеу аса перспективті және кокейкесті болып табылады. Толқындардың өзара трансформациясына, механикалық (серпімді) энергияның электрмагниттік энергияға және керісінше түрлендірілуіне әкелетін физикалық орталар пьезоэлектрлік, пьезомагниттік, магнитстрикциялық және бірқатар басқа эффектілерге ие болады. Бір-біріне әсер етумен, табиғаты әртүрлі толқындарды генерациялаумен бірге өтетін анизотропты ортадағы толқындық процестерді талдауда бірқатар мәселелер пайда болады. Біріншіден кристалдық анизотропты ортаның серпімді, диэлектрлік, пьезосерпімді және басқа материалдық қасиеттерді қосатын физика-механикалық параметрлердің көп болуы. Екінші, аса маңызды мәселе, изотропты орта үшін әзірленген математикалық аппаратты және физикалық ұғымдарды қолдану мүмкіншілігінің жоқтығы. Осы жұмыста матрицанттың матрицалық әдісі негізінде, жұқа қабаттардан тұратын, пьезоэлектрлік және магнитэлектрлік эффектілерге ие болатын гетероқұрылымдар қарастырылады. Аналитикалық түрде толқындар дисперсиясының теңдеулері алынған.

### Resume

*One of directions of creation of artificial materials with the set physico-mechanical properties is multilayered heterostructures. Research of laws of distribution of waves of the various nature in similar environments represents special interest for designing of various devices in akusto-optoelectronics. Thus the most perspective and actual is studying of interaction of waves of the various nature in heterostructures, their mutual transformation, possibility of generation, strengthening and management of wave processes. The physical environments leading to mutual transformation, transformation of mechanical (elastic) energy in electromagnetic and back, possess piezoelectric, piezomagnetic, magnetostrictive and a number of other effects. The analysis of wave processes in the anisotropic environments accompanied by interference, generation of waves of the various nature is connected with a number of serious problems. First, this abundance of the physico-mechanical*

*parametres, including elastic, dielectric, piezoelastic and other material properties of crystal anisotropic environments. Second, deeper problem, the basic impossibility of application of a mathematical apparatus and physical concepts developed for isotropic environments is. In the given work on the basis of a matrix method of matrizer the heterostructure consisting of thin layers, possessing piezoelectric and magnetoelectric effects is considered. The equations of a dispersion of waves in an analytical kind are received.*

УДК 539.3:534.2

**А.К. СЕЙТХАНОВА, А.Б. ИСКАКОВА, Н.А. ИСПУЛОВ  
ОБ ОТРАЖЕНИИ СВЯЗАННЫХ УПРУГИХ И  
ТЕПЛОВЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ АНИЗОТРОПНЫХ  
ТЕРМОУПРУГИХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ**

Матрица коэффициентов  $B$  в случае распространения термоупругой волны в анизотропной среде тетрагональной сингонии классов  $4, \bar{4}, 4/m$  в одномерном случае ( $m=0, n=0$ ) [1]:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega b_{17} & b_{87} & 0 \end{pmatrix}; \quad (1)$$

Компоненты матрицы коэффициентов (1) имеют вид:

$$b_{12} = \frac{1}{c_{33}}, \quad b_{17} = \frac{(2\beta_{13} + \beta_{33})}{c_{33}}, \quad b_{21} = -\omega^2 \rho,$$

$$b_{87} = -i\omega \left( \frac{\beta_{33}^2}{c_{11}} + \frac{c_{\varepsilon}}{T_0} \right), \quad b_{78} = -\frac{1}{\lambda_{33}}.$$

Во втором приближении имеем

$$P_{(2)} = E + \frac{B^2}{2} h^2; \quad (2)$$

где  $E$  – единичная матрица,  
 $B$  – матрица коэффициентов,  
 $h$  – период неоднородности.

$$P_{(2)} = \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega b_{17} & b_{87} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega b_{17} & b_{87} & 0 \end{pmatrix} + E =$$

$$= \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & P_{14} \\ 0 & P_1 & P_{23} & 0 \\ 0 & -i\omega P_{14} & P_2 & 0 \\ -i\omega P_{23} & 0 & 0 & P_2 \end{pmatrix}; \quad (3)$$

Компоненты матрицы коэффициентов (3) имеют вид:

$$P_1 = 1 + \frac{1}{2} h^2 b_{12} b_{21}; \quad P_{14} = \frac{1}{2} h^2 b_{17} b_{78};$$

$$P_{23} = \frac{1}{2} h^2 b_{17} b_{21}; \quad P_2 = 1 + \frac{1}{2} h^2 b_{78} b_{87};$$

В связи с широким применением периодически неоднородные среды являются одним из важных классов неоднородных сред. Структура фундаментальных решений дает возможность определить самые общие уравнения дисперсии термоупругих волн в периодически неоднородных средах.

Условием существования нетривиальных решений для определения волновых чисел, является равенство следующего определителя [2]:

$$\det|P_{(2)} - \lambda E| = 0; \quad (4)$$

Корни характеристического уравнения имеют вид:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{b_{12} b_{21}}{2} + \frac{b_{78} b_{87}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{b_{12}^2 b_{21}^2 - 2b_{12} b_{21} b_{78} b_{87} + b_{78}^2 b_{87}^2 - 4i\omega b_{17}^2 b_{21} b_{78}}};$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\frac{b_{12} b_{21}}{2} + \frac{b_{78} b_{87}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{b_{12}^2 b_{21}^2 - 2b_{12} b_{21} b_{78} b_{87} + b_{78}^2 b_{87}^2 - 4i\omega b_{17}^2 b_{21} b_{78}}}; \quad (5)$$

$$\lambda_3 = \sqrt{\frac{b_{12} b_{21} + b_{78} b_{87} - \sqrt{b_{12}^2 b_{21}^2 - 2b_{12} b_{21} b_{78} b_{87} + b_{78}^2 b_{87}^2 - 4i\omega b_{17}^2 b_{21} b_{78}}}{2}};$$

$$\lambda_4 = -\sqrt{\frac{b_{12}b_{21} + b_{78}b_{87} - \sqrt{b_{12}^2b_{21}^2 - 2b_{12}b_{21}b_{78}b_{87} + b_{78}^2b_{87}^2} - 4i\omega b_{17}^2b_{21}b_{78}}{2}};$$

Абсолютным значением волновых векторов упругой и тепловой волны второй среды  $k$  и  $\chi$  равны:

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}(-b_{12}b_{21} - \sqrt{(b_{12}b_{21} - b_{78}b_{87})^2 - 4i\omega b_{17}^2b_{21}b_{78}})}; \quad (6)$$

$$\chi = \sqrt{\frac{1}{2}(-b_{12}b_{21} + \sqrt{(b_{12}b_{21} - b_{78}b_{87})^2 - 4i\omega b_{17}^2b_{21}b_{78}})};$$

Матрица  $\Pi$  имеет вид:

$$\Pi = \frac{1}{\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2} (P_{(2)} - \frac{1}{2}(\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)E); \quad (7)$$

В матричном виде уравнение (7) примет вид:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_1 & 0 & 0 & \Pi_{14} \\ 0 & \Pi_1 & \Pi_{23} & 0 \\ 0 & -i\omega\Pi_{14} & -\Pi_1 & 0 \\ -i\omega\Pi_{23} & 0 & 0 & -\Pi_1 \end{pmatrix}; \quad (7)'$$

Компоненты матрицы коэффициентов (7)' имеют вид:

$$\Pi_1 = \frac{b_{12}b_{21} - b_{78}b_{87}}{2(\chi^2 - k^2)}; \quad \Pi_{14} = \frac{b_{17}b_{78}}{\chi^2 - k^2}; \quad \Pi_{23} = \frac{b_{17}b_{21}}{\chi^2 - k^2};$$

В рамках метода матрицанта усредненный матрицант, описывающий распространение связанных гармонических термоупругих волн в анизотропных средах с термомеханическим эффектом имеет вид [2]:

$$T_{\text{уср}}^{\pm} = \left(\pi + \frac{1}{2}E\right) \left(E \cos kz \pm \frac{B}{k} \sin kz\right) - \left(\pi - \frac{1}{2}E\right) \left(E \cos \chi z \pm \frac{B}{\chi} \sin \chi z\right) \quad (8)$$

$$\frac{d\vec{W}}{dz} = B\vec{W} \quad \vec{W} = (U_z, \sigma_{zz}, U_x, \sigma_{xz}, U_y, \sigma_{yz}, \theta, q_z)$$

где

$$\cos kz = \frac{e^{ikz} + e^{-ikz}}{2}; \quad \sin kz = \frac{e^{ikz} - e^{-ikz}}{2}; \quad (9)$$

С учетом (9) и принимая, что физический смысл имеет  $e^{-ik(\chi z)}$  (8) запишется в виде:

$$T = \left(\Pi + \frac{1}{2}E\right) \frac{1}{2} \left(Ee^{-ikz} - \frac{B}{ik}e^{-ikz}\right) - \left(\Pi - \frac{1}{2}E\right) \frac{1}{2} \left(Ee^{-i\chi z} - \frac{B}{\chi}e^{-i\chi z}\right); \quad (10)$$

Усредненный матрицант  $T_0^+$  в этом случае для термоупругой среды примет вид:

$$T_0^+ = \left(\Pi + \frac{1}{2}E\right)\left(E - \frac{B}{ik}\right) - \left(\Pi - \frac{1}{2}E\right)\left(E - \frac{B}{i\chi}\right); \quad (11)$$

Структура матрицанта (11) примет вид:

$$T_0^\pm = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & 0 \\ t_{21} & 1 & 0 & t_{24} \\ t_{31} & 0 & 1 & t_{34} \\ 0 & t_{42} & t_{43} & 1 \end{pmatrix}; \quad (12)$$

где

$$t_{12} = -b_{12}b_{78}b_{87} - i\omega b_{17}^2b_{78} + \sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{13} = b_{17}\sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{21} = -b_{21}b_{78}b_{87} + \sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{24} = b_{17}b_{21}b_{78};$$

$$t_{31} = -i\omega b_{17}b_{21}b_{78};$$

$$t_{34} = -b_{12}b_{21}b_{78} + \sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{42} = -i\omega b_{17}\sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

$$t_{43} = -b_{12}b_{21}b_{87} - i\omega b_{17}^2b_{21} + \sqrt{b_{21}b_{78}(b_{12}b_{87} + i\omega b_{17}^2)};$$

При  $z=0$  усредненный матрицант (11) может быть записан в виде:

$$T_0^\pm = \frac{1}{2}E \mp R; \quad (13)$$

Матрица  $R$  имеет вид:

$$R = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} k - \chi \\ k\chi \end{pmatrix} \pi B - \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} k + \chi \\ k\chi \end{pmatrix} B \quad (14)$$

где

$$R = \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & 0 & 0 & r_{24} \\ -i\omega r_{24} & 0 & 0 & r_{34} \\ 0 & -i\omega r_{13} & r_{43} & 0 \end{pmatrix}; \quad (15)$$

Компоненты матрицы (15) получены в виде:

$$\begin{aligned} r_{12} &= -i\omega b_{17}^2 b_{78} + b_{12}(-b_{78} b_{87} + \sqrt{b_{21} b_{78} (i\omega b_{17}^2 + b_{12} b_{87})}); \\ r_{13} &= b_{17} \sqrt{b_{21} b_{78} (i\omega b_{17}^2 + b_{12} b_{87})}; \\ r_{21} &= b_{21}(-b_{78} b_{87} + \sqrt{b_{21} b_{78} (i\omega b_{17}^2 + b_{12} b_{87})}); \\ r_{24} &= b_{17} b_{21} b_{78}; \\ r_{34} &= b_{78}(-b_{12} b_{21} + \sqrt{b_{21} b_{78} (i\omega b_{17}^2 + b_{12} b_{87})}); \\ r_{43} &= -i\omega b_{17}^2 b_{21} + b_{87}(-b_{12} b_{21} + \sqrt{b_{21} b_{78} (i\omega b_{17}^2 + b_{12} b_{87})}); \end{aligned}$$

Полагая:  $\vec{U}_P$  - поле падающих волн,  $\vec{U}_R$  - поле отраженных волн и  $\vec{U}_t$  - поле преломленных волн, на основе [3]

$$\vec{U}_P + \vec{U}_R = \vec{U}_t \quad (16)$$

имеем:

$$T_0^P \vec{U}_P + T_0^R \vec{U}_R = T_0^t \vec{U}_t \text{ при } z = 0$$

или

$$\left(\frac{1}{2}E - R_0\right)\vec{U}_P + \left(\frac{1}{2}E + R_0\right)\vec{U}_R = \left(\frac{1}{2}E - R_t\right)\vec{U}_t \quad (17)$$

Учитывая непрерывность полей на контакте сред (16), получим:

$$R_0 \vec{U}_P - R_0 \vec{U}_R = R_t \vec{U}_t \quad (18)$$

С учетом (16) выражение (18) есть искоемое граничное условие для векторов  $\vec{U}_P, \vec{U}_R, \vec{U}_t$  в матричной форме.

В (16) и (18) неизвестны вектора  $\vec{U}_R$  и  $\vec{U}_t$ . Подстановка (16) в (18) дает уравнение:

$$(R_0 + R_t)\vec{U}_R = (R_0 - R_t)\vec{U}_P$$

откуда следует представление для отраженных волн:

$$\vec{U}_R = (R_0 + R_t)^{-1} (R_0 - R_t) \vec{U}_0$$

Поле преломленных волн  $\vec{U}_t$  определяется формулой (16).

Пусть

$$R_0 + R^t = Q_l \quad R_0 - R^t = Q_2 \tag{19}$$

Тогда

$$\vec{U}_R = (Q)^{-1} (Q) \vec{U}_P \tag{20}$$

Элементы матриц  $Q^+$  и  $Q$  определяются как

$$\tau_{ij}^+ = r_{ij}^0 + r_{ij}^t, \quad \tau_{ij}^- = r_{ij}^0 - r_{ij}^t; \tag{21}$$

Поле отраженных волн:

$$\vec{U}_R = G \vec{U}_P; \tag{22}$$

Из (16):

$$\vec{U}_R = \vec{U}_t - \vec{U}_P; \tag{23}$$

Подставляя (23) в (22) получим поле преломленных волн [4]:

$$\vec{U}_t = (G + E) \vec{U}_P; \tag{24}$$

где

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & g_{14} \\ 0 & g_{22} & g_{23} & 0 \\ 0 & g_{32} & g_{33} & 0 \\ g_{41} & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix}; \tag{25}$$

элементы матрицы  $G$  получены в виде:

$$g_{11} = -1 + \frac{2b_{21}(b_{78} + \alpha\chi r_{34})}{b_{21}(b_{78} + \alpha\chi r_{34}) + ak(i\omega\chi r_{24}^2 + r_{21}(b_{78} + \alpha\chi r_{34}))};$$

$$g_{14} = -\frac{2ab_{78}kr_{24}}{b_{21}(b_{78} + \alpha\chi r_{34}) + ak(i\omega\chi r_{24}^2 + r_{21}(b_{78} + \alpha\chi r_{34}))};$$

$$g_{22} = -1 + \frac{2b_{12}(b_{87} + \alpha\chi r_{43})}{b_{12}(b_{87} + \alpha\chi r_{43}) + ak(i\omega\chi r_{13}^2 + r_{12}(b_{87} + \alpha\chi r_{43}))};$$

$$g_{23} = -\frac{2ab_{87}kr_{13}}{b_{12}(b_{87} + \alpha\chi r_{43}) + ak(i\omega\chi r_{13}^2 + r_{12}(b_{87} + \alpha\chi r_{43}))};$$

$$g_{32} = \frac{2i\omega b_{12}\chi r_{13}}{b_{12}(b_{87} + \alpha\chi r_{43}) + ak(i\omega\chi r_{13}^2 + r_{12}(b_{87} + \alpha\chi r_{43}))};$$

$$g_{33} = -1 + \frac{2b_{87}(b_{12} + akr_{12})}{b_{12}(b_{87} + \alpha\chi r_{43}) + ak(i\omega\chi r_{13}^2 + r_{12}(b_{87} + \alpha\chi r_{43}))};$$

$$g_{41} = \frac{2i\omega b_{21}\chi r_{24}}{b_{21}(b_{78} + \alpha\chi r_{34}) + ak(i\omega\chi r_{24}^2 + r_{21}(b_{78} + \alpha\chi r_{34}))};$$

$$g_{44} = -1 + \frac{2b_{78}(b_{21} + akr_{21})}{b_{21}(b_{78} + \alpha\chi r_{34}) + ak(i\omega\chi r_{24}^2 + r_{21}(b_{78} + \alpha\chi r_{34}))};$$

Поскольку

$$\vec{U}_R = (U_{zR}, \sigma_{zR}, \theta_R, q_{zR})$$

$$\vec{U}_t = (U_{zt}, \sigma_{zt}, \theta_t, q_{zt}) \quad (26)$$

полагая

$$\vec{U}_P = (U_{zP}, \sigma_{zP}, 0, 0) \quad (27)$$

Подставляя в уравнение (22), получим поле отраженных волн:

$$\begin{pmatrix} U_{zR} \\ \sigma_{zR} \\ \theta_R \\ q_{zR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & g_{14} \\ 0 & g_{22} & g_{23} & 0 \\ 0 & g_{32} & g_{33} & 0 \\ g_{41} & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} U_{zP} \\ \sigma_{zP} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$U_{zR} = g_{11}U_{zP}; \quad \sigma_{zR} = g_{22}\sigma_{zP};$$

$$\theta_R = g_{32}\sigma_{zP}; \quad q_{zR} = g_{41}U_{zP};$$

Подставляя в уравнение (24) получим поле преломленных волн:

$$\begin{pmatrix} U_{zt} \\ \sigma_{zt} \\ \theta_t \\ q_{zt} \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & g_{14} \\ 0 & g_{22} & g_{23} & 0 \\ 0 & g_{32} & g_{33} & 0 \\ g_{41} & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] * \begin{pmatrix} U_{zP} \\ \sigma_{zP} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (29)$$

$$U_{zt} = (1 + g_{11})U_{zP}; \quad \sigma_{zt} = (1 + g_{22})\sigma_{zP};$$

$$\theta_t = g_{32}\sigma_{zP}; \quad q_{zt} = g_{41}U_{zP};$$



Таким образом, работа посвящена приложению матричного метода матрицанта к изучению распространения связанных упругих и тепловых волн в анизотропной среде. В работе аналитически решена задача отражения-преломления упругой волны на границе термоупругого пространства.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.К. Тлеукунов, М.К. Кудерин, В.А. Козионов, Н.А. Испулов Е.К. Баяубаев, А.К. Сейтханова Динамические и термодинамические процессы в скальных грунтах и строительных конструкциях. Монография под ред. академика АЕН, д.ф.-м.н., профессора С.К. Тлеукунова.- Павлодар, 2006.

2. С.К. Тлеукунов Метод матрицанта. Павлодар, НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004, 148 с.

3. С.К. Тлеукунов, А.К. Сейтханова, М.Н. Ильясов, К.Р. Досумбеков О матричной формулировке задачи отражения и преломления термоупругих волн // Материалы международной научной конференции «Вторые Ержановские чтения», г. Актобе, 2007 г.

4. С.К. Тлеукунов, А.К. Сейтханова, К.Р. Досумбеков О коэффициентах отражения и преломления упругих и термоупругих волн // Материалы международной научной конференции «Вторые Ержановские чтения», г. Актобе, 2007 г.

5. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1986, 556 с.

6. Ш.М. Айтиалиев, С.К. Тлеукунов, А.К. Сейтханова / 4 класты тетрагоналды сингониялы анизотропты ортада термосерпімді толқындардың таралуы туралы. Вестник КазНПУ им. Абая, Серия механика, физика, информатика, Алматы, 2007.

Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар. Материал поступил в редакцию 15.08.2012 г.

А.К. СЕЙТХАНОВА, А.Б. ИСҚАҚОВА, Н.А. ИСПУЛОВ  
ТЕРМОСЕРПІМДІ ЖАРТЫЛАЙ КЕНІСТІКТЕРДІҢ  
ШЕКАРАСЫНДАҒЫ БАЙЛАНЫСҚАН СЕРПІМДІ ЖӘНЕ ЖЫЛУЛЫҚ  
ТОЛҚЫНДАРДЫҢ ШАҒЫЛУ ТУРАЛЫ

A.K. SEYTHANOVA, A.B. ISKAKOVA, N.A. ISPULOV  
ABOUT THE REFLECTION OF THE BOUND ELASTIC AND THERMAL  
WAVES ON BORDER OF THERMOELASTIC SEMISPACES

#### *Түйіндеме*

*Термомеханикалық эффектімен болатын серпімді орталарда толқындық процестердің заңдылықтарды зерттеу актуалдығы, геофизика, сейсмология, композиттік материалдардың*

механикасының теориялық және қолданбалы есептерді шешуінде қажеттілігімен байланысты. Байланысқан қозғалыс теңдеулері мен жылуоткізгіштік теңдеулері физика–механикалық параметрлердің күрделілігі мен көп болуымен ерекшеленеді. Осыған байланысты деформацияланатын қатты дене механикасының – термосерпімділік деген тарауы қарқынды дамып келеді. Осы бағыттың аясында анизотропты орталардың кейбір физика–механикалық қасиеттерін қолдана отырып, байланысқан жылулық және механикалық өрістер зерттеледі. Берілген мақалада, матрицант әдісі негізінде, 4-ші ретті коэффициенттер матрицалары үшін, біртекті анизотропты термосерпімді орталардың шекарасындағы толқындардың шағылу–сыну есебі қарастырылған.

### **Resume**

*The urgency of research of laws of wave processes in elastic environments with thermo mechanical effect is connected with necessity of the decision of theoretical and applied problems of geophysics, seismology, mechanics of composite materials etc. Connected equations of movement and the heat conductivity equation differ complexity and an abundance of physical–mechanical parameters. In this connection the section of mechanics of a deformable firm body, - thermo elasticity intensively develops. Within the limits of this direction, leaning against use of certain physical–mechanical properties anisotropic environments, the connected thermal and mechanical fields are studied. In given article, on the basis of a method matrizant, the decision of a problem of reflexion-refraction of waves on border of homogeneous anisotropic thermoelastic environments, for a case of matrixes of factors of 4th order is received.*

УДК 517.9-518.6

## **А.Б. АЛЖАНОВ, К.Р. ДОСУМБЕКОВ СИСТЕМА КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ (СКМ) «МАТЕМАТИКА» ПРИ ИЗУЧЕНИИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ**

«Mathematica 4.0» – универсальный математический пакет, предназначенный для аналитических и численных расчетов. Система «Mathematica» имеет большое количество функций, многофункциональный язык программирования, удобный интерфейс, текстовый редактор. Данный

пакет позволяет создавать платформенно независимые рабочие документы с представлением графиков и формул в полиграфическом формате.

В качестве иллюстрации возможностей системы компьютерной математики «Mathematica 4.0», рассмотрим закон распространения упругих и пьезоупругих волн в анизотропной среде ромбической сингонии класса 222 и mm2.

Знание структуры прямой и обратной матриц монодромии (матрицант одного периода неоднородности) и введение матрицы, следующей из аналитического представления матрицанта усредненного слоя, позволяет получить аналитическое представление матрицанта усредненной периодически неоднородной среды с учетом низкочастотного (длинноволнового) приближения [1]:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow \infty \\ \lambda \gg h}} T^n = \sum_{i=1}^{\hat{}} P_i [E \cos \tilde{k}_i H + \frac{\langle B_i \rangle}{\tilde{k}_i} \sin \tilde{k}_i H] = T_{\text{уср.}} \quad (1)$$

$$\text{где } P_i = \frac{1}{(\tilde{p}_i - \tilde{p}_j)(\tilde{p}_i - \tilde{p}_k)} [P_{(2)} - \tilde{p}_j E][P_{(2)} - \tilde{p}_k E], \quad P_{(2)} = E + \frac{B_0^2 h^2}{2};$$

$B_0 = \langle B \rangle_i$ ,  $j, k = 1, 2, 3$ ;  $i \neq j, j \neq k, i \neq k$ , а  $P_i, P_j, P_k$  – корни характеристического уравнения, следующие из условия:

$$\det |P_{(2)} - \lambda E| = 0 \quad (2)$$

1. Для упругих волн в анизотропных средах ромбической сингонии в координатной плоскости (yz) матрица  $P_{(2)}$ [2] имеет вид:

$$P_{(2)} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{16} \\ 0 & p_1 & 0 & 0 & p_{25} & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & p_{16} & 0 & 0 & p_3 & 0 \\ p_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Условие (2) и матрица  $P_{(2)}$  (3) на основе пакета «Mathematica 4.0» позволяет определить корни характеристического уравнения:  $\tilde{P}_1; \tilde{P}_2; \tilde{P}_3$ ;

$$\text{где } \tilde{p}_1 = p_2; \tilde{p}_{2,3} = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4b})$$

$$a = p_1 + p_3 \text{ и } b = p_1 p_3 - p_{16} p_{25}$$

Подстановка корней в (1) приводит к построению матрицанта усредненной периодически неоднородной среды в явной аналитической форме:

$$\begin{aligned}
T_{ycp(2)}^n = & \frac{(\bar{P}^2 - p_2 E) \left( \bar{P}^2 - \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4b})E \right)}{\left( \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4b}) - p_2 \right) \sqrt{a^2 - 4b}} \left( E \cos \tilde{\kappa}_3 H + \frac{\langle B \rangle}{\tilde{\kappa}_3} \sin \tilde{\kappa}_3 H \right) + \\
& + \frac{(\bar{P}^2 - p_2 E) \left( \bar{P}^2 - \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4b})E \right)}{\left( \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4b}) - p_2 \right) (-\sqrt{a^2 - 4b})} \left( E \cos \tilde{\kappa}_2 H + \frac{\langle B \rangle}{\tilde{\kappa}_2} \sin \tilde{\kappa}_2 H \right) + \\
& \frac{\left( \bar{P}^2 - \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4b})E \right) \left( \bar{P}^2 - \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4b})E \right)}{\left( p_2 - \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4b}) \right) \left( p_2 - \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4b}) \right)} \left( E \cos \tilde{\kappa}_1 H + \frac{\langle B \rangle}{\tilde{\kappa}_1} \sin \tilde{\kappa}_1 H \right)
\end{aligned} \quad (4)$$

2. Для упругих волн в анизотропных средах ромбической сингонии в координатной плоскости (xz) матрица  $\hat{P}^{(2)}$  [2] имеет вид:

$$P_{(2)} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & p_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & p_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{14} & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{23} & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Условие (2) и матрица  $\hat{P}^{(2)}$  (5) дает возможность также получить корни характеристического уравнения:  $\tilde{P}_1$ ;  $\tilde{P}_2$ ;  $\tilde{P}_3$ ;

$$\text{где } \tilde{P}_1 = p_3; \quad \tilde{P}_{2,3} = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4b})$$

$$a = p_1 + p_2; \quad b = p_1 p_2 - p_{14} p_{23}$$

Подстановка корней в (1) приводит к построению матрицанта усредненной периодически неоднородной среды в явной аналитической форме.

3. Для пьезоупругих волн в анизотропных средах ромбической сингонии класса 222 в координатной плоскости (xz) матрица  $\hat{P}^{(2)}$  [3] имеет вид:

$$P_{(2)} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & p_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & p_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{14} & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{23} & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & p_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & p_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{58} & p_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{67} & 0 & 0 & p_4 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Условие (2) и матрица  $\hat{P}_{(2)}$  (6) с помощью пакета «Mathematica 4.0» дает возможность получить корни характеристического уравнения:  $\tilde{p}_1$ ;  $\tilde{p}_2$ ;  $\tilde{p}_3$ ;  $\tilde{p}_4$ ;

$$\text{где } \tilde{p}_{1,2} = \frac{1}{2}(a' \pm \sqrt{a'^2 - 4b'})$$

$$\tilde{p}_{3,4} = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4b})$$

$$a = p_2 + p_4; \quad b = p_2 p_4 - p_{58} p_{67}; \quad a' = p_1 + p_2; \quad b' = p_1 p_2 - p_{14} p_{23}$$

Подстановка корней в (1) приводит к явному аналитическому выражению матрицанта усредненной периодически неоднородной среды.

4. Для пьезоупругих волн в анизотропных средах ромбической сингонии класса mm2 координатной плоскости (xz) матрица  $\hat{P}_{(2)}$  [3] имеет вид:

$$P_{(2)} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & p_{14} & 0 & 0 & p_{17} & 0 \\ 0 & p_1 & p_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{26} \\ 0 & p_{14} & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{38} \\ p_{23} & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_{47} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 \\ p_{28} & 0 & 0 & p_{38} & 0 & 0 & p_4 & 0 \\ 0 & p_{17} & p_{47} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Условие (2) и матрица  $\hat{P}_{(2)}$  (7) с помощью пакета «Mathematica 4.0» дает возможность получить корни характеристического уравнения:

$$\tilde{p}_1; \tilde{p}_2; \tilde{p}_3; \tilde{p}_4;$$

$$\tilde{p}_1 = \frac{a}{3} + \frac{\sqrt[3]{2\alpha}}{3\sqrt[3]{\beta + \sqrt{4\alpha^3 + \beta^2}}} - \frac{\sqrt[3]{\beta + \sqrt{4\alpha^3 + \beta^2}}}{\sqrt[3]{32}}$$

$$\tilde{p}_2 = \frac{a}{3} - \frac{(1+i\sqrt{3})\alpha}{\sqrt[3]{32^2} \sqrt[3]{\beta + \sqrt{4\alpha^3 + \beta^2}}} + \frac{(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{\beta + \sqrt{4\alpha^3 + \beta^2}}}{\sqrt[3]{62}}$$

$$\tilde{p}_3 = \frac{a}{3} - \frac{(1-i\sqrt{3})\alpha}{\sqrt[3]{32^2} \sqrt[3]{\beta + \sqrt{4\alpha^3 + \beta^2}}} + \frac{(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{\beta + \sqrt{4\alpha^3 + \beta^2}}}{\sqrt[3]{62}}$$

$$\tilde{p}_4 = p_3$$

$$\text{где } \alpha = -(a^2 - 3b); \quad \beta = -2a^2 - 9ab - 27c$$

$$a = p_1 + p_2 + p_4; \quad b = -p_1 p_2 - p_1 p_4 - p_2 p_4 + p_{14} p_{23} + p_{17} p_{28} + p_{38} p_{47}$$

$$c = p_1 p_2 p_4 - p_4 p_{14} p_{23} - p_2 p_{17} p_{28} + p_{17} p_{23} p_{38} + p_{14} p_{28} p_{47} - p_1 p_{38} p_{47}$$

Подстановка корней в (1) приводит к явному аналитическому выражению матрицанта усредненной периодически неоднородной среды [4].

*Некоторые функции математического пакета «Mathematica 4.0»:*

Функция **B.V//MatrixForm** выполняет матричное перемножение матриц.

Функция **Det[B]** определяет детерминант матрицы.

Функция **FullSimplify[B]** упрощает математическое выражение.

Функция **Collect** выполняет приведение общих членов выражения по степеням переменной.

Функция **Solve[-λ<sup>3</sup> + aλ<sup>2</sup> + bλ + c = 0, λ]** обеспечивает решение уравнения относительно переменной.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тлеуменов С.К., Ильясова Г.С. О построении точных решений систем четырех обыкновенных дифференциальных уравнений I-ого порядка.// Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения», 17-19 июня 2005 г., том 1, г. Алматы 2005г.

2. Испулов Н.А. Уравнения дисперсии упругих волн в анизотропных средах ромбической сингонии. Сборник научных работ студентов и преподавателей кафедры физики, г. Павлодар, 2003 г.

3. Тлеуменов С.К. Метод матрицанта. Павлодар, НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004, 151 с.

4. Тлеуменов С.К., Испулов Н.А. Построение матрицанта уравнений движения усредненной анизотропной среды ромбической сингонии в явной аналитической форме. Наука и техника Казахстана № 3, Павлодар 2003 г.: ПГУ им. С. Торайгырова.

Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар. Материал поступил в редакцию 15.08.2012 г.

А.Б. ӘЛЖАНОВ, Қ.Р. ДОСУМБЕКОВ

ТОЛҚЫНДЫҚ ПРОЦЕСТЕРДІ ЗЕРТТЕУДЕ «МАТЕМАТИКА»  
(КМЖ) КОМПЬЮТЕРЛІК МАТЕМАТИКАНЫҢ ЖҮЙЕСІ

A.B. ALZHANOV, K.R. DOSUMBEKOV

APPLICATION OF A MATHEMATICAL PACKAGE «MATHEMATICA»  
IN STUDYING OF WAVE PROCESSES

### Түйіндеме

*Анизотропты орталарда толқындық процестерді зерттеу қазіргі уақытта матрицалық техниканы қолданумен байланысты. Теориялық есептеулер кезінде дәрежесі әртүрлі матрицаларды қобейту, детерминанттарды анықтау, сипаттамалық теңдеулерді*

шешу қажеттілігі пайда болады. Сернімді, термосернімді, электрмагниттік, пьезосернімді толқындарды зерттеу үшін бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесінің матрицант құрылымын құрастыруға негізделген матрицалық әдіс қолданылады. Осы жұмыста матрицант әдісі аймағында әртүрлі есептеулер жүргізу үшін «Mathematica 4.0» математикалық пакетінің қолданылуы қарастырылады.

### **Resume**

*Studying of wave processes in anisotropic environments is connected now with application of matrix technics. In the course of theoretical calculations there is a necessity of multiplication of matrixes of a various order, a finding of their determinants, the decision of the characteristic equations. For studying elastic, thermoelastic, electromagnetic, piezoelastic waves the matrix method based on construction of structure matrizer of system of the differential equations of the first order is used. In the given work application of a mathematical package «Mathematica 4.0» for carrying out of various calculations within the limits of a method matrizer is considered.*

ӘОЖ

## **Г.Ж.ӘМРЕНОВА, Е.ЕРТАЙ, М.Х.ХАМИТОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ ОҢ ПЕРИОДТЫ ШЕШІМІ**

Дифференциалдық теңдеулерін саналымды жүйесін қарастырайық:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_k + f_i(t, x_1, x_2, \dots), \quad (1)$$

мұндағы  $t$  - нақты тәуелсіз айнымалы;

$f_1(t), f_2(t), \dots$  – өз аргументтерінің нақты облыстарда берілген функциялары;

$x_1, x_2, \dots$   $t$  - дан ізделінетін нақты функциялардың саналатын жиыны;

$a_{ik}(t)$   $t$  - дан үзіліссіз функциялар.

Біз (1) теңдеуді векторлық теңдеу түрінде жазайық.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x) \quad (2)$$

$A(t)$  және  $f(t, x)$  операторлары  $m$  немесе  $lp (p \geq 1)$  кеңістіктерінде үзіліссіз әсер ететін болсын. Дифференциалдық теңдеулердің саналатын жүйесінің бар болуының кейбір жеткілікті шарттары және шешімінің жалғыздығы жұмыста қарастырылған.

(1) теңдеудің оң жақ бөлігі (1) жүйеге жалғыздық теоремасы және әрбір шешімнің жергілікті емес жалғасуының теоремалары мынадай қасиеттерге ие екендігі жорамалданады. (1) жүйенің оң жақ бөлігі  $t$  бойынша  $\omega$  периодымен периодты екендігі шығады:

$$\begin{cases} f_i(t + \omega, x_1, x_2, \dots) = f_i(t, x_1, x_2, \dots), & i = 1, 2, \dots, \\ a_{ik}(t + \omega) = a_{ik}(t). \end{cases} \quad (3)$$

(2) теңдеудің шешімін  $t=0$  кезінде  $x_0$  нүктесі арқылы өтетін  $p(t, x_0)$  арқылы белгілейміз:

$$p(0, x_0) = x_0.$$

(1) жүйенің оң жақ бөлігінің периодтылығынан бұл жүйенің периодты шешімі жылжу операторының жылжымайтын нүктелермен анықталатындығы шығады

$$U(\omega, 0)x_0 = p(\omega, x_0). \quad (4)$$

$i \neq k$  кезінде  $a_{ik}(t)$  белгілі болсын. Жылжу операторын  $t_0$  ден  $t$  уақыт жүйе бойымен  $V(t, t_0)$  арқылы белгілейміз

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x. \quad (5)$$

Оператор спектрі  $V(\omega, 0)$  радиусы  $p_0 < 1$  шеңбер ішінде жатқан болсын. Онда  $[I - V(\omega, 0)]^{-1}$  операторы оң болады. (1) аналогтық жүйе бойынша  $V(t, t_0)$  операторларының оң болатындығын, ал  $[I - V(\omega, 0)]^{-1}$  операторының қатарға жіктелетіндігін дәлелдеуге болады.

$$[I - V(\omega, 0)]^{-1} = V(\omega, 0) + V^2(\omega, 0) + \dots$$

Белгілі болғандай жылжу операторларының жылжымайтын нүктелері (4) және

$$Qx = [I - V(\omega, 0)]^{-1}[u(\omega, 0)x - V(\omega, 0)x] \quad (6)$$

операторлары сәйкеседі. Сондықтан (1) жүйенің периодты шешімін табу үшін (6) оператордың жылжымайтын нүктелерін табу жеткілікті.



Лемма 1. (1) жүйенің оң жақ бөлігі  $f_i(t, x_1, x_2, \dots) \geq 0$ ,  $(x_j \geq 0)$ ,  $a_{ik}(t) \geq 0$  ( $i \neq k$  кезінде) теңсіздіктерін қанағаттандыратын болсын. Онда  $p(t, x) = U(t, 0)$  операторы әрбір  $t \geq 0$  кезінде теріс емес координаттарымен  $K$  векторлық конусын инвариантты түрде қалдырады, яғни  $t \geq 0, x \in K, p(t, x) \in K$ ,

Дифференциалды теңдеуді қарастырайық

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}(t)x_k + \bar{f}_i(t) \quad (7)$$

мұндағы  $\bar{f}_i(t) = \bar{f}_i(t + \omega) f_i(t, x) \leq \bar{f}_i(t)$ ,  $\|x\| < c_0$  болсын. Онда белгілі болатыны

$$U(t, 0)x \leq U_1(t, 0)x, \quad (8)$$

мұндағы  $U(t, 0)$  – теңдеу жүйелерінің жылжу операторы.

Теорема 1.  $f_i(t, x_1, x_2, \dots)$  және  $a_{ik}(t)$  функциясы үшін жоғарыда көрсетілген шарттардың бәрі орындалған болсын.  $f(t, x)$  операторы үзіліссіз  $t$  - және  $x$  - тың айнымалылары жиынтығымен үзіліссіз  $K$  конусы нормал болатын сандық тізбек Банах кеңістігінде әсер ететін болсын. Онда (1) дифференциалдық теңдеулер жүйесі кем дегенде бір оң  $\omega$  - периодты шешіміне ие болады.

Дәлелдеу. (7) дифференциалдық теңдеулер жүйесі бастапқы шартымен  $\omega$  - периодты шешіміне ие екендігі белгілі

$$x_0 = [I - V(\omega, 0)]^{-1} \int_0^{\omega} V(\omega, \tau) \bar{f}(\tau) d\tau,$$

$U_1(\omega, 0)$  жылжу операторы монотонды оператор болып табылады. (6) оператор  $0 \leq x \leq x_0$  болатын конусты қимасын инвариантты түрде қалдыратынын көрсетейік.  $U_1(\omega, 0)$  операторы бұл конустың қимасын инвариантты қалдыратыны белгілі. Осыған сәйкес  $U(t, 0)$  операторы да (8) теңсіздік әсерінен бұл конустық қиманы инвариантты түрде қалдырады. Осыдан шығатыны

$$U(\omega, 0)x_0 = V(\omega, 0)x_0 + \int_0^{\omega} V(\omega, \tau) f[\tau, U(\tau, 0)]x_0 d\tau \leq x_0. \quad (9)$$

(9) теңсіздіктің екі бөлігіне  $[I - V(\omega, 0)]^{-1}$  оң операторымен әсер еткенде алатынымыз

$$Qx_0 = [I - V(\omega, 0)]^{-1}[U(\omega, 0)x_0 - V(\omega, 0)x_0] \leq x_0.$$

Аналогты түрде қиманың  $0 \leq x \leq x_0$  элементтері үшін  $Qx \leq U_1x \leq x_0$  аламыз, яғни үзіліссіз оператор бұл конустық қиманы инвариантты түрде

қалдырады. (4.1) теоремаға сәйкес  $Q$  операторы бұл кимада кем дегенде бір жылжымайтын нүкте болады, яғни (1) дифференциалдық теңдеулердің санақ жүйесі ең болмағанда бір он  $\omega$  - периодты шешіміне ие болады. Теорема дәлелденді.

Теорема 2.  $f_i(t, x_1, x_2, \dots)$  функциясы

$$d_i \leq f_i(t, x_1, x_2, \dots) \leq c_2 \quad (10)$$

теңсіздігін қанағаттандыратын болсын. Мұндағы  $d_i, c_i$  – оң мәндр,  $c_i < \infty$ .  $f_i(t, x_1, x_2, \dots) = \{f_1(t, x), f_2(t, x), \dots\}$  – операторы сияқты қарастырылып отырған кеңістікте үзіліссіз болу қасиетіне ие болсын. Онда (1) дифференциалдық теңдеулер жүйесі ең болмағанда бір нөл емес он  $\omega$  - периодты шешіміне ие болады. Онда (1) дифференциалдық теңдеулер жүйесі ең болмағанда бір нөл емес он  $\omega$  - периодты шешіміне ие болсын.  $Q$  операторының  $x_1 \leq x \leq x_2$  конустық киманы инвариантты түрде қалдыратындығы дәлелденеді, мұндағы

$$x_1 = [I - V(\omega, 0)]^{-1} \int_0^\omega V(\omega, \tau) d\tau,$$

$$x_2 = [I - V(\omega, 0)]^{-1} \int_0^\omega V(\omega, \tau) c d\tau.$$

Енді  $l_p$  кеңістігіндегі сандық тізбегі норма

$$\|x\| = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty, \text{ мұндағы } 1 \leq p < \infty$$

болатынын (1) дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырамыз.  $f_i(t, x_1, x_2, \dots)$  функцияға сәйкес шарттан (1) дифференциалдық теңдеудің санақ жүйесі шешімінің жергілікті емес ұзақтығы шығатынын байқау оңай. Сондықтан біз болжағандай  $f_i(t, x_1, x_2, \dots)$  функциялары пайда болуының жалғыздығын және жергілікті емес жалғасу теоремасының  $l_p$  кеңістігінде қарастырылатын (1) дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімі қасиеттеріне ие. Яғни,  $l_p$  кеңістігінде әсер ететін (1) дифференциалдық теңдеулер жүйесінің траекториясымен  $U(t, 0)$  жылжу операторы анықталған.

Теорема 3.1 лемма және 4 лемманың шарттары орындалатын болсын [4].  $f_i(t, x) \leq \bar{f}_i(t) \|x\| \leq c_0$  кезінде болсын, мұндағы  $\bar{f}_i(t)$  – үзіліссіз,  $\omega$  - периодты функция.

Онда (1) дифференциалдық теңдеулер жүйесі кем дегенде бір  $\omega$  - периодты шешіміне ие.

Дәлелдеу.  $U(\omega, 0)$  жылжу операторы (1) дифференциалдық теңдеулер жүйесінің  $U(\omega, 0)$  жылжу операторы  $0 \leq x \leq x_0$  кимада болады.

$$x_0 = [I - V(\omega, 0)]^{-1} \int_0^\omega V(\omega, \tau) \bar{f}(\tau) d\tau$$

Теорема 4. 1 лемма мен 4 лемманың шарттары орындалған болсын [4]. (6) теңсіздіктер орындалған болсын. Онда (1) дифференциалдық теңдеулер жүйесіні ең болмағанда бір нөлдік емес оң  $\omega$  - периодты шешіміне ие. Бұл дәлелдеу 2 және 3 теоремалар дәлелдеуімен сәйкес.

#### ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМ

1. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966.
2. Персидский К.П. Счетные системы дифференциальных уравнений и устойчивость их решений. «Известия АН КазССР, серия физ.-мат.», 1959, №7.
3. Нурекенов Т.К., Хамитов М.Х. О существовании  $\omega$  - периодических решений дифференциальных уравнений. «Вестник АН КазССР», 1971, №3.
4. Нурекенов Т.К., Хамитов М.Х. О существовании  $\omega$  - периодических решений дифференциальных уравнений. «Известия АН КазССР, серия физ.-мат.», 1971, №3.

С.Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университетінің,  
Павлодар қ. Материал 00.00.00ж. редакцияға түсті.

G. ZH. AMRENOVA, E. ERTAI, V.KH. KHAMITOV  
THE POSITIVE PERIODIC SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL  
EQUATIONS

#### *Резюме*

*В данной статье рассматриваются условия существования положительных периодических решений дифференциальных уравнений и доказывается теорема с помощью конусных методов М.А.Красносельского.*

#### *Resume*

*In this work the conditions of existence of the positive periodic solutions of differential equations are considered and theorems are proved by cone methods of M.A. Krasnosel'skii.*

**Д.С. ДЖУМАБАЕВ, А.Т. АСАНОВА**  
**ОБ ИМПУЛЬСНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ**  
**ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**  
**ВТОРОГО ПОРЯДКА**

В последние годы активно развивается теория нелокальных краевых задач для гиперболических уравнений со смешанными производными. Нелокальные краевые условия - это условия, связывающие искомое решение и его производные в двух и более отрезках линий. Изучение краевых задач с нелокальными условиями для уравнений гиперболического типа стимулировалось различными причинами: соображениями общей теории граничных задач, теорией физики плазмы, влагопереноса [1-3]. Простейшим примером нелокальных условий являются периодические краевые условия. С другой стороны, в теории колебаний особое место занимают периодические краевые задачи с импульсным воздействием, возникающие в электротехнических и радиотехнических процессах. Периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием всесторонне исследованы, обзор и библиографию можно посмотреть в [4]. Периодические решения систем гиперболических уравнений с импульсным воздействием начали изучаться с недавнего времени. В работе [5] рассматривалась периодическая краевая задача для системы гиперболических уравнений с импульсным воздействием и были получены достаточные условия существования единственного периодического решения численно-аналитическим методом.

В работах [6,7] для исследования и решения нелокальной краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений со смешанной производной было предложено обобщение метода параметризации [8, 9], разработанного для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, на уравнения в частных производных – метод введения функциональных параметров. Суть метода заключается во введении дополнительных параметров как значений искомого решения по переменной  $t$  в определенных линиях области  $\Omega$ . Краевая задача для системы гиперболических уравнений сводится к многохарактеристической краевой задаче с функциональными параметрами, зависящими от  $x$ . Свойства решений и его частных производных переходят в свойства функциональных параметров. Методом введения функциональных параметров были получены достаточные условия однозначной разрешимости исследуемой задачи в терминах исходных

данных и предложены алгоритмы нахождения классического решения. Установлен критерий корректной разрешимости на основе эквивалентности корректной разрешимости краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений со смешанной производной и корректной разрешимости семейства двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [10-12].

В настоящей работе метод введения функциональных параметров распространяется на краевые задачи с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени для системы гиперболических уравнений со смешанной производной. Устанавливаются коэффициентные условия корректной разрешимости исследуемой задачи и предлагается алгоритм нахождения ее решения.

В прямоугольнике  $[0, T] \times [0, \omega]$  рассматривается краевая задача для системы гиперболических уравнений второго порядка с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} + C(t, x)u + f(t, x) \quad (1)$$

$$u(t, 0) = \psi(t), \quad t \in [0, T] \quad (2)$$

$$P_0(x) \frac{\partial u(0, x)}{\partial x} + S_0(x) \frac{\partial u(T, x)}{\partial x} = \varphi_0(x) \quad x \in [0, \omega] \quad (3)$$

$$P_i(x) \frac{\partial u(t_i - 0, x)}{\partial x} - S_i(x) \frac{\partial u(t_i + 0, x)}{\partial x} = \varphi_i(x), \quad i = \overline{1, m}, \quad (4)$$

где  $u \in R^n$ ,  $(n \times n)$  - матрицы  $A(t, x)$ ,  $B(t, x)$ ,  $C(t, x)$ ,  $P_j(x)$ ,  $S_j(x)$ ,  $j = \overline{0, m}$ ,  $n$  - вектор-функции  $f(t, x)$ ,  $\varphi_i(x)$ ,  $i = \overline{0, m}$ , непрерывны на  $[0, \omega]$ , соответственно,  $n$  - вектор-функция  $\psi(t)$  непрерывно дифференцируема на  $[0, T]$ ,  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < T$ ,  $\|u(t, x)\| = \max_{i=1, n} |u_i(t, x)|$ ,  $\|A(t, x)\| = \max_{i=1, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}(t, x)|$ .

Решением задачи (1)-(4) будем называть кусочно-непрерывную на  $\Omega$  функцию  $u(t, x)$ , имеющую кусочно-непрерывные на  $\Omega$  частные производные  $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x}$ , удовлетворяющую системе (1) при всех  $(t, x) \in \Omega$ , кроме линий  $t = t_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , краевым условиям (2), (3) и условиям импульсного воздействия в фиксированные моменты времени (4).

Краевая задача (1)-(4) является нелокальной задачей: задается значение искомой функции на характеристике  $x = 0$ , дается линейная комбинация производной по  $x$  решения на характеристиках  $t = 0$  и  $t = T$ , а также - условия импульсного воздействия на производную по  $x$  решения в фиксированные моменты времени - на характеристиках  $t = t_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Такая постановка нелокальной краевой задачи исследуется впервые.

В качестве линий, где вводятся дополнительные параметры, выступают прямые  $t = t_i$ ,  $i = \overline{0, m+1}$ , где  $t_0 = 0$ ,  $t_{m+1} = T$ .

С помощью прямых  $t = t_i$ ,  $i = \overline{0, m+1}$ , область разбивается на подобласти  $\Omega_r = [t_{r-1}, t_r] \times [0, \omega]$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ , и вводятся параметры  $\lambda_r(x) = u_r(t_{r-1}, x)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ , где  $u_r(t, x)$  - сужение функции  $u(t, x)$  на  $r$ . Затем задача (1)-(4) путем введения новых неизвестных функций  $\tilde{u}_r(t, x) = u(t, x) - \lambda_r(x)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ , сводится к следующей эквивалентной задаче с параметрами

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial t \partial x} = A(t, x) \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial t} + C(t, x) \tilde{u}_r + A(t, x) \lambda'_r(x) + C(t, x) \lambda(x) + f(t, x) \quad (5)$$

$$\tilde{u}_r(t_{r-1}, x) = 0, \quad r = \overline{1, m+1}, \quad (6)$$

$$\tilde{u}_r(t, 0) = \psi(t) - \psi(t_{r-1}), \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

$$P_0(x) \lambda'_1(x) + S_0(x) \lim_{t \rightarrow T-0} \frac{\partial \tilde{u}_{m+1}(t, x)}{\partial x} + S_0(x) \lambda'_{m+1}(x) = \varphi_0(x), \quad x \in [0, \omega] \quad (8)$$

$$P_i(x) \lim_{t \rightarrow t_i-0} \frac{\partial \tilde{u}_i(t, x)}{\partial x} + P_i(x) \lambda'_i(x) - S_i(x) \lambda'_{i+1}(x) = \varphi_i(x), \quad i = \overline{1, m}, \quad (9)$$

В отличие от задачи (1)-(4) здесь появились дополнительные условия (6) как значения неизвестной функции на характеристиках  $t = t_r$ ,  $r = \overline{0, m}$ . Решением задачи (5)-(9) является система пар  $(\lambda^*(x), \tilde{u}^*([t], x))$  с элементами  $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \lambda_2^*(x), \dots, \lambda_{m+1}^*(x))'$ ,  $\tilde{u}^*([t], x) = (\tilde{u}_1^*(t, x), \tilde{u}_2^*(t, x), \dots, \tilde{u}_{m+1}^*(t, x))'$ , где функции  $\tilde{u}_r^*(t, x)$  непрерывны на  $\Omega_r$ , имеют непрерывные частные производные  $\frac{\partial \tilde{u}_r^*(t, x)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \tilde{u}_r^*(t, x)}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial^2 \tilde{u}_r^*(t, x)}{\partial t \partial x}$  на  $r$ ,  $r = \overline{1, m+1}$  (на линиях  $t = t_r$  в системе (5) удовлетворяют правосторонние производные),

$\lim_{t \rightarrow t_r - 0} \frac{\partial \tilde{u}_r^*(t, x)}{\partial x}$  ,  $r = \overline{1, m+1}$

конечный левосторонний предел  $t \rightarrow t_r - 0$  ,  $r = \overline{1, m+1}$  и при  $\lambda_r(x) = \lambda_r^*(x)$  удовлетворяет системе гиперболических уравнений (5) и условиям (6)-(9).

Задачи (1)-(4) и (5)-(9) эквивалентны в следующем смысле. Если функция  $u^*(t, x)$  является решением задачи (1)-(4), то система пар  $(\lambda^*(x), \tilde{u}^*([t], x))$ , где  $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \lambda_2^*(x), \dots, \lambda_{m+1}^*(x))'$ ,  $\tilde{u}^*([t], x) = (\tilde{u}_1^*(t, x), \tilde{u}_2^*(t, x), \dots, \tilde{u}_{m+1}^*(t, x))'$ ,  $\lambda_r^*(x) = u^*(t_{r-1}, x)$ ,  $\tilde{u}_r^*(t, x) = u^*(t, x) - u^*(t_{r-1}, x)$ ,  $(t, x) \in \Omega_r$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ , будет решением задачи (5)-(9). И наоборот, если система пар  $(\lambda^{**}(x), \tilde{u}^{**}([t], x))$ , где  $\lambda^{**}(x) = (\lambda_1^{**}(x), \lambda_2^{**}(x), \dots, \lambda_{m+1}^{**}(x))'$ ,  $\tilde{u}^{**}([t], x) = (\tilde{u}_1^{**}(t, x), \tilde{u}_2^{**}(t, x), \dots, \tilde{u}_{m+1}^{**}(t, x))'$ , является решением задачи (5)-(9), то функция  $u^{**}(t, x)$ , определяемая равенствами  $u^{**}(t, x) = \lambda_r^{**}(x) + \lim_{t \rightarrow rh-0} \tilde{u}_r^{**}(t, x)$ ,  $(t, x) \in \Omega_r$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ ,  $u^{**}(T, x) = \lambda_r^{**}(x) + \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{u}_r^{**}(t, x)$ , будет решением задачи (1)-(4).

Введем обозначения  $\tilde{v}_r(t, x) = \frac{\partial \tilde{u}_r(t, x)}{\partial x}$ ,  $\tilde{w}_r(t, x) = \frac{\partial \tilde{u}_r(t, x)}{\partial t}$ , тогда из условий (6), (7) вытекает  $\tilde{v}_r(t_{r-1}, x) = 0$ ,  $\tilde{w}_r(t, 0) = \dot{\psi}(t)$ . При фиксированных  $\lambda_r(x)$  задача (5)-(7) является задачей Гурса для системы гиперболических уравнений на  $\Omega_r$ ,  $r = \overline{1, m+1}$  и она эквивалентна системе трех интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{v}_r(t, x) = & \int_{t_{r-1}}^t [A(s, x)\tilde{v}_r(s, x) + B(s, x)\tilde{w}_r(s, x) + C(s, x)\tilde{u}_r(s, x)] ds + \\ & + \int_{t_{r-1}}^t [A(s, x)\lambda_r'(x) + C(s, x)\lambda_r(x) + f(s, x)] ds \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_r(t, x) = & \dot{\psi}(t) + \int_0^x [A(t, \xi)\tilde{v}_r(t, \xi) + B(t, \xi)\tilde{w}_r(t, \xi) + C(t, \xi)\tilde{u}_r(t, \xi)] d\xi + \\ & + \int_0^x [A(t, \xi)\lambda_r'(\xi) + C(t, \xi)\lambda_r(\xi) + f(t, \xi)] d\xi \end{aligned} \tag{11}$$

$$\tilde{u}_r(t, x) = \psi(t) - \psi(t_{r-1}) + \int_{t_{r-1}}^t \int_0^x [A(s, \xi)\tilde{v}_r(s, \xi) + B(s, \xi)\tilde{w}_r(s, \xi) + C(s, \xi)\tilde{u}_r(s, \xi)] d\xi ds +$$

$$+ \int_{t_{r-1}}^t \int_0^x [A(s, \xi) \lambda_r'(\xi) + C(s, \xi) \lambda_r(\xi) + f(s, \xi)] H \xi ds \quad (12)$$

Вместо  $\tilde{v}_r(s, x)$  подставим соответствующую правую часть (10)

и, повторив этот процесс ( $r = 1, 2, \dots$ ) раз, получим представление следующей функции  $\tilde{v}_r(t, x)$

$$\tilde{v}_r(t, x) = G_{V,r}(t, x, \tilde{v}_r) + H_{V,r}(t, x, \tilde{u}_r, \tilde{w}_r) + F_{V,r}(t, x) + D_{V,r}(t, x) \lambda_r'(x) + E_{V,r}(t, x) \lambda_r(x), \quad (t, x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1, m+1} \quad (13)$$

$$G_{V,r}(t, x, \tilde{v}_r) = \int_{t_{r-1}}^t A(s_1, x) \dots \int_{t_{r-1}}^{s_{V-2}} A(s_{V-1}, x) \int_{t_{r-1}}^{s_{V-1}} A(s_V, x) \tilde{v}_V(s_V, x) ds_V ds_{V-1} \dots ds_1,$$

$$H_{V,r}(t, x, \tilde{u}_r, \tilde{w}_r) = \int_{t_{r-1}}^t [B(s_1, x) \tilde{w}_r(s_1, x) + C(s_1, x) \tilde{u}_r(s_1, x)] ds_1 + \dots +$$

$$+ \int_{t_{r-1}}^t A(s_1, x) \dots \int_{t_{r-1}}^{s_{V-2}} A(s_{V-1}, x) \int_{t_{r-1}}^{s_{V-1}} [B(s_V, x) \tilde{w}_r(s_V, x) + C(s_V, x) \tilde{u}_r(s_V, x)] ds_V ds_{V-1} ds_1,$$

$$F_{V,r}(t, x) = \int_{t_{r-1}}^t f(s_1, x) ds_1 + \dots + \int_{t_{r-1}}^t A(s_1, x) \dots \int_{t_{r-1}}^{s_{V-2}} A(s_{V-1}, x) \int_{t_{r-1}}^{s_{V-1}} f(s_V, x) ds_V ds_{V-1} ds_1,$$

$$D_{V,r}(t, x) = \int_{t_{r-1}}^t A(s_1, x) ds_1 + \dots + \int_{t_{r-1}}^t A(s_1, x) \dots \int_{t_{r-1}}^{s_{V-2}} A(s_{V-1}, x) \int_{t_{r-1}}^{s_{V-1}} A(s_V, x) ds_V ds_{V-1} ds_1,$$

$$E_{V,r}(t, x) = \int_{t_{r-1}}^t C(s_1, x) ds_1 + \dots + \int_{t_{r-1}}^t A(s_1, x) \dots \int_{t_{r-1}}^{s_{V-2}} A(s_{V-1}, x) \int_{t_{r-1}}^{s_{V-1}} C(s_V, x) ds_V ds_{V-1} ds_1,$$

$$(t, x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1, m+1}, \quad s_0 = t.$$

Переходя в правой части (13) к пределу при  $t \rightarrow t_r - 0$ , находим

$$\lim_{t \rightarrow t_r - 0} \tilde{v}_r(t, x), \quad r = \overline{1, m+1}, \quad \text{подставляя их в (8), (9) для неизвестных}$$



вектор-функций  $\lambda_r(x)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенную относительно старшей производной:

$$Q_V(x)\lambda'(x) = -E_V(x)\lambda(x) - F_V(x) - H_V(x, \tilde{u}, \tilde{w}) - G_V(x, \tilde{v}), \quad (14)$$

где

$$Q_V(x) = \begin{bmatrix} P_0(x) & 0 & \dots & 0 & S_0(x)[I + D_{V, m+1}(T, x)] \\ P_1(x)[I + D_{V, 1}(t_1, x)] & -S_1(x) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_m(x)[I + D_{V, m}(t_m, x)] & -S_m(x) \end{bmatrix}$$

$I$  - единичная матрица размерности  $(n \times n)$ ,

$$E_V(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & S_0(x)E_{V, m+1}(T, x) \\ P_1(x)E_{V, 1}(t_1, x) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_m(x)E_{V, m}(t_m, x) & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_V(x) = (S_0(x)F_{V, m+1}(T, x) - \varphi_0(x), P_1(x)F_{V, 1}(t_1, x) - \varphi_1(x), \dots, P_m(x)F_{V, m}(t_m, x))'$$

$$H_V(x, \tilde{u}, \tilde{w}) = (S_0(x)H_{V, m+1}(T, x, \tilde{u}_{m+1}, \tilde{w}_{m+1}), P_1(x)H_{V, 1}(t_1, x, \tilde{u}_1, \tilde{w}_1), \dots,$$

$$P_m(x)H_{V, m}(t_m, x, \tilde{u}_m, \tilde{w}_m))'$$

$$G_V(x, \tilde{v}) = (S_0(x)G_{V, m+1}(T, x, \tilde{v}_{m+1}), P_1(x)G_{V, 1}(t_1, x, \tilde{v}_1), \dots, P_m(x)G_{V, m}(t_m, x, \tilde{v}_m))'$$

Из условий согласования в точках  $(t_{r-1}, 0)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ , вытекает

$$\lambda_r(0) = \psi(t_{r-1}), \quad r = \overline{1, m+1}. \quad (15)$$

Если известны функции  $\lambda_r'(x)$ ,  $\lambda_r(x)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ , то решая систему интегральных уравнений (10)-(12) найдем функции  $\tilde{v}_r(t, x)$ ,  $\tilde{w}_r(t, x)$ ,  $\tilde{u}_r(t, x)$  и из системы функций  $(\lambda_r(x) + \tilde{u}_r(t, x))$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ , получим решение исходной задачи. Если известны функции  $\tilde{v}_r(t, x)$ ,  $\tilde{w}_r(t, x)$ ,  $\tilde{u}_r(t, x)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ , то решая систему (14) при условии (15) найдем  $\lambda_r'(x)$ ,  $\lambda_r(x)$ , и снова из системы функций  $(\lambda_r(x) + \tilde{u}_r(t, x))$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ , получим решение задачи (1)-(4).

Здесь неизвестными являются как функции  $\lambda_r'(x)$ ,  $\lambda_r(x)$ , так и функции  $\tilde{v}_r(t, x)$ ,  $\tilde{w}_r(t, x)$ ,  $\tilde{u}_r(t, x)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ . Поэтому применяется итерационный метод и решение функциональных соотношений (10), (12), (14) с условием (15) находится как пределы последовательностей

$\{\lambda_r^{(k)}(x)\}, \{\lambda_r^{(k)}(x)\}, \{\tilde{v}_r^{(k)}(t,x)\}, \{\tilde{w}_r^{(k)}(t,x)\}, \{\tilde{u}_r^{(k)}(t,x)\}, r = \overline{1, m+1},$  , определяемых по следующему алгоритму:

0-шаг. Предполагая в правой части (14)  $\lambda_r(x) = \psi(t_{r-1}), \tilde{v}_r(t,x) = 0, \tilde{w}_r(t,x) = \psi(t), \tilde{u}_r(t,x) = \psi(t) - \psi(t_{r-1})$ , и считая, что матрица  $Q_v(x)$  обратима при всех  $x \in [0, \omega]$  из системы уравнений (14) найдем  $\lambda_r^{(0)}(x), r = \overline{1, m+1}$ . Используя условия (15) определим функции  $\lambda_r^{(0)}(x)$ :

$$\lambda_r^{(0)}(x) = \psi(t_{r-1}) + \int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi) d\xi.$$

Из системы интегральных уравнений (10)-(12), где  $\lambda_r'(x) = \lambda_r^{(0)}(x), \lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$ , находим  $\tilde{v}_r^{(0)}(t,x), \tilde{w}_r^{(0)}(t,x), \tilde{u}_r^{(0)}(t,x), (t,x) \in \Omega_r, r = \overline{1, m+1}$

1-шаг. Из системы (14), где в правой части  $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x), \tilde{v}_r(t,x) = \tilde{v}_r^{(0)}(t,x), \tilde{w}_r(t,x) = \tilde{w}_r^{(0)}(t,x), \tilde{u}_r(t,x) = \tilde{u}_r^{(0)}(t,x)$ , в силу обратимости матрицы  $Q_v(x)$  при всех  $x \in [0, \omega]$  найдем  $\lambda_r^{(1)}(x), r = \overline{1, m+1}$ . Вновь используя условия (15) определим функции  $\lambda_r^{(1)}(x)$ :

$$\lambda_r^{(1)}(x) = \psi(t_{r-1}) + \int_0^x \lambda_r^{(1)}(\xi) d\xi.$$

Из системы интегральных уравнений (10)-(12), где  $\lambda_r'(x) = \lambda_r^{(1)}(x), \lambda_r(x) = \lambda_r^{(1)}(x)$ , находим  $\tilde{v}_r^{(1)}(t,x), \tilde{w}_r^{(1)}(t,x), \tilde{u}_r^{(1)}(t,x), (t,x) \in \Omega_r, r = \overline{1, m+1}$ .

И т. д.

Метод введения функциональных параметров процесс нахождения неизвестных функций разбивает на два этапа:

1) нахождение введенных функциональных параметров  $r(x), r(x)$ , из соотношения (14) с условием (15);

2) нахождение неизвестных функций  $\tilde{v}_r(t,x), \tilde{w}_r(t,x), \tilde{u}_r(t,x)$  из системы интегральных уравнений (10)-(12).

Условия следующего утверждения обеспечивают осуществимость и сходимость предложенного алгоритма, а также однозначную разрешимость задачи (1)-(4).

**Теорема.** Пусть при некотором  $N$  матрица  $Q(x)$  обратима для всех  $x \in [0, \omega]$  и выполнены условия:

a)  $\| [Q_v(x)]^{-1} \| \leq \gamma_v(x),$

б)  $q_v(x) = \gamma_v(x) \cdot \max \{ \|S_0(x)\|, \max_{i=1, m} \|P_i(x)\| \} \cdot \left( e^{\alpha(x)h} - 1 - \sum_{j=1}^v \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!} \right) \leq \chi < 1$

$$\text{где } \alpha(x) = \max_{t \in [0, T]} \|A(t, x)\|, \quad h = \max_{i=1, m+1} (t_i - t_{i-1}).$$

Тогда краевая задача (1)-(4) имеет единственное решение.

Доказательство теоремы проводится аналогично схеме доказательства теоремы 1 из [7].

Условия теоремы позволяют также установить оценку решения и его производных, т.е. дают достаточные условия корректной разрешимости задачи (1)-(4) в терминах исходных данных. Для нахождения решения краевой задачи (1)-(4) можно предложить другой алгоритм, условия его осуществимости и сходимости будут аналогичны условиям теоремы, только выражение для  $q(x)$  будет иным.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. -264с.

2. Самойленко А.М., Ткач Б.П. Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. – Киев: Наук. Думка, 1992. -208с.

3. Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений. -М. Труды МИРАН. -1998. -Т. 222. -С. 1-191.

4. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. -Киев: Вища школа, 1987. - 285 с.

5. Tkach A.B. Numerical-analytic method of finding periodic solutions for systems of partial differential equations with impulse influence // Nonlinear Oscillations. Kiev. -2001. -Vol. 4, -No 2. -pp.278-288.

6. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Однозначная разрешимость краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. -2002. -Т. 42, -№ 11. -С. 1673-1685.

7. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. -2003. -Т. 39, № 10. -С. 1343-1354.

8. Джумабаев Д.С. Метод параметризации решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник АН КазССР. -1988. - № 1, -С. 48-52.

9. Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. -1989. -Т. 29, - № 1. - С. 50-66.

ВВЕДЕНИЕ

10. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Критерий корректной разрешимости краевой задачи для системы гиперболических уравнений // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. -2002. -№ 3. -С. 20-26.

11. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. О корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Доклады РАН. -2003. -Т. 391. - № 3. -С. 295-297.

12. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. -2005. -Т. 41, № 3. - С. 337-346.

Институт Математики МОиН Республики Казахстан. Материал поступил в редакцию 15.08.2012 г.

Д.С.ЖҰМАБАЕВ, А.Т.АСАНОВА  
ЕКІНШІ РЕТТІ ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕЛЕРІ ҮШІН  
ИМПУЛЬСТІК ӘСЕРІ ТУРАЛЫ  
D.S.DHUMABAEV, A.T.ASANOVA  
ABOUT IMPULSE EFFECT FOR SYSTEM OF HYPERBOLIC  
EQUATIONS OF SECOND ORDER

### ***Түйіндеме***

*Екінші ретті гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін уақыттың бекітілген мезеттерінде импульстік әсері бар бейлокал шеттік есеп қарастырылады. Зерттеліп отырған есептің бірімәнді шешілімдігінің коэффициенттік шарттары функционалдық параметрлер енгізу әдісі арқылы тағайындалған және оның шешімін табу алгоритмі ұсынылған.*

### ***Resume***

*The nonlocal boundary value problem with impulse effect in fixed moments of time for system of hyperbolic equations is considered. The coefficients conditions of unique solvability investigating problem are established use method of introduction functional parameters and the algorithm of finding their solution is proposed.*

**Е. АРИНОВ, Ж.Е. САРСЕНБАЕВ**  
**О РАЗЛИЧНЫХ ФОРМАХ ПЛОСКОЙ ПОТЕРИ**  
**УСТОЙЧИВОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО**  
**УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ**  
**ПЛАСТИЧЕСКОГО НЕОДНОРОДНОГО МАССИВА**  
**ГОРНЫХ ПОРОД**

Рассмотрим плоское равновесие пластического неоднородного массива горных пород вокруг горизонтальной выработки. Потеря устойчивости такого равновесия массива связана с возникновением дополнительных решений. Дополнительные компоненты перемещений и напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия и соотношениям Коши в обеих зонах, линеаризованную условие предельного состояния Кулона-Мора, линеаризованную соотношению деформационной теории пластичности и линеаризованную соотношению подобия девиаторов деформаций и напряжении – в зоне пластических деформаций, обобщенного закона Гука – в зоне упругих деформаций.

Дополнительные компоненты перемещений выражаются:

$$\begin{aligned} u_p &= u(\rho) \cos \theta, \\ u_\theta &= v(\rho) \cos \theta. \end{aligned}$$

Решение не единственное, оно характеризует простую форму потери устойчивости упругопластического равновесия пластического неоднородного массива вокруг горизонтальной выработки. Поставленная задача устойчивости равновесия допускает и другие решения, соответствующие другим формам потери устойчивости упругопластического равновесия массива вокруг горизонтальной выработки в виде:

$$\begin{aligned} u_p &= u(\rho) \cos n\theta, \\ u_\theta &= v(\rho) \sin n\theta, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u(\rho)$  и  $v(\rho)$  – функции от радиальной координаты,  $n$  – натуральные числа кроме единицы ( $n=2,3,4,\dots$ ). Теоретический  $n$  может быть сколь угодно большим, однако применимость модели невесомой плоскости с круговым отверстиям к реальному условию горизонтальной выработки ограничивает верхний предел  $n$ . Из соотношения (1) видно, что число  $n$  показывает количество волн, образовавшихся по окружности выработки в результате потери ее устойчивости. Тогда линейный размер каждой волны будет порядка  $l \approx \frac{2\pi R}{n}$ , где  $R$  – радиус выработки; то есть  $\frac{l}{R} \approx \frac{2\pi}{n}$ . Так, как, реальная

выработка не бывает идеальной, то линейная неоднородность реальной выработки  $\frac{l_p}{R}$ , где  $l_p$  – характерный линейный размер неоднородных включений, очевидно, должна быть меньше  $\frac{l}{R}$ , иначе данная модель, скорее всего не будет применимой к условиям выработки:

$$\frac{l_p}{R} < \frac{2\pi}{n}.$$

Ориентировочно оценив значения  $\frac{l_p}{R} \approx 10\% = 0,1$ , что допускается в условиях производственной практики, найдем  $0,1 < \frac{2\pi}{n}$ , откуда  $n < 20\pi$ , или приблизительно  $n < 60$ . Мы в расчетных формулах принимаем, что  $n$  приблизительно не превосходит двадцати  $n \leq 20$ . В результате решения задачи устойчивости упругопластического равновесия пластического неоднородного массива горных пород вокруг горизонтальной выработки в зависимости от параметра волнообразования  $n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) получается различные критические давления  $P_{*n} = P_*(n)$ . Нас интересует их максимальное значение, так как очевидно, что при  $P = \gamma H$  выработка абсолютно устойчива (тогда состояние массива вокруг него такое же, что и состояние тронутого массива).

Рассмотрим зону пластических деформаций. Из уравнений равновесия и условий предельного состояния получено следующее решение, соответствующее решению (1):

$$\begin{aligned} \sigma_{[\rho]} &= S(\rho) \cos \theta, \\ \sigma_{[\theta]} &= \alpha_1 S(\rho) \cos \theta, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \tau_{[\rho]} &= T(\rho) \sin \theta, \\ S(\rho) &= \rho^{\alpha-2} \cdot C[\alpha_1 \bar{B}_1 + \delta \bar{B}_2; -\bar{B}_1 + \alpha \bar{B}_2; \delta], \\ T(\rho) &= \alpha_1 n \rho^{\alpha-2} \cdot C(\bar{B}_1; \bar{B}_2; \delta). \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{Здесь } \delta = \sqrt{\alpha_1 n^2 - \alpha^2}, \quad \alpha = \frac{(1 + \alpha_1)}{2} = \frac{1 + \alpha_2}{2}. \quad (4)$$

Через  $C(x; y; \delta)$  обозначена введенная нами специальная функция [1], определенная следующим образом:

$$C(x; y; \delta) = x \cos(\delta \ln \rho) + y \sin(\delta \ln \rho). \quad (5)$$

Приведем несколько свойств  $C$  – функции.

$$\begin{aligned} C(-x; -y; \delta) &= -C(x; y; \delta), \\ \alpha C(x; y; \delta) &= C(\alpha x; \alpha y; \delta), \\ C(x; y; \delta) &= x \text{ при } \rho = 1 (\ln 1 = 0) \end{aligned}$$

Производные от  $C$  – функции по  $\rho$  (обозначены штрихами) легко находятся при помощи следующих соотношений:

$$C'(x; y; \delta) = \frac{\delta}{\rho} C(y; -x; \delta);$$

$$C''(x; y; \delta) = -\frac{\delta}{\rho^2} [\delta C(x; y; \delta) + C(y; -x; \delta)];$$

Линеаризованные граничные условия при  $\rho = 1$  позволяют упростить выражения (3):

$$\begin{cases} \sigma_{[\rho]} + \frac{d\sigma_{[\rho]}^0}{d\rho} u_{[\rho]} = 0, \\ \tau_{[\rho^0]} - (\sigma_{[\rho]} - \sigma_{[\rho]}^0) \frac{du_{[\rho]}}{d\rho} = 0 \text{ при } \rho = 1. \end{cases} \quad (6)$$

где:

$$\frac{d\sigma_{[\rho]}^0}{d\rho} = \sigma_{[\rho]}^0 - \sigma_{[\rho]}^0 = \beta K(\rho_0, 1) + \alpha_2 P \quad \text{при } \rho = 1.$$

Подставляя (1) и (2) в условия (6) получим:

$$\begin{cases} \{S(1) + [\beta K(\rho_0, \rho) + \alpha_2 P] \cdot u(1)\} \cos n\theta = 0, \\ \{T(1) + [\beta K(\rho_0, \rho) + \alpha_2 P] \cdot nu(1)\} \sin n\theta = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$T(1) = nS(1); \quad (7)$$

Так, как  $T(1) = \alpha_1 n \bar{B}_1$ ,  $S(1) = \alpha \bar{B}_1 + \delta \bar{B}_2$ , то из соотношений (7) вытекает:

$$\bar{B}_2 = \frac{\alpha_2}{2\beta} \bar{B}_1. \quad (8)$$

Заменяя  $\bar{B}_2$  через  $\bar{B}_1$  при помощи (8), получим выражения для  $S(\rho)$  и  $T(\rho)$ :

$$S(\rho) = \frac{\alpha_1}{\delta} \bar{B}_1 \rho^{\alpha-2} \cdot C(\delta; \alpha - n^2; \delta),$$

$$T(\rho) = \frac{n\alpha_1}{2\delta} \bar{B}_1 \rho^{\alpha-2} \cdot C(2\delta; \alpha_2; \delta).$$

Тогда линеаризованное граничное условие (6) имеет следующий вид:

$$\alpha_1 \bar{B}_1 + [\beta K(\rho_0, 1) + \alpha_2 P] \cdot u(1) = 0.$$

Для удобства записи постоянную интегрирования переобозначим в виде:

$$\bar{B}_1 = \frac{2\delta}{\alpha_1} B_1. \quad (9)$$

Тогда

$$S(\rho) = 2B_1 \rho^{\alpha-2} \cdot C(2\delta; \alpha - n^2; \delta), \quad (10)$$

$$T(\rho) = nB_1 \rho^{\alpha-2} \cdot C(2\delta; \alpha_2; \delta), \quad (11)$$

граничное условие:

$$2\delta B_1 + [\beta K(\rho_0, \rho) + \alpha_2 P] \cdot u(1) = 0 \quad (12)$$

Для определения дополнительных компонентов перемещений в пластической зоне, используем соотношения:

$$\alpha_1 \varepsilon_{[\theta]} + \varepsilon_{[\rho]} = 0, \quad (13)$$

$$\gamma_{[\rho\theta]} = \frac{2(\varepsilon_{[\theta]}^0 - \varepsilon_{[\rho]}^0)}{\sigma_{[\theta]}^0 - \sigma_{[\rho]}^0} \tau_{[\rho\theta]} \quad (14)$$

$$\varepsilon_{[\rho]} = \frac{\partial u_{[\rho]}}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{[\theta]} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{[\theta]}}{\partial \theta} + \frac{u_{[\rho]}}{\rho}, \quad \varepsilon_{[\theta]} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{[\theta]}}{\partial \theta} + \frac{u_{[\rho]}}{\rho}. \quad (15)$$

Соотношение (13) с учетом (1) и (15) дает следующее дифференциальное уравнение:

$$u' + \frac{\alpha_1}{\rho} (u + nv) = 0 \quad (16)$$

Здесь штрих означает производную по  $\rho$  и для простоты не показаны аргументы  $\rho$  функций  $u(\rho)$  и  $v(\rho)$ .

Из решения задачи напряженно-деформированного состояния пластического неоднородного массива горных пород вокруг горизонтальной выработки были найдены:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{[\theta]}^0 - \varepsilon_{[\rho]}^0 &= 2\alpha C_2 \rho^{-2\alpha} \quad (2\alpha = \alpha_1 + 1), \\ \sigma_{[\theta]}^0 - \sigma_{[\rho]}^0 &= \alpha_2 \sigma_{[\rho]}^0 + \beta K(\rho_0, \rho), \end{aligned}$$

Отсюда, используя (6) имеем:

$$\gamma_{[\rho\theta]} = B_1 S_7(\rho_0, \rho) \sin \theta, \quad (17)$$

где через  $S_7(\rho_0, \rho)$  обозначена функция:

$$S_7(\rho_0, \rho) = \frac{4\alpha n C_2 \rho^{-\alpha-2}}{\alpha_2 \sigma_{[\rho]}^0 + \beta K(\rho_0, \rho)} \cdot C(2\delta; \alpha_2; \delta). \quad (18)$$

С другой стороны дополнительная угловая деформация  $\gamma_{[\rho\theta]}$  определяется при помощи соотношения Коши (15) для заданного решения (1) в виде:



$$\gamma_{[\rho\theta]} = \left[ v' - \frac{1}{\rho}(v + nu) \right] \sin n\theta \quad (19)$$

Следовательно, имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$v' - \frac{1}{\rho}(v + nu) = B_1 S_7(\rho_0, \rho) \quad (20)$$

Уравнения (16) и (20) образуют систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Из уравнения (16) найдем:

$$v = -\frac{1}{n} \left( \frac{1}{\alpha_1} \rho u' + u \right) \quad (21)$$

Подставляя выражение (21) в уравнение (20) получим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка для определения функции  $u$ :

$$u'' + \frac{\alpha_1}{\rho} u' + \frac{\alpha_1(n^2 - 1)}{\rho^2} u = -B_1 \cdot \frac{n\alpha_1}{\rho} S_7(\rho_0, \rho) \quad (22)$$

Для ее решения сначала решим однородное дифференциальное уравнение:

$$u'' + \frac{\alpha_1}{\rho} u' + \frac{\alpha_1(n^2 - 1)}{\rho^2} u = 0 \quad (23)$$

Его решение находится в следующем виде:

$$u = \rho^{1-\alpha} \cdot C(\bar{A}_3; \bar{A}_4; \delta) \quad (24)$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения (21) ищется методом вариаций постоянных, то есть, положим:

$$\begin{aligned} \bar{A}_3 &= A_3(\rho), \\ \bar{A}_4 &= A_4(\rho). \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда

$$u' = \rho^{-\alpha} \cdot \{ (1-\alpha) C[A_3(\rho); A_4(\rho); \delta] + \delta C[A_4(\rho) - A_3(\rho); \delta] + \rho^{1-\alpha} \cdot C[A_3'(\rho); A_4(\rho); \delta] \}.$$

Здесь штрих по-прежнему обозначает производную по  $\rho$  и в дальнейшем аргумент функций  $A_3(\rho)$  и  $A_4(\rho)$  опускаем. Согласно методу вариаций постоянных положим:

$$C[A_3'; A_4'; \delta] = 0,$$

или

$$A'_3(\rho)\cos(\delta \ln \rho) + A'_4(\rho)\sin(\delta \ln \rho) = 0. \quad (26)$$

Таким образом,

$$u'' = \rho^{-\alpha} \cdot [(1-\alpha)C(A_3; A_4; \delta) + \delta C(A_4; -A_3; \delta)],$$

отсюда

$$u'' = \rho^{-\alpha-1} \cdot [\alpha(1-\alpha) - \beta^2] C(A_3; A_4; \delta) + \delta(1-2\alpha) C(A_4; -A_3; \delta) + \delta \rho^{-\alpha} \delta C(A'_4; -A'_3; \delta).$$

Подставляя  $u$ ,  $u'$  и  $u''$  в уравнение (22) получим:

$$u'' + \frac{\alpha_1}{\rho} u' + \frac{\alpha_1(n^2-1)}{\rho^2} u = \delta \rho^{-\alpha} \cdot C(A'_4; -A'_3; \delta) = -B_1 \cdot \frac{n\alpha_1}{\rho} S_7(\rho_0, \rho)$$

или

$$C(A'_4; -A'_3; \delta) = -\frac{n\alpha_1}{\delta} B_1 \rho^{\alpha-1} \cdot S_7(\rho_0, \rho);$$

раскрывая  $C$  – функцию, имеем:

$$-A'_3 \sin(\delta \ln \rho) + A'_4 \cos(\delta \ln \rho) = -\frac{n\alpha_1}{\delta} B_1 \rho^{\alpha-1} \cdot S_7(\rho_0, \rho). \quad (27)$$

Уравнения (26) и (27) образуют систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно «постоянных»  $A'_3$  и  $A'_4$ . Решив систему относительно  $A'_3$  и  $A'_4$ , найдем:

$$A'_3 = \frac{n\alpha_1}{\delta} B_1 \rho^{\alpha-1} \cdot S_7(\rho_0, \rho) \sin(\delta \ln \rho)$$

$$A'_4 = -\frac{n\alpha_1}{\delta} B_1 \rho^{\alpha-1} \cdot S_7(\rho_0, \rho) \cos(\delta \ln \rho),$$

Интегрируя полученные дифференциальные уравнения, имеем:

$$A_3(\rho) = B_1 \cdot S_8(\rho_0, \rho) + B_3, \quad (28)$$

$$A_4(\rho) = B_1 \cdot S_9(\rho_0, \rho) + B_4.$$

$$A_3(\rho) = \frac{n\alpha_1}{\delta} \int_1^{\rho} \rho^{\alpha-1} \cdot S_7(\rho_0, \rho) \sin(\delta \ln \rho) d\rho, \quad (29)$$

$$A_4(\rho) = -\frac{n\alpha_1}{\delta} \int_1^{\rho} \rho^{\alpha-1} \cdot S_7(\rho_0, \rho) \cos(\delta \ln \rho) d\rho.$$

Здесь  $B_3$  и  $B_4$  – постоянные интегрирования. Подставляя  $A_3(\rho)$  и  $A_4(\rho)$  в выражения (24) и используя свойства  $C$  – функций, получим:

$$u = u(\rho) = B_1 \rho^{1-\alpha} \cdot C[S_8(\rho_0, \rho), S_9(\rho_0, \rho), \delta] + \rho^{1-\alpha} \cdot C(B_3; B_4; \delta). \quad (30)$$

Тогда соотношение (30) для  $u$  позволяет определить другую неизвестную функцию  $v(\rho)$ :

$$v = v(\rho) = -\frac{1}{n\alpha_1} B_1 \rho^{1-\alpha} [S_8(\rho_0, \rho) \cdot C(\alpha; -\delta; \delta) + S_9(\rho_0, \rho) \cdot C(\delta; \alpha; \delta)] - \frac{1}{n\alpha_1} B_3 \rho^{1-\alpha} \cdot C(\alpha; -\delta; \delta) - \frac{1}{n\alpha_1} B_4 \rho^{1-\alpha} \cdot C(\delta; \alpha; \delta) \quad (31)$$

Так, как  $S_8(\rho_0, 1) = S_9(\rho_0, 1) = 0$  и  $C_3(B_3; B_4; \delta) = B_3$  при  $\rho = 1$ , то  $u(1) = B_3$  и граничное условие (12) принимает вид:

$$2\delta B_1 + [\beta K(\rho_0, 1) + \alpha_2 P] \cdot B_3 = 0. \quad (32)$$

В области упругих деформаций модуль упругости является постоянным, и в этом случае применимо решение [2] для дополнительных компонент:

$$\begin{aligned} u_{(\rho)} &= [(n-4v+2)B_5\rho^{-n+1} + B_6\rho^{-n-1}] \cos n\theta, \\ u_{(\theta)} &= [(n+4v-4)B_5\rho^{-n+1} + B_6\rho^{-n-1}] \sin n\theta, \\ \sigma_{(\rho)} &= 2G[-(n-1)(n+1)B_5\rho^{-n} - (n+1)B_6\rho^{-n-2}] \cos n\theta, \\ \sigma_{(\theta)} &= 2G[(n-1)(n-1)B_5\rho^{-n} + (n+1)B_6\rho^{-n-2}] \cos n\theta, \\ \tau_{(\rho\theta)} &= 2G[-n(n-1)B_5\rho^{-n} - (n+1)B_6\rho^{-n-2}] \sin n\theta. \end{aligned} \quad (33)$$

В итоге имеем пять неизвестных постоянных интегрирования  $B_p, B_3, B_4, B_5$  и  $B_6$ . Для их определения есть граничное условие (32) и четыре условия сопряжения на границе зон пластических и упругих деформаций.

Условие 1:

$$[\sigma_{\rho}] = \sigma_{[\rho]} - \sigma_{(\rho)} = 0 \text{ при } \rho = \rho_0. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_1 \cdot \rho_0^{\alpha-2} \cdot C(\delta; \alpha - n^2; \delta) + B_5 \cdot G(n-1)(n+2)\rho_0^{-n} + B_6 \cdot G(n+1)\rho_0^{-n-2} = 0 \quad (34)$$

Условие 2:

$$[\tau_{\rho\theta}] = \tau_{[\rho\theta]} - \tau_{(\rho\theta)} = 0 \text{ при } \rho = \rho_0. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_1 \cdot n\rho_0^{\alpha-2} \cdot C(2\delta; \alpha_2; \delta) + B_5 \cdot 2Gn(n-1)\rho_0^{-n} + B_6 \cdot 2G(n+1)\rho_0^{-n-2} = 0 \quad (35)$$

Условие 3:

$$-[u_{\theta}] = u_{(\theta)} - u_{[\theta]} = 0 \text{ при } \rho = \rho_0. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_1 \cdot \rho^{1-\alpha} [S_8(\rho_0, \rho) \cdot C(\alpha; -\delta; \delta) + S_9(\rho_0, \rho) \cdot C(\delta; \alpha; \delta)] + B_3 \rho^{1-\alpha} \cdot C(\alpha; -\delta; \delta) + B_4 \rho^{1-\alpha} \cdot C(\delta; \alpha; \delta) + B_5 \cdot n(n+4v-4)\alpha_1 \rho_0^{-n+1} + B_6 \cdot n\alpha_1 \rho_0^{-n-1} = 0 \quad (36)$$

Условие 4:

$$[\mu_\rho - A(\rho_0) \cdot \sigma_\theta] = 0 \text{ при } \rho = \rho_0. \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & B_1 \cdot \rho^{1-\alpha} \cdot C[S_8(\rho_0, \rho), S_9(\rho_0, \rho), \delta] - 2\alpha_1 A(\rho_0) \rho_0^{\alpha-2} \cdot C(\beta; \alpha - n^2; \delta) + \\ & + B_3 \rho^{1-\alpha} \cdot C(1; 0; \delta) + B_4 \rho^{1-\alpha} \cdot C(0; 1; \delta) + B_5 \cdot [2GD(\rho_0)(n-1)(n-2)\rho_0^{-n} - \\ & - (n-4\nu+2)\rho_0^{-n+1}] + B_6 \cdot [2GD(\rho_0)(n+1)\rho_0^{-n-2} - \rho_0^{-n-1}] = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Уравнения (32), (34)-(37) образуют систему линейных однородных алгебраических уравнений пятого порядка относительно пяти неизвестных  $B_1, B_3, B_4, B_5$  и  $B_6$ . Они имеют два класса решений. Если определитель системы не равен нулю, то и дополнительное решение не существует, следовательно, выработка устойчива. Если определитель системы равен нулю, то система имеет неопределенное решение типа

$$B_3 = \rho_3 B_1, \quad B_4 = \rho_4 B_1, \quad B_5 = \rho_5 B_1, \quad B_6 = \rho_6 B_1,$$

где  $\rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6$  - вполне определенные параметры, зависящие от упругих и пластических постоянных ( $E, \nu, \varphi, K(\rho_0, 1), K(\rho_0, \rho_0)$ ), а также от  $P$  и  $\gamma H$ . В этом случае  $B_1$  - любое число (в том числе  $B_1$  может быть равным и к нулю). Согласно критерию устойчивости тел в механике горных пород [3], наличие второго класса решений означает потерю устойчивости упругопластического равновесия массива горных пород вокруг горизонтальной выработки. Таким образом, потеря устойчивости упругопластического равновесия пластического неоднородного массива горных пород вокруг горизонтальной выработки глубокого заложения в форме (1) при  $n > 1$ , определяется равенством нулю характеристического определителя системы линейных однородных алгебраических уравнений пятого порядка (32), (34)-(37). Полученное характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$|a_{ij}| = 0, \quad (38)$$

где элементы определителя пятого порядка после несложных преобразований найдены следующим образом:

$$a_{11} = 2\delta, \quad a_{12} = \beta K(\rho_0, 1) + \alpha_2 P, \quad a_{13} = a_{14} = a_{15} = 0,$$

$$a_{21} = \rho_0^{\alpha_2} \cdot C(\delta; \alpha - n^2; \delta), \quad a_{22} = a_{23} = 0; \quad a_{24} = G(n-1)(n+2), \quad a_{25} = G(n+1),$$

$$a_{31} = n\rho_0^{\alpha_2} \cdot C(\delta; \alpha - 1; \delta), \quad a_{32} = a_{33} = 0; \quad a_{34} = Gn(n-1), \quad a_{35} = a_{25},$$

$$a_{41} = a_{42} \cdot S_8(\rho_0, \rho_0) + a_{43} \cdot S_9(\rho_0, \rho_0), \quad a_{42} = C(\alpha; -\delta; \delta), \quad a_{43} = C(\delta; \alpha; \delta),$$

$$a_{44} = (n+4\nu-4) \cdot a_{45}, \quad a_{45} = n\alpha_1, \quad a_{51} = C[S_8(\rho_0, \rho_0), S_9(\rho_0, \rho_0), \delta] - 2\alpha_1 D(\rho_0) \cdot a_{21},$$

$$a_{52} = C(1; 0; \delta), \quad a_{53} = C(0; 1; \delta), \quad a_{54} = 2GD(\rho_0)(n-1)(n-2) - n + 4\nu - 2, \quad (39)$$

Здесь

$$D(\rho_0) = \frac{1}{\rho_0} A(\rho_0)$$

То есть

$$D(\rho_0) = - \frac{\alpha_2 [\alpha_2 \gamma H + \beta K(\rho_0, \rho)]}{2G(\alpha_1 + 1) \left[ 2(\alpha_2 \gamma H + \beta K(\rho_0, \rho)) + \beta \rho_0 \cdot \frac{dK(\rho_0, \rho)}{d\rho} \right]} \quad \text{при } \rho = \rho_0. \quad (40)$$

Из характеристического уравнения (32) определяется критический безразмерный радиус зоны неупругих деформаций  $\rho = \rho_0$ . Критическое давление  $P_* = P_*(n)$  находится из соотношения:

$$P = \left[ \frac{2\gamma H - \beta K(\rho_0, \rho)}{\alpha_1 + 1} - \beta S_1(\rho_0, \rho_0) \right] \rho_0^{-\alpha_2} \quad \text{при } \rho_0 = \rho_*. \quad (41)$$

Таким образом, характеристическое уравнение (38) и соотношение (40), а также зависимость (41) определяют для разных чисел волнообразования  $n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) различные критические давления  $P_*(n)$ , когда выработка теряет устойчивость упругопластического равновесия в конкретной форме, соответствующей наибольшему критическому давлению.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимжанов А.М., Киябаев С.Н. Напряженно-деформированное состояние и устойчивость упругопластического равновесия неоднородного массива вокруг горизонтальной выработки кругового сечения. //ММПТ, 1996. №1. С. 54-56.
2. Гордон В.И. Исследование устойчивости упруго-пластического равновесия толстенных оболочек и полостей в сплошном массиве. //Дисс... канд. физ.-мат.н., Алма-Ата. – 1987. – 136 с.
3. Алимжанов М.Т. Устойчивость равновесия тел и задачи механики горных пород. – Алма-Ата: Наука, 1982. – 272 с.

Жезказганский университет им. О.А. Байконурова, г. Жезказган.  
Материал поступил в редакцию 15.08.2012 г.

АРИНОВ Е, СӘРСЕНБАЕВ Ж. Е.

ИЛІМДІ БІРТЕКТІ ЕМЕС ТАУ-КЕН ЖЫНЫСТАРЫНЫҢ  
ГОРИЗОНТАЛЬДІ ҚУЫС МАҢАЙЫНДАҒЫ ОСЕСИММЕТРИЯЛЫ  
СЕРПІМДІ-ИЛІМДІ ТҰРАҚТЫЛЫҒЫНЫҢ ӘРТҮРЛІ ФОРМАДАҒЫ  
ЖАЗЫҚТЫ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫНЫҢ БҰЗЫЛУЫ

ARINOV E., SARSENBAYEV ZH. Y.

VARIOUS FORMS OF FLAT LOSS OF STABILITY OF ASYMMETRIC ELASTIC-PLASTIC EQUILIBRIUM OF PLASTIC HETEROGENEOUS MASSIF OF ROCKS AROUND HORIZONTAL PIT

*Түйіндеме*

*Мақалада илімді біртекті емес тау-кен жыныстарының массивтеріндегі горизонтальді қуыс маңайындағы жазық тұрақтылық және қосымша шешімнің пайда болуына байланысты массив тұрақтылығының орнықтылығының жоғалуы қарастырылған.*

*Resume*

*The flat balance of plastic heterogeneous massif of rocks around the horizontal pit, and loss of stable equilibrium of the massif, relevant to the rise of additional solutions are considered in this article.*

УДК 539.3:534.2

**Н.А. ИСПУЛОВ, А. К. СЕЙТХАНОВА, А.Б. ИСКАКОВА  
О ПОСТРОЕНИИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ, СТРУКТУРЫ МАТРИЦАНТА И  
УРАВНЕНИЙ ДИСПЕРСИИ ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН  
В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ РОМБИЧЕСКОЙ И  
ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ КЛАССОВ**

1 Матричная формулировка задач распространения термоупругих волн  
Распространение термоупругих волн в анизотропных средах описывается уравнениями движения, решаемых совместно с уравнением теплопроводности Фурье и уравнением притока тепла, которые имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{U}_i \quad (1)$$

$$\lambda_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = -q_i \quad (2)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = -i\omega \beta_{ij} \varepsilon_{ij} - i\omega \frac{c_\varepsilon}{T_0} \theta \quad (3)$$

где  $\sigma_{ij}$  - тензор напряжения,  $\rho$  - плотность среды,  $\lambda_{ij}$  - тензор теплопроводности,  $q_i$  - вектор притока тепла,  $\omega$  - круговая частота,

$\beta_{ij}$  - термомеханические постоянные  $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ ,  $\epsilon_{ij}$  - тензор деформации,  $\tilde{n}$  - теплоемкость при постоянной деформации,  $\theta = T - T_0$  - приращение температуры по сравнению с температурой естественного состояния  $T_0$ ,  $\left| \frac{\theta}{T_0} \right| \ll 1$  для малых деформаций.

Физико-механические величины связаны соотношением Дюгамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} - \beta_{ij} \theta \quad (4)$$

Здесь  $c_j$  - упругие параметры,  $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}$ ;  $\epsilon_{kl}$  - тензор малых деформаций Коши.

Уравнения (1)-(4) определяют взаимосвязь механических напряжений и температуры как функции независимых переменных – теплового поля и деформации.

Таким образом, соотношения (1)-(4) составляют замкнутую систему уравнений термоупругости, которая описывает распространение термоупругих волн.

На основе метода разделения переменных в случае гармонической зависимости от времени:

$$\left[ U_i(x, y, z, t); \sigma_{ij}(x, y, z, t); \theta; q_z \right] = \left[ U_i(z), \sigma_{ij}(z), \theta; q_z \right] e^{i(\omega t - mx - ny)} \quad (5)$$

Система уравнений (1)-(4) приводится к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка с переменными коэффициентами, описывающей распространение гармонических волн:

$$\frac{d\vec{W}}{dz} = B\vec{W} \quad (6)$$

Здесь  $B = B[c_{ijkl}(z), \beta_{ij}(z), \omega, m, n]$  - матрица коэффициентов, элементы которой содержат в себе параметры среды, в которой распространяются термоупругие волны;  $m, n$  - компоненты волнового вектора  $\vec{k}$ .

Вектор  $\vec{W}$  имеет вид:

$$\vec{W}(x, y, z, t) = \left[ u_z(z), \sigma_{zz}, u_x(z), \sigma_{xz}, u_y(z), \sigma_{yz}, \theta, q_z \right] \exp(i\omega t - imx - iny) \quad (7)$$

Символ  $\hat{t}$  означает операцию транспонирования вектора - строки в вектор – столбец.

Неоднородность среды предполагается вдоль оси Z. При построении матрицы коэффициентов В используется представление решения в виде (5), из системы уравнений (1)-(4) выделяются производные по Z и исключаются компоненты тензора напряжения не входящие в граничные условия. Множитель  $\exp(i\omega t - imx - iny)$  всюду опущен.

Структуры матрицы В и вектор – столбец граничных условий в объемном случае для ромбической и гексагональной сингонии в случае оси симметрии второго порядка и неоднородности вдоль оси Z:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & b_{45} & 0 & b_{47} & 0 \\ b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 \\ 0 & b_{15} & b_{45} & 0 & b_{65} & 0 & b_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega b_{17} & -i\omega b_{47} & 0 & -i\omega b_{67} & 0 & b_{87} & 0 \end{bmatrix} \quad \vec{W} = \begin{pmatrix} u_z \\ \sigma_{zz} \\ u_x \\ \sigma_{xz} \\ u_y \\ \sigma_{yz} \\ \theta \\ q_z \end{pmatrix} \quad (8)$$

Из структуры матрицы коэффициентов (8) следует, что в пространственном случае упругие волны различной поляризации и тепловая волна взаимосвязаны.

Отличные от нуля элементы матрицы В  $b_{13}$ ,  $b_{24}$  определяют взаимную трансформацию продольной и поперечной X - поляризованной волн. Элементы  $b_{15}$ ,  $b_{26}$  описывают взаимосвязь поперечной Y-поляризации с продольной волной. Отличный от нуля элемент  $b_{45}$  определяет взаимную трансформацию между волнами поперечной поляризации.

$$\text{Отличие от нуля коэффициента } b_{17}: \quad b_{17} = \frac{\beta_{33}}{c_{33}}$$

означает, что продольная волна распространяется с термоупругим эффектом.

Не нулевые элементы  $b_{47}$  и  $b_{67}$ :

$$b_{47} = \left( \frac{c_{13}}{c_{33}} \beta_{33} - \beta_{11} \right) im; \quad b_{67} = \left( \frac{c_{23}}{c_{33}} \beta_{33} - \beta_{22} \right) in$$

означают влияние на упругие волны поперечных поляризаций термоупругого эффекта. При этом  $b_{47}$  описывает влияние термоупругого



эффекта на упругую поперечную волну X- поляризации, а  $b_{67}$  влияние термоупругого эффекта на поперечную волну Y- поляризации.

Аналогично, для термоупругих волн, распространяющихся в анизотропной среде кубической сингонии построена матрица коэффициентов в объемном случае и проведен анализ матриц коэффициентов. Также получены структуры матриц коэффициентов при распространении термоупругих волн в анизотропных средах ромбической и гексагональной и кубической сингоний в плоскости XZ и YZ, определены типы волн и взаимная трансформация волн различной поляризации.

## 2 Структура матрицанта

Построение структуры матрицанта основано на его представлении в форме экспоненциального матричного ряда

$$T = E + \int_0^z B dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} B(z_1)B(z_2) dz_1 dz_2 + \dots \quad (9)$$

И аналогичном представлении обратного матрицанта  $T^{-1}$

$$T^{-1} = E - \int_0^z B dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} B(z_2)B(z_1) dz_1 dz_2 - \dots \quad (10)$$

Оба ряда абсолютно и равномерно сходятся на любом конечном интервале, в котором элементы матрицы  $B(z)$  непрерывны.

При этом справедливо соотношение:

$$TT^{-1} = T^{-1}T = E \quad (11)$$

Построение структуры матрицанта есть установление зависимости между элементами прямой и обратной матриц  $T$  и  $T^{-1}$  на основе поэлементного их сравнения.

Бесконечные матричные ряды можно представить в виде

$$T = T_{ч} + T_{нч}, \quad T^{-1} = T_{ч}^{-1} - T_{нч}^{-1} \quad (12)$$

где  $T_{ч,нч}^{\pm}$  – сумма четных и нечетных рядов (9) и (10).

Методом математической индукции доказывается, что структура  $T_{(2n)}^{-1}$  и  $T_{(2n+1)}^{-1}$  сохраняется при любом  $n$ .

Структура матрицанта, в случае распространения термоупругих волн в кубической, гексагональной и ромбической сингоний в объемном случае, определена в виде:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} & -t_{42} & t_{32} & -t_{62} & t_{52} & -t_{82} & t_{72} \\ -t_{21} & t_{11} & t_{41} & -t_{31} & t_{61} & -t_{51} & t_{81} & -t_{71} \\ -t_{24} & t_{14} & t_{44} & -t_{34} & t_{64} & -t_{54} & t_{84} & -t_{74} \\ t_{23} & -t_{13} & -t_{43} & t_{33} & -t_{63} & t_{53} & -t_{83} & t_{73} \\ -t_{26} & t_{16} & t_{46} & -t_{36} & t_{66} & -t_{56} & t_{86} & -t_{76} \\ t_{25} & -t_{15} & -t_{45} & t_{35} & -t_{65} & t_{55} & -t_{85} & t_{75} \\ -t_{28} & t_{18} & t_{48} & -t_{38} & t_{68} & -t_{58} & t_{88} & -t_{78} \\ t_{27} & -t_{17} & -t_{47} & t_{37} & -t_{67} & t_{57} & -t_{87} & -t_{77} \end{pmatrix} \quad (13)$$

элементы  $t_{ij}$  матрицанта  $T^{-1}$  являются элементами прямого матрицанта  $T$ .

Получены структура матрицанта при распространении термоупругих волн в данных классах в плоскости  $XZ$ , в плоскости  $YZ$ .

В одномерном случае (распространение волн вдоль оси  $Z$ ,  $m=0$ ,  $n=0$ ) структура (13) примет вид:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} & -t_{82} & t_{72} \\ -t_{21} & t_{11} & t_{81} & -t_{71} \\ -t_{28} & t_{18} & t_{88} & -t_{78} \\ t_{27} & -t_{17} & -t_{87} & t_{77} \end{pmatrix}; T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{44} & -t_{34} \\ -t_{43} & t_{33} \end{pmatrix}; T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{66} & -t_{56} \\ -t_{65} & t_{55} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Построение структуры матрицанта, в данном случае, есть установление зависимости между элементами прямой и обратной матриц  $T$  и  $T^{-1}$  на основе поэлементного их сравнения.

Разложение структуры (8x8) матрицы (13) на матрицу (4x4) и две матрицы (2x2) означает независимость распространения упругой продольной волны с термоэффектом и упругих поперечных волн. В то же время на упругие поперечные волны, при одномерном распространении в анизотропных средах кубической, гексагональной и ромбической сингоний, вдоль оси симметрии четного порядка, также распространяются без термоупругого эффекта.

### 3 Уравнения дисперсии для упругих и термоупругих анизотропных сред

Основной характеристикой, определяющей закономерности волновых процессов в неограниченных периодических структурах, являются уравнения дисперсии. Дисперсионные соотношения представляют собой зависимости  $v = v(\omega)$ ,  $\kappa = \kappa(\omega)$ ,  $\omega = \omega(\kappa)$ ,  $\omega = \omega(v)$ . Где  $v$  - скорость,  $\omega$  - циклическая частота,  $\kappa$  - волновой вектор. В частном случае мы получаем зависимость  $\kappa = \kappa(\omega)$ . Полученная выше структура матрицанта позволяет

модифицировать условие существования нетривиальных решений и в два раза понизить степень характеристического уравнения.

На основе модифицированной формы условия существования нетривиальных решений:

$$\det[p - E \cos \tilde{k}h] = 0 \quad (15)$$

где

$$p = \frac{1}{2}[T + T^{-1}] \quad (16)$$

получены уравнения дисперсии термоупругих волн, распространяющихся в анизотропных средах кубической, гексагональной и ромбической сингоний в объемном случае, имеющие следующий вид:

$$\begin{aligned} \cos \tilde{k}_1 h &= -\frac{a}{4} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \left( \sqrt{3\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{5(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}}} \right) - \\ &\frac{1}{5} \left( \sqrt{-\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{2(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}} + \frac{5(a^3 - 4ba + 8c)}{3\sqrt[3]{\gamma}}} + 3a^2 - 8b \right) \\ \cos \tilde{k}_2 h &= -\frac{a}{4} - \frac{1}{4} \left( \sqrt{3\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{5(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}}} \right) + \\ &+ \frac{1}{5} \left( \sqrt{-\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{2(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}} + \frac{5(a^3 - 4ba + 8c)}{3\sqrt[3]{\gamma}}} + 3a^2 - 8b \right) \\ \cos \tilde{k}_3 h &= -\frac{a}{4} + \frac{1}{4} \left( \sqrt{3\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{5(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}}} \right) - \\ &- \frac{1}{5} \left( \sqrt{-\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{2(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}} + \frac{5(a^3 - 4ba + 8c)}{3\sqrt[3]{\gamma}}} + 3a^2 - 8b \right) \\ \cos \tilde{k}_4 h &= -\frac{a}{4} + \frac{1}{4} \left( \sqrt{3\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{5(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}}} \right) + \\ &+ \frac{1}{5} \left( \sqrt{-\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{2(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}} - \frac{5(a^3 - 4ba + 8c)}{3\sqrt[3]{\gamma}}} + 3a^2 - 8b \right) \end{aligned}$$

где

$$\gamma = \sqrt[3]{2b^3 - 9(ac + 8d)b + 27(c^2 + a^2d) + \sqrt{(2b^3 - 9(ac + 8d)b + 27(da^2 + c^2))^2 - 4(b^2 - 3ac + 12d)}} \quad (16)$$

$a, b, c$  – элементы матрицы

Данные уравнения дисперсии получены с помощью математического пакета *Mathematic 4.0*.

Знание матрицы монодромии (матрицант одного периода неоднородности) позволяет в аналитической форме получить представление матрицанта произвольного периодически неоднородного слоя.

При наличии  $n$  периодов последовательность уравнений

$$\vec{u}_1 = T\vec{u}_0, \vec{u}_2 = T\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n = T\vec{u}_{n-1} \quad (17)$$

приводит к уравнению

$$\vec{u}_n = T^n \vec{u}_0 \quad (18)$$

Таким образом, вычисление матрицанта периодически неоднородного слоя, имеющего  $n$  периодов, связано с вычислением  $n$  – ой степени матрицы монодромии.

Введение важной для регулярных структур матрицы  $p$  (16) дает рекуррентное соотношение:

$$T^2 = 2pT - E \quad (19)$$

Последовательное применение (19) позволяет представить  $T_n$  в виде:

$$T^n = P_n(p)T - P_{n-1}(p) \quad (20)$$

где  $P_n(p)$  – матричные полиномы Чебышева – Гегенбауэра.

Получены уравнения дисперсии упругих волн в однородных анизотропных слоях при различных граничных условиях: уравнение дисперсии упругих волн в анизотропном слое ромбической сингонии при жестком закреплении границ; уравнение дисперсии упругих волн в анизотропном слое в случае свободных границ и в случае свободно-жестких границ.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.К. Тлеуменов Метод матрицанта. Павлодар, НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004, 148 с.
2. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1986, 556 с.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988, 552 с.
4. Тлеуменов С. К., Орынбасаров К. А. О матрицах фундаментальных решений уравнений динамики неоднородных анизотропных сред. Изв. АН Каз ССР, сер. физ.-мат., 1991, N 5, С. 87-91.

Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова,  
г. Павлодар. Материал поступил в редакцию 15.08.2012 г.

Н.А. ИСПУЛОВ, А.К. СЕЙТХАНОВА, А.Б. ИСКАҚОВА  
АНИЗОТРОПТЫ ОРТАЛАРДЫҢ РОМБЫЛЫҚ ЖӘНЕ  
ГЕКСАГОНАЛДЫҚ КЛАСТАРДАҒЫ ТЕРМОСЕРПІМДІ ТОЛҚЫНДАРДЫҢ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ ЖҮЙЕСІН, МАТРИЦАНТ  
ҚҰРЫЛЫМЫН ЖӘНЕ ДИСПЕРСИЯ ТЕҢДЕУЛЕРІН ҚҰРУ ТУРАЛЫ

N.A. ISPULOV, A.K. SEYTHANOVA, A.B. ISKAKOVA  
ABOUT CREATION OF SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS,  
STRUCTURES OF THE MATRICIANT AND THE EQUATIONS OF  
DISPERSION OF THERMOELASTIC WAVES IN NON-ISOTROPIC  
MEDIUMS RHOMBIC AND HEXAGONAL CLASSES

### **Түйіндеме**

*Термомеханикалық эффектiмен болатын серпiмдi орталарда толқындық процесстердiң заңдылықтарды зерттеу актуалдығы, геофизика, сейсмология, композиттік материалдардың механикасының теориялық және қолданбалы есептердi шешуiнде қажеттiлiгiмен байланысты. Байланысқан қозғалыс теңдеулерi мен жылуоткiзiшiлiк теңдеулерi физика–механикалық параметрлердiң күрделiгi мен көп болуымен ерекшеленедi. Осыған байланысты деформацияланатын қатты дене механикасының – термосерпiмдiлiк деген тарауы қарқынды дамып келедi. Осы бағыттың аясында анизотропты орталардың кейбiр физика–механикалық қасиеттерiн қолдана отырып, байланысқан жылулық және механикалық өрiстер зерттеледi.*

### **Resume**

*The urgency of research of laws of wave processes in elastic environments with thermo mechanical effect is connected with necessity of the decision of theoretical and applied problems of geophysics, seismology, mechanics of composite materials etc. Connected equations of movement and the heat conductivity equation differ complexity and an abundance of physical–mechanical parameters. In this connection the section of mechanics of a deformable firm body, - thermo elasticity intensively develops. Within the limits of this direction, leaning against use of certain physical–mechanical properties anisotropic environments, the connected thermal and mechanical fields are studied.*

## Н.А. ИСПУЛОВ, А.К. СЕЙТХАНОВА О РАСПРОСТРАНЕНИИ РЭЛЕЕВСКИХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Физика поверхностных акустических волн составляет основу новой, развивающейся области прикладной физики и техники, объединяющей такие различные дисциплины, как неразрушающий контроль, сейсмология и обработка сигналов в электронных системах.

Чрезвычайно низкая скорость распространения и, следовательно, очень малая длина волны акустических (ультразвуковых) волн позволяют очень просто осуществлять с их помощью те операции, которые было весьма трудно выполнить при любой другой технологии. Быстрое развитие физики и техники ПАВ обусловлено объединением усилий специалистов по теории упругости, физики твердого тела и радиотехнике. Благодаря этому было обеспечено быстрое изучение акустических волн этого типа и достигнут значительный успех в соответствующих инженерных разработках [1]. Методом исследования является аналитический метод матрицанта, разработанный профессором С.К. Тлеукиевым и его учениками [2].

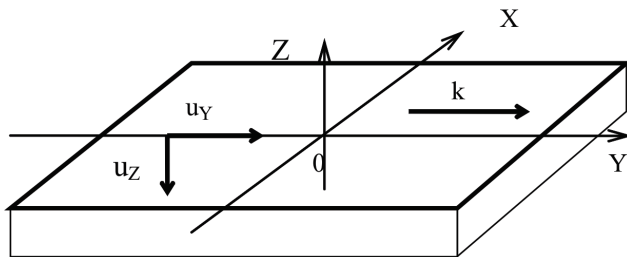


Рисунок 1 – Система координат к вопросу о распространении рэлеевской волны

При распространении рэлеевских волн в неоднородной изотропной среде в плоскости  $yz$  (при наличии неоднородности вдоль оси  $z$ ) система дифференциальных уравнений 1-го порядка имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dU_z}{dz} &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} \sigma_{zz} + ik_y \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} U_y \\ \frac{d\sigma_{zz}}{dz} &= -\rho\omega^2 U_z + ik_y \sigma_{yz} \\ \frac{dU_y}{dz} &= \frac{1}{\mu} \sigma_{yz} + ik_y U_z \\ \frac{d\sigma_{yz}}{dz} &= ik_y \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{zz} + \left( \left( \lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) k_y^2 - \omega^2 \rho \right) U_y \end{aligned} \right. \quad (1)$$

или в матричном виде (1) имеет вид:

$$\frac{d\vec{W}}{dz} = B\vec{W} \quad (2)$$

где  $\vec{W} = (U_z; \sigma_{zz}; U_y; \sigma_{yz})^t$ .

Индекс «t» указывает транспонирование вектор-строки в вектор-столбец.

В (2) структура матрицы коэффициентов имеет вид

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{15} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{26} \\ b_{26} & 0 & 0 & b_{56} \\ 0 & b_{15} & b_{65} & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Решение системы (2) будем искать в виде [2]:

$$T = \hat{E} \cos \tilde{k}z + \frac{\hat{B}}{\tilde{k}} \sin \tilde{k}z \quad (4)$$

Получим  $t_{ij}$  в формуле (4) в явной форме. Матрицы  $T_0$  и  $\hat{E}$  будут иметь вид:

$$T_0 = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{pmatrix} \quad \hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$t_{11} = \cos \tilde{k}z; \quad t_{12} = b_{12} \frac{\sin \tilde{k}z}{\tilde{k}} = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{\sin \tilde{k}z}{\tilde{k}};$$

$$t_{13} = b_{15} \frac{\sin \tilde{k}z}{\tilde{k}} = ik_y \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{\sin \tilde{k}z}{\tilde{k}}; \quad t_{14} = 0;$$

$$\begin{aligned}
 t_{21} &= b_{21} \frac{\sin \tilde{k}z}{\tilde{k}} = -\rho\omega^2 \frac{\sin \tilde{k}z}{\tilde{k}}; & t_{22} &= \cos \tilde{k}z; \\
 t_{23} &= 0; & t_{24} &= b_{26} \frac{\sin \tilde{k}z}{\tilde{k}} = ik_y \frac{\sin \tilde{k}z}{\tilde{k}}; \\
 t_{31} &= b_{26} \frac{\sin \tilde{k}z}{\tilde{k}} = ik_y \frac{\sin \tilde{k}z}{\tilde{k}}; & t_{32} &= 0; \\
 t_{33} &= \cos \tilde{k}z; & t_{34} &= b_{56} \frac{\sin \tilde{k}z}{\tilde{k}} = \frac{1}{\mu} \frac{\sin \tilde{k}z}{\tilde{k}}; \\
 t_{41} &= 0; & t_{42} &= b_{15} \frac{\sin \tilde{k}z}{\tilde{k}} = ik_y \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\sin \tilde{k}z}{\tilde{k}}; \\
 t_{43} &= b_{65} \frac{\sin \tilde{k}z}{\tilde{k}} = \left( \left( \lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) k_y^2 - \omega^2 \rho \right) \frac{\sin \tilde{k}z}{\tilde{k}}.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$t_{13} = t_{42}, \quad t_{24} = t_{31}, \quad t_{44} = t_{33} = t_{22} = t_{11}$$

Матрица  $T_0$  будет иметь вид

$$T_0 = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & 0 \\ t_{21} & t_{11} & 0 & t_{24} \\ t_{24} & 0 & t_{11} & t_{34} \\ 0 & t_{13} & t_{43} & t_{11} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Связь между амплитудами падающих и отраженных волн зададим в виде:

$$\begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_y \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = T_0 \begin{pmatrix} U_{z_0} \\ \sigma_{zz_0} \\ U_{y_0} \\ \sigma_{yz_0} \end{pmatrix} \quad (6)$$

или

$$\vec{W} = T_0 \vec{W}_0 \quad (6')$$

Вектор смещения для изотропных сред представляется в виде:

$$\vec{U} = \text{grad}\varphi + \text{rot}\vec{\psi} \quad (7)$$



Скалярный и векторный потенциалы задаются в следующем виде:

$$\varphi = A_1 e^{-ik_z z - ik_y y} + B_1 e^{ik_z z - ik_y y} \quad (8)$$

$$\psi = A_2 e^{-ik_z z - ik_y y} + B_2 e^{ik_z z - ik_y y}$$

где  $A_1, A_2, B_1, B_2$  - амплитуды падающих и отраженных волн.

Запишем уравнение (6) в другом виде с учетом (8)

$$\begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_y \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Теперь приравняем (6) и (9), получим:

$$G \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} U_{z_0} \\ \sigma_{zz_0} \\ U_{y_0} \\ \sigma_{yz_0} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = G^{-1} T \begin{pmatrix} U_{z_0} \\ \sigma_{zz_0} \\ U_{y_0} \\ \sigma_{yz_0} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Компоненты вектора смещения  $\vec{U} - U_y$  и  $U_z$  в случае распространения рэлеевских волн равны:

$$U_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad U_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (12)$$

Выразим из (11) компоненты тензора смещения:

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{dU_z}{dz} - \lambda ik_y U_y \quad (13)$$

$$\sigma_{yz} = \mu \frac{dU_y}{dz} - \mu ik_y U_z$$

Запишем (9) в виде:

$$\begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_y \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

Компоненты матрицы G имеют вид:

$$\begin{aligned} g_{11} &= -ik_z; & g_{12} &= ik_z; \\ g_{13} &= -ik_y; & g_{14} &= -ik_y; \\ g_{21} &= -(\lambda + 2\mu)k_z^2 - \lambda k_y^2; & g_{22} &= -(\lambda + 2\mu)k_z^2 - \lambda k_y^2; \\ g_{23} &= -((\lambda + 2\mu)k_y k_z - \lambda k_y k_z); & g_{24} &= (\lambda + 2\mu)k_y k_z - \lambda k_y k_z; \\ g_{31} &= -ik_y; & g_{32} &= -ik_y; \\ g_{33} &= ik_z; & g_{34} &= -ik_z; \\ g_{41} &= -2\mu k_y k_z; & g_{42} &= 2\mu k_y k_z; \\ g_{43} &= \mu(k_z^2 - k_y^2); & g_{44} &= \mu(k_z^2 - k_y^2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$g_{11} = -g_{12} = -g_{33} = g_{34}$$

$$g_{13} = g_{14} = g_{31} = g_{32}$$

$$g_{41} = -g_{42}$$

$$g_{21} = g_{22}$$

$$g_{43} = g_{44}$$

$$g_{23} = -g_{24}$$

Матрица G будет иметь вид

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & -g_{11} & g_{13} & g_{13} \\ g_{21} & g_{21} & g_{23} & -g_{23} \\ g_{13} & g_{13} & -g_{11} & g_{11} \\ g_{41} & -g_{41} & g_{43} & g_{43} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Найдем обратную матрицу  $G^{-1}$  по формуле

$$G^{-1} = \frac{1}{\det G} \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{pmatrix}$$

$$\det G = \begin{pmatrix} g_{11} & -g_{11} & g_{13} & g_{13} \\ g_{21} & g_{21} & g_{23} & -g_{23} \\ g_{13} & g_{13} & -g_{11} & g_{11} \\ g_{41} & -g_{41} & g_{43} & g_{43} \end{pmatrix} = g_{11}A_{11} + (-g_{11})A_{12} + g_{13}A_{13} + g_{13}A_{14}$$

где  $A$  – алгебраическое дополнение.

Обратная матрица  $G^{-1}$  будет иметь вид

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & g_{41} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} & g_{42} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & g_{43} \\ g_{14} & g_{24} & g_{34} & g_{44} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Проверка  $GG^{-1} = E$

$$GG^{-1} = \begin{pmatrix} g_{11} & -g_{11} & g_{13} & g_{13} \\ g_{21} & g_{21} & g_{23} & -g_{23} \\ g_{13} & g_{13} & -g_{11} & g_{11} \\ g_{41} & -g_{41} & g_{43} & g_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & g_{41} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} & g_{42} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & g_{43} \\ g_{14} & g_{24} & g_{34} & g_{44} \end{pmatrix} = E$$

Вычислим матрицу  $\hat{L}$  (в явном виде):

$$\hat{L} = G^{-1}T_0$$

Рассмотрим случай, когда границы среды свободны от напряжения

$$x_0 = 0$$

$$z_0 = 0$$

$$\begin{matrix} A_1 \div \\ 0 \div \\ B_1 \div \\ 0 \div \end{matrix} = L \begin{matrix} U_{z_0} \div \\ 0 \div \\ U_{y_0} \div \\ 0 \div \end{matrix} = \begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ l_2 & l_2 & l_3 & l_4 \\ l_3 & l_3 & l_3 & l_4 \\ l_4 & l_4 & l_3 & l_4 \end{matrix} \begin{matrix} U_{z_0} \div \\ 0 \div \\ U_{y_0} \div \\ 0 \div \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} l_{21}U_{z_0} + l_{23}U_{y_0} &= 0 \\ l_{41}U_{z_0} + l_{43}U_{y_0} &= 0 \end{aligned}$$

Условием существования нетривиальных решений является равенство нулю следующего определителя

$$\det \begin{vmatrix} l_{21} & l_{23} \\ l_{41} & l_{43} \end{vmatrix} = 0$$

$$l_{21}l_{43} - l_{23}l_{41} = 0$$

Рассмотрим частный случай при  $T_0 = E$

$$L = G^{-1}E$$

$$l_{21}l_{43} - l_{23}l_{41} = 0$$

$$\frac{(k_z^2 - k_y^2)}{2ik_z(k_y^2 + k_z^2)} \cdot \frac{(\lambda + 2\mu)k_z^2 + \lambda k_y^2}{2ik_z(\lambda + 2\mu)(k_z^2 + k_y^2)} - \frac{\mu k_y}{i(\lambda + 2\mu)(k_z^2 + k_y^2)} \cdot \frac{k_y}{i(k_y^2 + k_z^2)} = 0$$

$$(k_z^2 - k_y^2)((\lambda + 2\mu)k_z^2 + \lambda k_y^2) + 4\mu k_y^2 k_z^2 = 0 \quad (16)$$

уравнение Рэлея

В статье рассмотрены задачи распространения упругих поверхностных волн в изотропной среде. Получены уравнения Рэлея, определяющие связь компонентов волнового вектора с упругими параметрами среды, когда границы среды свободны от напряжения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фарнелл Дж. Свойства упругих поверхностных волн. Физическая акустика (под. ред. У. Мэзона), т. VI, гл. 3. М., «Мир», 1973.
2. Тлеуженов С.К. Метод матрицанта. – Павлодар: НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004. - 148 с.

Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар. Материал поступил в редакцию 15.08.2012 г.

Н.А. ИСПУЛОВ, А.Қ. СЕЙТХАНОВА

БІРТЕКТІ ИЗОТРОПТЫ ОРТАДАҒЫ РЭЛЕЙ ТӨЛҚЫНДАРДЫҢ ТАРАЛУЫ ТУРАЛЫ

N. A. ISPULOV, A.K.SEYTKHANOVA

## ABOUT PROPAGATION RAYLEIGH WAVES IN THE NON-UNIFORM ISOTROPIC MEDIUM

**Түйіндеме**

*Изотропты және анизотропты орталарда толқындық процестерді зерттеу қазіргі уақытта матрицалық аппаратты қолданумен байланысты. Серпінді, термосерпінді, электрмагниттік, пьезосерпінді және беттік толқындарды зерттеу үшін бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесінің матрицант құрылымын құрастыруға негізделген матрицалық әдіс қолданылады.*

**Resume**

*Studying of wave processes in isotropic and anisotropic environments is connected now with application of matrix annapam. For studying elastic, thermoelastic, electromagnetic, piezoelastic and surface waves the matrix method based on construction of structure matrizer of system of the differential equations of the first order is used.*

УДК 534.2:537.2

**С.К. ТЛЕУКЕНОВ**  
**ОБ АНАЛИЗЕ МАТРИЦ КОЭФФИЦИЕНТОВ**  
**ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ**  
**В ПЬЕЗОКРИСТАЛЛАХ**

При рассмотрении макроскопических свойств кристаллов, можно отвлечься от их дискретного микропериодического строения. При этом кристалл выступает как сплошная однородная анизотропная среда. В самом деле, рассматривая макроскопические свойства кристаллов, мы имеем дело с расстояниями, существенно большими, чем наибольший из периодов кристаллической решетки, и с объемами, гораздо большими, чем объем ячейки. Поэтому можно рассматривать кристалл как сплошную (непрерывную) среду. Следует помнить, что кристалл можно рассматривать как сплошную однородную среду лишь с некоторой точностью, так как реальный пьезоэлектрический кристалл содержит различного рода примеси и несовершенства, имеющие различное объемное распределение (секториальное, зонарное и т.д.). Физические свойства кристалла анизотропны и зависят от направления, их описание зависит от ориентации системы координат. Анизотропность среды определяется либо ее внутренней

структурой, либо создается наложением внешних полей- магнитных, электрических, упругих деформаций.

Анализ распространения волн в пьезоэлектрических средах основывается на уравнениях упругости, решаемых совместно с уравнениями Максвелла.

Система уравнений Максвелла при равенстве нулю объемной плотности зарядов  $\rho$  и вектора плотности токов  $\vec{j}$  запишем следующим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad (4)$$

При  $\varphi = 0, j = 0$  уравнения (3), (4) являются следствием уравнений (1), (2).

Компоненты электрической индукции выражаются через деформации и напряженность электрического поля:

$$D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ik} E_k \quad (5)$$

где  $e_{ikl}$  - пьезоэлектрические постоянные, связывающие электрическое поле с механическими напряжениями;

$\varepsilon_{ik}$  - компоненты тензора диэлектрической проницаемости;

$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,l})$  - тензор деформации;

Связь же вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  с напряженностью магнитного поля  $\vec{H}$  можно представить в форме:

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \quad (6)$$

В случае пьезокристаллов система уравнений (1), (2), (5), (6) рассматривается совместно с определяющим соотношением между напряжением и деформацией, которое будет содержать дополнительное слагаемое, связанное с электрическим полем:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{l,k} - e_{ikl} E_k \quad (7)$$

Уравнениями движения упругой анизотропной среды имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (8)$$

где  $c_{ijkl}$  - упругие жесткости,  $\rho$  - плотность среды.

С учетом высказанных выше исходных положений представление волновых полей  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{D}$  рассматриваются в виде:

$$\vec{F} = \vec{F}(\omega, z)e^{i\omega t \pm ik_x x \pm ik_y y} \quad (9)$$

На основе метода разделения переменных система уравнений (1-8) может быть приведена к эквивалентной системе 1-го порядка, описывающей распространение гармонических волн:

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B}\vec{u}; \quad \vec{u} = (u_z, \sigma_{zz}, u_x, \sigma_{xz}, u_y, \sigma_{yz}, E_y, H_x, H_y, E_x)' \quad (10)$$

где  $u_i, \sigma_{iz}$  – компоненты вектора смещения и тензора напряжения;  $E_y, H_x, H_y, E_x$  – компоненты электрических и магнитных полей;  $k_x, k_y$  – соответственно  $x$  и  $y$  – компоненты волнового вектора; символ  $\hat{\phantom{B}}$  означает операцию транспонирования в вектор – столбец.

$$\hat{B} = \hat{B}[c_{ijkl}(z), e_{kij}(z), \vartheta_{ij}(z), k_x, k_y] \text{-матрица коэффициентов}$$

Элементы этой матрицы содержат в себе параметры среды в которой распространяется электроупругая волна.

Неоднородность среды предполагается вдоль оси  $z$ . При построении матрицы коэффициентов  $\hat{B}$  используется представление решения в виде (10) из системы уравнений (1-8) выделяются производные по  $z$  и исключаются компоненты тензора напряжений не входящие в граничные условия, при неоднородности вдоль оси  $z$ .

Тетрагональная система класса 422 – имеет четырехкратную ось симметрии, параллельную оси  $Z$ , и характерные признаки ромбической системы класса 222. Коэффициенты матрицы должны одновременно определяться тетрагональной системой класса 4 и ромбической системой класса 222. В результате получаем следующие матрицы материальных коэффициентов:

$$c_{ijkl} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}; e_{kij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & e_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \vartheta_{ij} = \begin{pmatrix} \vartheta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \vartheta_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta_{33} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Здесь мы имеем 6 независимых коэффициентов  $c_{ijkl}$ , 1 коэффициент  $e_{kij}$  и 2 коэффициента  $\vartheta_{ij}$ .

Проведя аналогичные пункту 1.2. вычисления получен явный вид дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dU_z}{dz} = \frac{1}{c_{33}} \sigma_{zz} + \left( \frac{ik_x c_{13}}{c_{33}} \right) U_x + \left( \frac{ik_y c_{13}}{c_{33}} \right) U_y$$

$$\frac{d\sigma_{zz}}{dz} = -\rho \omega^2 U_z + ik_x \sigma_{xz} + ik_y \sigma_{yz}$$

$$\frac{dU_x}{dz} = \frac{1}{c_{44}} \sigma_{xz} + ik_x U_z + \frac{e_{14}}{c_{44}} E_y$$

$$\frac{d\sigma_{xz}}{dz} = \frac{ik_x c_{13}}{c_{33}} \sigma_{zz} + (-\rho \omega^2 + k_x^2 c_{11} - \frac{k_x^2 c_{13}^2}{c_{33}} + k_y^2 c_{66}) U_x + (k_x k_y c_{12} - \frac{k_x k_y c_{13}^2}{c_{33}} + k_x k_y c_{66}) U_y$$

$$\frac{dU_y}{dz} = \frac{1}{c_{44}} \sigma_{yz} + ik_y U_z + \frac{e_{14}}{c_{44}} E_x$$

$$\frac{d\sigma_{yz}}{dz} = \frac{ik_y c_{13}}{c_{33}} \sigma_{zz} + (-\rho \omega^2 + k_x^2 c_{66} + k_y^2 c_{11} - \frac{k_y^2 c_{13}^2}{c_{33}}) U_y + (k_x k_y c_{66} + k_x k_y c_{12} - \frac{k_x k_y c_{13}^2}{c_{33}}) U_x$$

$$\frac{dE_y}{dz} = \frac{ik_x k_y}{\omega \epsilon_{33}} H_y + \left( -\frac{ik_y^2}{\omega \epsilon_{33}} + i\omega \mu \mu_0 \right) H_x$$

$$\frac{dE_x}{dz} = -\frac{ik_x k_y}{\omega \epsilon_{33}} H_x + \left( \frac{ik_x^2}{\omega \epsilon_{33}} - i\omega \mu \mu_0 \right) H_y$$

$$\frac{dH_x}{dz} = -\frac{i\omega e_{14}}{c_{44}} \sigma_{xz} + \left( i\omega \frac{e_{14}^2}{c_{44}} + i\omega \epsilon_{11} - \frac{ik_x^2}{\omega \mu \mu_0} \right) E_y + \frac{ik_x k_y}{\omega \mu \mu_0} E_x$$

$$\frac{dH_y}{dz} = -\frac{i\omega e_{14}}{c_{44}} \sigma_{yz} + \left( -i\omega \frac{e_{14}^2}{c_{44}} - i\omega \epsilon_{11} + \frac{ik_y^2}{\omega \mu \mu_0} \right) E_x - \frac{ik_x k_y}{\omega \mu \mu_0} E_y$$
(12)

Запишем систему уравнений в матричной форме:

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B} \vec{u}; \vec{u} = (U_z, \sigma_{zz}, U_x, \sigma_{xz}, E_y, H_x, U_y, \sigma_{yz}, H_y, E_x)$$
(13)

где матрица  $\hat{B}$  в случае распространения электроупругих волн вдоль оси Z имеет следующую структуру:



$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega b_{35} & b_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{34} & 0 & -b_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\omega b_{35} & 0 & -b_{65} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{56} & 0 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \end{pmatrix} \quad (14)$$

Исходя из структуры матрицы коэффициентов в пьезокристалле тетрагональной сингонии класса 422 распространяется пять волн: упругая продольная, упругая поперечная волна  $x$ - поляризации связанная с электромагнитной ТЕ- волной и упругая поперечная волна  $y$ - поляризации связанная с электромагнитной ТМ- волной.

При распространении волн вдоль координатной плоскости  $xz$  система уравнений записывается в следующем матричном виде:

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B}\vec{u}; \vec{u} = (U_z, \sigma_{zz}, U_x, \sigma_{xz}, E_y, H_x, U_y, \sigma_{yz}, H_y, E_x) \quad (15)$$

где матрица  $\hat{B}$  имеет структуру:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega b_{35} & b_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{34} & 0 & -b_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{87} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\omega b_{35} & 0 & b_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{109} & 0 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \end{pmatrix} \quad (16)$$

Исходя из структуры матрицы коэффициентов вдоль координатной плоскости  $xz$  распространяется пять волн: упругая продольная связанная с упругой поперечной волной  $x$ - поляризации и с электромагнитной ТЕ- волной и упругая поперечная волна  $y$ - поляризации связанная с электромагнитной ТМ- волной.

При распространении волн вдоль координатной плоскости уз система уравнений записывается в следующем матричном виде:

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B}\vec{u}; \vec{u} = (U_z, \sigma_{zz}, U_y, \sigma_{yz}, H_y, E_x, U_x, \sigma_{xz}, E_y, H_x) \quad (17)$$

где матрица  $\hat{B}$  имеет структуру:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & b_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{36} & 0 & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{34} & -b_{36} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{87} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{36} & b_{109} & 0 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \end{pmatrix} \quad (18)$$

Исходя из структуры матрицы коэффициентов вдоль координатной плоскости уз распространяется пять волн: упругая продольная связанная с упругой поперечной волной у- поляризации и с электромагнитной ТМ- волной и упругая поперечная волна х- поляризации связанная с электромагнитной ТЕ- волной.

Матричные уравнения (13,15,17), являющиеся системой десяти обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами, есть искомые, основные в дальнейших исследованиях, уравнения. Они описывают гармонически зависящие во времени электроупругие волновые процессы в одномерно- неоднородных материальных средах, а также в координатных плоскостях при проявлении анизотропии в свойствах среды самого общего вида.

Матрица  $\hat{B}$  - называется матрицей коэффициентов. Зависимость между ее элементами определяет ее структуру и называется структурой матрицы коэффициентов.

В пьезоэлектрической среде связь между электрическими и механическими величинами, выражаемая с помощью уравнений (5) и (7), приводит к взаимодействию электромагнитных и упругих волн. Наличие электромагнитных волн, связанных с упругими волнами, приводит к возрастанию эффективных значений соответствующих модулей упругости, то есть к увеличению эквивалентной «жесткости» кристалла.

В пьезоэлектрическом кристалле благодаря указанной связи могут распространяться три упругие и две электромагнитные волны. По своим фазовым скоростям эти волны распадаются на два типа: одни из них имеют фазовые скорости, приблизительно равные скорости электромагнитных волн, другие- скорости упругих волн.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М.П. Шаскольская. Кристаллография.-М.:Высшая школа, 1984-376с.
2. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред.-М.:Наука, 1982- 620с.
3. М.И. Рязанов. Электродинамика конденсированного вещества. М.:Наука, 1984-304с.
4. А.И. Ахиезер, И.А. Ахиезер. Электромагнетизм и Электромагнитные волны. М.: Наука, 1985.
5. С.К. Тлеуменов, К.А. Орынбасаров, А.Т. Оспан. О свойствах уравнений распространения электромагнитных волн в неоднородных анизотропных средах. //Труды Межд. Симпозиума, посвященного 100-летию со дня рождения К.И. Сатпаева. Ч.3 Алматы, 1999-с.130-133.
6. С.К. Тлеуменов, К.А. Орынбасаров, А.Т. Оспан. Распространение электромагнитных волн в неоднородных анизотропных диэлектриках ромбической сингонии. //Поиск.-1999,№6.
7. Тлеуменов С.К., Сагайдак Т.В. «Структура фундаментальных решений полной системы уравнений Максвелла и уравнений движения электроупругой волны» Материалы науч. конф. молодых ученых, студентов, школьников «III Сатпаевские чтения». Павлодар, 2003, Т.7, С. 158-163.
8. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. Пер. с франц. / Под. ред. В.В. Леманова.-М.: Наука. глав.редакция физ.-мат. лит-ры, 1982.
9. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986.

С.К. ТЛЕУМЕНОВ

ПЬЕЗОКРИСТАЛДАРДАҒЫ ТАРАЛАТЫН ЭЛЕКТРОСЕРПІМДІ  
ТОЛҚЫНДАРДЫҢ КОЭФФИЦИЕНТТЕР МАТРИЦАСЫ ТАЛДАУЫ  
ТУРАЛЫ

S. TLEUKENOV

ABOUT THE ANALYSIS OF MATRIXES OF FACTORS OF THE  
ELECTROELASTIC WAVES EXTENDING IN PIEZOCRYSTALS

#### *Түйіндеме*

*Берілген мақалада және аналитикалық әдісі негізінде 422 классты  
тетрагональдық сингониялы пьезокристалдардағы серпімді электрлік*

толқындардың таралу заңдылықтары зерттелген. Максвелл және қозғалыс теңдеулерінің толық жүйелері шешілген және анықталған, матрица коэффициенттерінің құрылымы құрастырылған.

#### Resume

*In the given article and on the basis of an analytical method of a matrixiant are studied of regularity of distribution of elastic waves in piezocrystals tetragonal singony of the class 422. Is obtained and the complete set of Maxwell equations and equations of motion is resolved, the frame of matrixes of factors is constructed.*

УДК 534.2:537.2

**С.К. ТЛЕУКЕНОВ, А.Б. БЕЛЯЛОВА**

### **О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В ПЬЕЗОКРИСТАЛЛАХ РОМБИЧЕСКОЙ СИНГОНИИ 222**

В данной статье рассматриваются закономерности распространения электроупругих волн в пьезокристаллах ромбической сингонии класса 222. Для изучения используется теоретический метод, основанный на построении структуры матрицанта полной системы уравнений Максвелла и уравнений движения для анизотропных диэлектрических сред. Метод матрицанта позволяет качественно изучать процессы распространения гармонических электроупругих волн в анизотропных средах всех классов. [1,2,3]

Система уравнений Максвелла при равенстве нулю объемной плотности зарядов  $\rho$  и вектора плотности токов  $\mathbf{j}$  запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнениями движения упругой анизотропной среды имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2)$$

Компоненты электрической и магнитной индукции выражаются в следующем виде:

$$D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ik} E_k, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \quad (3)$$

где  $e_{ikl}$  - пьезоэлектрические постоянные, связывающие электрическое поле с механическими напряжениями;  $\varepsilon_{ik}$  - компоненты тензора диэлектрической проницаемости;

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{l,k} + u_{k,l})$$

- тензор деформации;

В случае пьезокристаллов система уравнений (1-3) рассматривается совместно с определяющим соотношением между напряжением и деформацией, которое будет содержать дополнительное слагаемое, связанное с электрическим полем [1]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{l,k} - e_{ikl} E_k \quad (4)$$

где  $c_{ijkl}$  - упругие жесткости,  $\rho$  - плотность среды.

На основе метода разделения переменных система уравнений (1-4) может быть приведена к эквивалентной системе 1-го порядка, описывающей распространение гармонических волн:

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B} \vec{u}; \quad \vec{u} = (u_z, \sigma_{zz}, u_x, \sigma_{xz}, u_y, \sigma_{yz}, E_y, H_x, H_y, E_x)^t \quad (5)$$

где  $u_i, \sigma_{iz}$  – компоненты вектора смещения и тензора напряжения;  $E_y, H_x, H_y, E_x$  - компоненты электрических и магнитных полей;  $k_x, k_y$  – соответственно x и y - компоненты волнового вектора; символ  $\hat{\cdot}$  означает операцию транспонирования в вектор - столбец.

$$\hat{B} = \hat{B} \left[ c_{ijkl}(z), e_{kij}(z), \varepsilon_{ij}(z), k_x, k_y \right]$$

- матрица коэффициентов

Элементы этой матрицы содержат в себе параметры среды в которой распространяется электроупругая волна.

Ромбическая система характеризуется взаимно перпендикулярными осями симметрии второго порядка.

Ромбическая система класса 222 – система с тремя взаимно перпендикулярными осями, являющимися двукратными осями симметрии. Такая система должна отвечать двум моноклинным системам класса 2: одной с двукратной осью симметрии, параллельной оси Y, и другой – с двукратной осью симметрии, параллельной оси Z. Материальные постоянные должны определяться обеими моноклинными системами. Это условие приводит к уменьшению числа постоянных. Матрицы коэффициентов для ромбической системы класса 222 имеют вид [1]:

$$c_{ijkl} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}; e_{kij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & e_{25} & 0 \\ 0 & 0 & e_{36} \end{pmatrix}; \vartheta_{ij} = \begin{pmatrix} \vartheta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \vartheta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta_{33} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Здесь мы имеем 9 независимых коэффициентов  $c_{ijkl}$ , 3 коэффициента  $e_{kij}$  и 3 коэффициента  $\vartheta_{ij}$ .

Система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка имеет следующий вид:

$$\frac{dU_z}{dz} = \frac{1}{c_{33}} \sigma_{zz} + \left( \frac{ik_x c_{13}}{c_{33}} \right) U_x + \left( \frac{ik_y c_{13}}{c_{33}} \right) U_y$$

$$\frac{d\sigma_{zz}}{dz} = -\rho\omega^2 U_z + ik_x \sigma_{xz} + ik_y \sigma_{yz}$$

$$\frac{dU_x}{dz} = \frac{1}{c_{55}} \sigma_{xz} + ik_x U_z + \frac{e_{25}}{c_{55}} E_y$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xz}}{dz} = & \frac{ik_x c_{13}}{c_{33}} \sigma_{zz} + (-\rho\omega^2 + k_x^2 c_{11} - \frac{k_x^2 c_{13}^2}{c_{33}} + k_y^2 c_{66} + \frac{k_y^2 e_{36}^2}{\vartheta_{33}}) U_x + (k_x k_y c_{12} - \frac{k_x k_y c_{13} c_{23}}{c_{33}} + k_x k_y c_{66} + \\ & + \frac{k_x k_y e_{36}^2}{\vartheta_{33}}) U_y - \frac{ik_x^2 e_{36}}{\omega \vartheta_{33}} H_x + \frac{ik_x k_y e_{36}}{\omega \vartheta_{33}} H_y \end{aligned}$$

$$\frac{dU_y}{dz} = \frac{1}{c_{44}} \sigma_{yz} + ik_y U_z + \frac{e_{14}}{c_{44}} E_x$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{yz}}{dz} = & \frac{ik_y c_{13}}{c_{33}} \sigma_{zz} + (-\rho\omega^2 + k_x^2 c_{66} + k_y^2 c_{22} - \frac{k_y^2 c_{23}^2}{c_{33}} + \frac{k_x^2 e_{36}^2}{\vartheta_{33}}) U_y + (k_x k_y c_{66} + \frac{k_x k_y e_{36}^2}{\vartheta_{33}} + k_x k_y c_{12} - \\ & - \frac{k_x k_y c_{13} c_{23}}{c_{33}}) U_x + \frac{ik_x^2 e_{36}}{\omega \vartheta_{33}} H_y - \frac{ik_x k_y e_{36}}{\omega \vartheta_{33}} H_x \end{aligned}$$

$$\frac{dE_y}{dz} = \frac{ik_x k_y}{\omega \vartheta_{33}} H_y + \left( -\frac{ik_y^2}{\omega \vartheta_{33}} + i\omega \mu \mu_0 \right) H_x + \frac{k_y^2 e_{36}}{\vartheta_{33}} U_x + \frac{k_x k_y e_{36}}{\vartheta_{33}} U_y$$

$$\frac{dE_x}{dz} = -\frac{ik_x k_y}{\omega \vartheta_{33}} H_x + \left( \frac{ik_x^2}{\omega \vartheta_{33}} - i\omega \mu \mu_0 \right) H_y + \frac{k_x k_y e_{36}}{\vartheta_{33}} U_x + \frac{k_x^2 e_{36}}{\vartheta_{33}} U_y$$

$$\frac{dH_x}{dz} = \frac{i\omega e_{25}}{c_{55}} \sigma_{xz} + \left( i\omega \frac{e_{25}^2}{c_{55}} + i\omega \vartheta_{22} - \frac{ik_x^2}{\omega \mu \mu_0} \right) E_y + \frac{ik_x k_y}{\omega \mu \mu_0} E_x$$

$$\frac{dH_y}{dz} = -\frac{i\omega e_{14}}{c_{44}} \sigma_{yz} + \left( -i\omega \frac{e_{14}^2}{c_{44}} - i\omega \vartheta_{11} + \frac{ik_y^2}{\omega \mu \mu_0} \right) E_x - \frac{ik_x k_y}{\omega \mu \mu_0} E_y$$

Запишем систему уравнений в матричной форме:

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B}\vec{u}; \vec{u} = (U_z, \sigma_{zz}, U_x, \sigma_{xz}, E_y, H_x, U_y, \sigma_{yz}, H_y, E_x) \quad (7)$$

где матрица  $\hat{B}$  в одномерном случае имеет следующую структуру:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega b_{35} & b_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} & 0 & b_{710} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{710} & 0 & b_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{56} & 0 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \end{pmatrix} \quad (8)$$

Исходя из структуры матрицы коэффициентов следует, что в этом случае в пьезокристалле существует не один, а несколько типов волн, взаимодействие между которыми определяют коэффициенты  $b_{35} = \frac{e_{25}}{c_{55}}$  и  $b_{710} = \frac{e_{14}}{c_{44}}$ . Эти коэффициенты отражают связь между пьезоэлектрическими модулями и упругими постоянными среды, в которой распространяются волны. Упругая продольная волна, описываемая коэффициентами  $b_{12}$  и  $b_{21}$  распространяется независимо от других типов волн. Коэффициент  $b_{35}$  определяет взаимодействие между упругой поперечной волной х-поляризации и электромагнитной ТЕ- волной, а коэффициент  $b_{710}$  между упругой поперечной волной у- поляризации и электромагнитной ТМ- волной.

При распространении волн в координатной плоскости xz система уравнений записывается в следующем матричном виде:

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B}\vec{u}; \vec{u} = (U_z, \sigma_{zz}, U_x, \sigma_{xz}, E_y, H_x, U_y, \sigma_{yz}, H_y, E_x) \quad (9)$$

где матрица  $\hat{B}$  имеет структуру:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega b_{35} & b_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} & 0 & b_{710} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{87} & 0 & b_{89} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{710} & 0 & b_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\omega}{i} b_{89} & 0 & b_{109} & 0 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \end{pmatrix} \quad (10)$$

В этом случае коэффициенты  $b_{24} = \frac{1}{c_{55}}$ ,  $b_{35} = \frac{e_{14}}{c_{44}}$  и  $b_{35} = \frac{e_{14}}{c_{44}}$  определяют взаимосвязь между упругой продольной, упругой поперечной волной  $x$ - поляризации и электромагнитной ТЕ- волной, а  $b_{710} = \frac{e_{14}}{c_{44}}$ ,  $b_{89} = \frac{ik_x^2 e_{36}^2}{\omega \epsilon_{33}}$  между упругой поперечной волной  $y$ - поляризации и электромагнитной ТМ- волной.

При распространении волн в координатной плоскости  $yz$  система уравнений записывается в следующем матричном виде:

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B}\vec{u}; \vec{u} = (U_z, \sigma_{zz}, U_y, \sigma_{yz}, H_y, E_x, U_x, \sigma_{xz}, E_y, H_x) \quad (11)$$

где матрица  $\hat{B}$  имеет структуру:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & b_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega b_{36} & 0 & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} & b_{79} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{87} & 0 & 0 & b_{810} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\omega}{i} b_{810} & 0 & 0 & b_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\omega b_{79} & b_{109} & 0 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \end{pmatrix} \quad (12)$$



В этом случае коэффициенты  $b_{13} = \frac{ik_y c_{13}}{c_{33}}$ ,  $b_{24} = ik_y$  и  $b_{36} = \frac{e_{14}}{c_{44}}$  определяют взаимосвязь между упругой продольной, упругой поперечной волной у- поляризации и электромагнитной ТМ- волной, а коэффициенты  $b_{79} = \frac{e_{25}}{c_{55}}$ ,  $b_{810} = -\frac{ik_y^2 e_{36}}{\omega \epsilon_{33}}$  между упругой поперечной волной х- поляризации и электромагнитной ТЕ- волной.

Коэффициенты определяющие взаимосвязь между различными типами волн обеспечивают постоянный переход энергии упругих волн в энергию электромагнитных волн и наоборот.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986.
2. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. – Новосибирск: Наука, 1982.
3. Тлеукунов С.К. Распространение волн в неоднородных пьезокристаллах гексагональной сингонии. //Сб. научн. трудов.КазНТУ, ч.II. Алматы,1994. С.62-65.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука,1988.

Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар. Материал поступил в редакцию 15.08.2012 г.

С.К. ТЛЕУКЕНОВ, А.Б. БЕЛЯЛОВА

222 РОМБ СИНГОНИЯЛЫ ПЬЕЗОКРИСТАЛДАҒЫ  
ЭЛЕКТРОСЕРПИМДІ ТОЛҚЫНДАРДЫҢ ТАРАЛУ ТУРАЛЫ

S.K. TLEUKENOV, A.B. BELYLOVA

ABOUT PROPAGATION OF ELECTROELASTIC WAVES IN RHOMBIC  
SINGONIYA'S PIEZOCRYSTALS 222

### Түйіндеме

*Берілген мақалада және аналитикалық әдісі негізінде 222 классты ромбалық сингониялы пьезокристалдардағы серпімді электрлік толқындардың таралу заңдылықтары зерттелген. Максвел және қозғалыс теңдеулерінің толық жүйелері шешілген және анықталған, матрица коэффициенттерінің құрылымы құрастырылған.*

### Resume

*In the given article and on the basis of an analytical method of a matriciant are studied of regularity of distribution of elastic waves in piezocrystals rhombic singony of the class 222. Is obtained and the complete*

set of Maxwell equations and equations of motion is resolved, the frame of matrixes of factors is constructed.

УДК 539.3:534.2

## **С.К. ТЛЕУКЕНОВ, А.К. СЕЙТХАНОВА, Н.А. ИСПУЛОВ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ ТРИКЛИННОЙ СИНГОНИИ**

В данной работе на основе метода матрицанта [1] рассмотрено построение системы дифференциальных уравнений 1-го порядка и вытекающей из нее матрицы коэффициентов для термоупругих волн, распространяющихся в анизотропной среде триклинной сингонии. Построена структура матрицанта уравнений движения термоупругих волн в объемном случае. Данная среда обладает самой низкой симметрией и обладает 21-ю упругими и 9-ю термомеханическими параметрами.

### **1. Определяющие соотношения**

Анализ распространения термоупругих волн в анизотропных средах основывается на совместном решении уравнений движения [2]:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{U}_i \quad (1)$$

или в покомпонентной форме

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial Z} = \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial Z} = \rho \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial Z} = \rho \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}$$

уравнения теплопроводности Фурье

$$\lambda_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = -q_i \quad (2)$$

уравнения притока тепла

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = -i\omega \beta_{ij} \varepsilon_{ij} - i\omega \frac{c_e}{T_0} \theta \quad (3)$$

где  $\sigma_{ij}$  - тензор напряжения,  $\rho$  - плотность среды,  $\lambda_{ij}$  - тензор теплопроводности,  $q_i$  - вектор притока тепла,  $\omega$  - круговая частота,  $\beta_{ij}$  - термомеханические параметры,  $\varepsilon_{ij}$  - тензор малых деформаций Коши,  $c_\varepsilon$  - теплоемкость при постоянной деформации,  $\theta = T - T_0$  - приращение температуры по сравнению с температурой естественного состояния  $T_0$ ,  $\left| \frac{\theta}{T_0} \right| \ll 1$  для малых деформаций.

Физико-механические величины связаны соотношением Дюгамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \theta \quad (4)$$

Для триклинной сингонии (оси произвольны) число упругих постоянных равно 21, а термомеханических параметров – 9. В матричном виде соотношение Дюгамеля - Неймана (4) для триклинной сингонии имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \theta \quad (4)$$

где  $c_{ijkl}$  - упругие параметры анизотропной среды триклинной сингонии.

## 2. Система дифференциальных уравнений 1 порядка

Уравнения (1)-(4) определяют взаимосвязь механических напряжений и температуры как функции независимых переменных – теплового поля и деформации.

На основе метода разделения переменных в случае гармонической зависимости от времени:

$$\left[ U_i(x, y, z, t); \sigma_{ij}(x, y, z, t); \theta; q_z \right] = \left[ U_i(z), \sigma_{ij}(z), \theta; q_z \right] e^{i(\omega t - mx - ny)} \quad (5)$$

система уравнений (1)-(4) приводится к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка с переменными коэффициентами, описывающей распространение гармонических волн:

$$\frac{d\vec{W}}{dz} = B\vec{W} \quad (6)$$

Здесь  $\vec{W}(x, y, z, t) = [u_z(z), \sigma_{zz}, u_x(z), \sigma_{xz}, u_y(z), \sigma_{yz}, \theta, q_z]$  - вектор-столбец. Символ  $\vec{t}$  означает операцию транспонирования вектора - строки в вектор - столбец.

$B = B_{ijkl}(z) \quad j, m, n$  - матрица коэффициентов, элементы которой содержат в себе параметры среды, в которой распространяются термоупругие волны,  $m, n$  - компоненты волнового вектора  $\vec{k}$

Матрица коэффициентов в объемном случае для триклинной сингонии имеет вид:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} & 0 & 0 \\ b_{24} & b_{14} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} & b_{37} & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & b_{33} & b_{45} & b_{46} & b_{47} & 0 \\ b_{26} & b_{16} & b_{46} & b_{36} & b_{55} & b_{56} & b_{57} & 0 \\ 0 & b_{15} & b_{45} & b_{35} & b_{65} & b_{55} & b_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega b_{17} & -i\omega b_{37} & \omega b_{47} & -\omega b_{57} & -\omega b_{67} & b_{87} & 0 \end{bmatrix}$$

Из структуры матрицы коэффициентов следует, что в пространственном случае упругие волны различной поляризации и тепловые волны взаимосвязаны. Связь тепловой волны с упругими волнами характеризуется коэффициентом  $b_{17}$ , который равен

$$b_{17} = \frac{(c_{45}^2 - c_{44}c_{55})(\beta_{13} + \beta_{23} + \beta_{33})}{a}$$

Взаимосвязь упругих волн различной поляризации определяется наличием и расположением в матрице коэффициентов -  $b_{37}$ ,  $b_{47}$ ,  $b_{57}$ , соответственно равные:

$$b_{37} = \frac{(c_{35}c_{44} - c_{34}c_{45})(\beta_{13} + \beta_{23} + \beta_{33})}{a};$$

$$b_{47} = -i \left( \frac{c_{34}^2\beta_{13} + c_{33}(c_{45}\beta_{23} - c_{44}\beta_{13}) + c_{35}c_{44}\beta_{33} - c_{34}(c_{35}\beta_{23} + c_{45}\beta_{33})}{a} \right);$$

$$b_{57} = - \frac{(c_{35}c_{45} - c_{34}c_{55})(\beta_{13} + \beta_{23} + \beta_{33})}{a};$$

$$\text{где } a = c_{35}^2c_{44} - 2c_{34}c_{35}c_{45} + c_{34}^2c_{55} + c_{33}(c_{45}^2 - c_{44}c_{55})$$

Малое количество нулей в матрице коэффициентов говорит о низкой симметрии анизотропной среды триклинной сингонии.

### 3. Структура матрицанта

Построение структуры матрицанта основано на его представлении в форме экспоненциального матричного ряда [3]:

$$T = E + \int_0^z B dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} B(z_1)B(z_2) dz_1 dz_2 + \dots \quad (7)$$

И аналогичном представлении обратного матрицанта  $T^{-1}$

$$T^{-1} = E - \int_0^z B dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} B(z_2)B(z_1) dz_1 dz_2 - \dots \quad (8)$$

Матричные ряды (10), (11) представимы в виде сумм матриц

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_{(n)}, T^{-1} = \sum T_{(n)}^{-1} \quad (9)$$

Структура матрицанта в случае распространения термоупругих волн в кристаллах триклинной сингонии в объемном случае определена в виде:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} & -t_{42} & t_{32} & -t_{62} & t_{52} & t_{82} & -t_{72} \\ -t_{21} & t_{11} & t_{41} & -t_{31} & t_{61} & -t_{51} & -t_{81} & t_{71} \\ -t_{24} & t_{14} & t_{44} & -t_{34} & t_{64} & -t_{54} & -t_{84} & t_{74} \\ t_{23} & -t_{13} & -t_{43} & t_{33} & -t_{63} & t_{53} & t_{83} & -t_{73} \\ -t_{26} & t_{16} & t_{46} & -t_{36} & t_{66} & -t_{56} & -t_{86} & t_{76} \\ t_{25} & -t_{15} & -t_{45} & t_{35} & -t_{65} & t_{55} & t_{85} & -t_{75} \\ t_{28} & -t_{18} & -t_{48} & t_{38} & -t_{68} & t_{58} & t_{88} & -t_{78} \\ -t_{27} & t_{17} & t_{47} & -t_{37} & t_{67} & -t_{57} & -t_{87} & t_{77} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Структура матрицанта есть зависимость между элементами прямого и обратного матрицанта в форме (8) и все следствия, вытекающие из него, а также зависимость между элементами  $T$  и  $T^{-1}$ , следующие из тождества [4]:

$$TT^{-1} = T^{-1}T = E \quad (11)$$

Где  $E$ -единичная матрица

Таким образом, в работе построена система дифференциальных уравнений 1-го порядка, описывающая распространение термоупругих волн в анизотропных средах триклинной сингонии, а знание структуры матрицы коэффициентов в этой системе позволяет определить связь между волнами различной поляризации, в данном случае определить связь упругих

и тепловых волн, т.е. наличие термоупругого эффекта. Построена структура матрицанта уравнений движения термоупругих волн в объемном случае.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.К. Тлеукенов Метод матрицанта. Павлодар, НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004, 148 с.
2. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1986, 556 с.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988, 552 с.
4. Тлеукенов С. К., Орынбасаров К. А. О матрицах фундаментальных решений уравнений динамики неоднородных анизотропных сред. Изв. АН Каз ССР, сер. физ.-мат., 1991, N 5, С. 87-91.

Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар. Материал поступил в редакцию 15.08.2012 г.

С.К. ТЛЕУКЕНОВ, А.К. СЕЙТХАНОВА, Н.А. ИСПУЛОВ  
 АНИЗОТРОПТЫ ОРТАНЫҢ ТРИКЛИНДЫ СИНГНИЯДАҒЫ  
 ТЕРМОСЕПІМДІ ТОЛҚЫНДАРДЫҢ ТАРАЛУЫ ТУРАЛЫ  
 S.K. TLEUKENOV, A.K. SEYTKHANOVA, N.A. ISPULOV  
 ABOUT DISTRIBUTION OF THERMOELASTIC WAVES IN  
 TRIKLINNA SINGONIYA'S NON-ISOTROPIC MEDIUM

#### *Түйіндеме*

*Термомеханикалық эффектiмен болатын серпiмдi орталарда толқындық процестердiң заңдылықтарды зерттеу актуалдығы, геофизика, сейсмология, композиттік материалдардың механикасының теориялық және қолданбалы есептердi шешуiнде қажеттiлiгiмен байланысты. Байланысқан қозғалыс теңдеулерi мен жылуоткiзiшiтiк теңдеулерi физика–механикалық параметрлердiң күрделiгi мен көп болуымен ерекшеленедi. Осыған байланысты деформацияланатын қатты дене механикасының – термосерпiмдiлiк деген тарауы қарқынды дамып келедi. Осы бағыттың аясында анизотропты орталардың кейбiр физика–механикалық қасиеттерiн қолдана отырып, байланысқан жылулық және механикалық өрiстер зерттеледi. Берiлген мақалада, матрицант әдiсiнiң негiзiнде, анизотропты ортаның триклинды сингониядағы термосерпiмдi толқындардың таралуын сипаттайтын 1-шi реттi дифференциалдық теңдеулердiң құрылуы қарастырылған.*

#### *Resume*

*The urgency of research of laws of wave processes in elastic environments with thermo mechanical effect is connected with necessity of*

*the decision of theoretical and applied problems of geophysics, seismology, mechanics of composite materials etc. Connected equations of movement and the heat conductivity equation differ complexity and an abundance of physical–mechanical parameters. In this connection the section of mechanics of a deformable firm body, - thermo elasticity intensively develops. Within the limits of this direction, leaning against use of certain physical–mechanical properties anisotropic environments, the connected thermal and mechanical fields are studied. In given article on the basis of a method matrizant construction of system of the differential equations of 1st order and a matrix of factors following from it for the thermo elastic waves extending in anisotropic triclinic system environment is considered.*

УДК 534.2:537.2

**С.Қ. ТЛЕУКЕНОВ, М.Қ. ЖҮКЕНОВ**  
**ИЗОТРОПТЫ ЖӘНЕ АНИЗОТРОПТЫ**  
**ДИЭЛЕКТРЛІКТЕРДІҢ ШЕКАРАСЫНДАҒЫ**  
**ЭЛЕКТРМАГНИТТІК ТОЛҚЫНДАРЫҢ ШАҒЫЛУ ЖӘНЕ**  
**СЫНУ КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ ТУРАЛЫ**

Жұмыста матрицант әдісінің негізінде магнитэлектрлік эффектiсi бар диэлектрлік орталардың бөліну шегінде электромагниттік толқындардың әсерлесуінің шектік шарттары шығарылды. Изотропты диэлектрлік ортамен магнитэлектрлік эффектiсi бар анизотропты диэлектрлік ортаның шекарасындағы электромагниттік толқынның шағылуы қарастырылған.

Магнитэлектрлік эффектiсi бар орталардағы электромагниттік толқындық процесстерді зерттеу маңыздылығы әр-түрлі физика-механикалық эффекттер негізінде құралдар мен қондырғылар жасау үшін жаңа материалдарды іздеумен байланысты.

1. Магнитэлектрлік эффектiсi бар орталарда электромагниттік толқындардың екіөлшемді таралуы материалдық қатынастары бар Максвелл тендеулерімен сипатталады:

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j - \alpha_{ij} H_j \quad (1)$$

$$B_i = \mu_0 \mu_{ij} H_j - \alpha_{ij} E_j \quad (2)$$

Материалдық қатынастар бар Максвелл тендеулерін (1), (2), толқындық процесстерді сипаттау кезінде 1-ші ретті тендеулер жүйесіне келтіруге болады:

$$\frac{d\vec{U}}{dz} = B\vec{U}; \quad \vec{U} = (E_y, H_x, H_y, E_x) \quad (3)$$

В матрицасының элементтерінің түрі:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & b_{14} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & 0 \\ 0 & -b_{14} & 0 & b_{34} \\ -b_{23} & 0 & b_{43} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} b_{12} &= i\omega\mu_0\mu_1, & b_{14} &= i\omega\alpha_{\perp} \\ b_{21} &= i\varepsilon_0\left(\frac{k_x^2}{\beta}\varepsilon_2 + \omega\varepsilon_1\right), & b_{23} &= i\left(\frac{k_x^2}{\beta}\alpha_{11} + \omega\alpha_{\perp}\right) \\ b_{34} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon_1, & b_{43} &= -i\mu_0\left(\frac{k_x^2}{\beta}\mu_2 + \omega\mu_1\right) \end{aligned} \quad (4)$$

мұнда  $\beta = \omega(\alpha_{11}^2 - \varepsilon_0\varepsilon_2\mu_0\mu_2)$ ,  $\alpha_{ik}$  - симметриялық емес тензор,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  - ортаның диэлектрик және магниттік өтімділіктерінің тензорлары.  $\varepsilon_{ij}$  және  $\mu_{ij}$  тензорлар тетрагоналды, тригоналды және гексагоналды сингонилардың анизотропиясына сәйкес келеді.

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

2. Матрицант әдісінің шеңберінде магнитэлектрлік эффектісі бар анизотропиялық орталарда электрмагниттік толқындардың таралуын сипаттайтын орташаландырылған матрицант келесі аналитикалық түрде жазылады:

$$T_{opm}^{\pm} = \left(\hat{\pi} + \frac{1}{2}E\right) \left(E \cos kz \pm \frac{B}{k} \sin kz\right) - \left(\hat{\pi} - \frac{1}{2}E\right) \left(E \cos \chi z \pm \frac{B}{\chi} \sin \chi z\right) \quad (5)$$

физика-механикалық параметрлердің тұрақты мәндерінде (5) матрицант (3) теңдеудің шешімі болып табылады:

$$\vec{U} = T\vec{U}_0 \quad (6)$$



(6) шешімінде тура және кері толқындардың қосындысы бар. Егер

$$\cos kz = \frac{1}{2}(e^{ikz} + e^{-ikz}); \quad \sin kz = \frac{1}{2}(e^{ikz} - e^{-ikz})$$

ескерсек, (5)-тен  $z > 0$  және  $z < 0$  бағыттары бойынша таралатын толқындар үшін матрицанттарды шығара аламыз

$$\begin{aligned} T_0^+ &= \frac{1}{2} \left( \hat{\pi} + \frac{1}{2} E \right) \left( E - \frac{B_0}{ik} \right) e^{-ikz} - \frac{1}{2} \left( \hat{\pi} - \frac{1}{2} E \right) \left( E - \frac{B_0}{i\chi} \right) e^{-i\chi z} \\ T_0^- &= \frac{1}{2} \left( \hat{\pi} + \frac{1}{2} E \right) \left( E + \frac{B_0}{ik} \right) e^{-ikz} - \frac{1}{2} \left( \hat{\pi} - \frac{1}{2} E \right) \left( E + \frac{B_0}{i\chi} \right) e^{-i\chi z} \end{aligned} \quad (7)$$

(5) және (7)-дегі

$$\hat{\pi} = \frac{\hat{P} - \tilde{P}_2 E}{\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2} - \frac{1}{2} E; \quad \hat{P} = E + \frac{1}{2} B^2 h^2$$

$\tilde{P}_1, \tilde{P}_2$  - келесі шарттын салдары ретінде шығатын сипаттама теңдеулердің түбірлері

$$\det(\hat{P} - \lambda E) = 0$$

$k$  және  $\chi$  толқындық сандар,  $\omega^2$  дейін  $\omega$  мүшелерінің сақталуымен электромагниттік толқындардың дисперсия теңдеулерінің жіктелуінен анықталады. Берілген жағдайда олар келесі түрде жазылады:

$$1 - \frac{k^2 h^2}{2} = \tilde{P}_1; \quad 1 - \frac{\chi^2 h^2}{2} = \tilde{P}_2$$

3. Шектік шарттар. Толқындардың екі жартылайкеңістіктің шегімен әсерлесуі кезіндегі толқындық өрістерге қойылатын шарттарды қарастырайық.. Егер  $z=0$  болса (7) матрицанттың түрі:

$$T_0^\pm = \frac{1}{2} E \mp R \quad (8)$$

$R$  матрицасының түрі:

$$R = \frac{1}{2i} \left( \frac{k - \chi}{k\chi} \right) \pi B - \frac{1}{4i} \left( \frac{k + \chi}{k\chi} \right) B \quad (9)$$

Егер  $\vec{U}_P$  - түскен толқындардың өрісі,  $\vec{U}_R$  - шағылған толқындардың өрісі және  $\vec{U}_t$  - сынған толқындардың өрісі десек, онда

$$T_0^P \vec{U}_P + T_0^R \vec{U}_R = T_0^t \vec{U}_t, z=0 \text{ кезінде}$$

немесе

$$\left(\frac{1}{2}E - R_0\right)\vec{U}_P + \left(\frac{1}{2}E + R_0\right)\vec{U}_R = \left(\frac{1}{2}E - R^t\right)\vec{U}_t \quad (10)$$

Орталардың тиісуінде өрістердің үздіксіздігін ескерсек:

$$\vec{U}_P + \vec{U}_R = \vec{U}_t \quad (11)$$

шығатыны:

$$R_0 \vec{U}_P - R_0 \vec{U}_R = R^t \vec{U}_t \quad (12)$$

(11)-ді ескергенде (12)-ші өрнек  $\vec{U}_P, \vec{U}_R, \vec{U}_t$  векторлар үшін іздеген матрицалық түрдегі шектік шарттар.

(11) және (12)-де  $\vec{U}_R$  мен  $\vec{U}_t$  векторлар белгісіз. (11)-ді (12)-ге қойғанда

$$(R_0 + R^t)\vec{U}_R = (R_0 - R^t)\vec{U}_t \quad (13)$$

осыдан шағылған толқындар үшін өрнек шығады:

$$\vec{U}_R = (R_0 + R^t)^{-1}(R_0 - R^t)\vec{U}_t \quad (14)$$

Сынған сәулелердің өрісі  $\vec{U}_t$  (11) өрнекпен аныкталады.

4. (8)-гі R матрицасы келесі түрде өрнектеледі:

$$R = \frac{1}{2ik\chi(k + \chi)} \left[ B_0^2 h^2 - (p_{11} + p_{22} - \Delta_0) E \right] \mathcal{B} \quad (15)$$

мұндағы

$$p_{11} = b_{12}b_{21} - b_{14}b_{23}, \quad p_{22} = b_{34}b_{43} - b_{14}b_{23}$$

$$\Delta_0 = \sqrt{(b_{12}b_{34} + b_{14}^2)(b_{21}b_{43} + b_{23}^2)} \quad (16)$$

Орталардың шекарасындағы шешулердің үздіксіздік шартының ескеруімен (10) немесе (12) шарттар шағылған, сынған және түске толқындар өрістерінің векторларына қойылатын шектік шарттардың матрицалық түрі болып табылады.

(16) өрнектің ескеруімен (15) тендеуді шығару арқылы  $R$  матрицасының анық түрін шығаруға болады:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & 0 & r_{14} \\ r_{21} & 0 & r_{23} & 0 \\ 0 & -r_{14} & 0 & r_{34} \\ -r_{23} & 0 & r_{43} & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$R$  матрицасының элементтері келесі түрде шығады:

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{1}{2ik\chi(k+\chi)} \Delta_1 (b_{12}\Delta_2 - b_{43}\Delta_1), & r_{14} &= \frac{1}{2ik\chi(k+\chi)} \Delta_1 (b_{14}\Delta_2 + b_{23}\Delta_1) \\ r_{21} &= \frac{1}{2ik\chi(k+\chi)} \Delta_2 (-b_{34}\Delta_2 + b_{21}\Delta_1), & r_{23} &= \frac{1}{2ik\chi(k+\chi)} \Delta_2 (b_{14}\Delta_2 + b_{23}\Delta_1) \\ r_{34} &= \frac{1}{2ik\chi(k+\chi)} \Delta_1 (b_{34}\Delta_2 - b_{21}\Delta_1), & r_{43} &= -\frac{1}{2ik\chi(k+\chi)} \Delta_2 (b_{43}\Delta_2 + b_{12}\Delta_1) \end{aligned}$$

мұнда

$$\Delta_1 = \sqrt{b_{12}b_{34} + b_{14}^2}, \quad \Delta_2 = \sqrt{b_{21}b_{43} + b_{23}^2}$$

5. Егер

$$R_0 + R^t = \hat{\tau}^+, \quad R_0 - R^t = \hat{\tau}^-$$

десек, онда

$$\vec{U}_R = (\hat{\tau}^+)^{-1} (\hat{\tau}^-) \vec{U}_P$$

$\hat{\tau}^+$  және  $\hat{\tau}^-$  матрицаларының элементтері келесі түрде анықталады

$$\tau_{ij}^+ = r_{ij}^0 + r_{ij}^t, \quad \tau_{ij}^- = r_{ij}^0 - r_{ij}^t$$

$$\vec{U}_R = G \vec{U}_P; \quad G = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & g_{13} & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & g_{24} \\ g_{31} & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & g_{42} & 0 & g_{44} \end{pmatrix}$$

## G матрицасының элементтерінің түрі

$$g_{11} = \frac{\tau_{43}^+ \tau_{21}^-}{\Lambda_2^2} + \frac{\tau_{23}^+ \tau_{23}^-}{\Lambda_2^2}, \quad g_{13} = \frac{\tau_{43}^+ \tau_{23}^-}{\Lambda_2^2} - \frac{\tau_{23}^+ \tau_{43}^-}{\Lambda_2^2}$$

$$g_{22} = \frac{\tau_{34}^+ \tau_{12}^-}{\Lambda_1^2} + \frac{\tau_{14}^+ \tau_{14}^-}{\Lambda_1^2}, \quad g_{24} = \frac{\tau_{34}^+ \tau_{14}^-}{\Lambda_1^2} - \frac{\tau_{14}^+ \tau_{34}^-}{\Lambda_1^2}$$

$$g_{31} = \frac{\tau_{23}^+ \tau_{21}^-}{\Lambda_2^2} - \frac{\tau_{21}^+ \tau_{23}^-}{\Lambda_2^2}, \quad g_{33} = \frac{\tau_{23}^+ \tau_{23}^-}{\Lambda_2^2} + \frac{\tau_{21}^+ \tau_{43}^-}{\Lambda_2^2}$$

$$g_{42} = \frac{\tau_{14}^+ \tau_{12}^-}{\Lambda_1^2} - \frac{\tau_{12}^+ \tau_{14}^-}{\Lambda_1^2}, \quad g_{44} = \frac{\tau_{14}^+ \tau_{14}^-}{\Lambda_1^2} - \frac{\tau_{12}^+ \tau_{34}^-}{\Lambda_1^2}$$

$$\Lambda_1 = \sqrt{\tau_{12}^+ \tau_{34}^+ + \tau_{14}^{+2}}, \quad \Lambda_2 = \sqrt{\tau_{21}^+ \tau_{43}^+ + \tau_{23}^{+2}}$$

6. Шағылған және сынған толқындардың өрістері үшін өрнектер.

$$\vec{U}_R = (E_{yR}, H_{xR}, H_{yR}, E_{xR})$$

болғандықтан

$$\vec{U}_P = (E_{yP}, \beta E_{yP}, 0, 0)$$

деп есептеп, шағылған толқындардың өрісін шығарамыз

$$E_{yR} = g_{11} E_{yP}; \quad H_{xR} = \beta g_{22} E_{yP}$$

$$H_{yR} = g_{31} E_{yP}; \quad E_{xR} = \beta g_{42} E_{yP}$$

Сынған толқындардың өрісі (4) негізінде анықталады.

## ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982 г.
2. Вайнштейн Б.К., Современная кристаллография. Том-4. Наука, 1979 г.
3. Тлеукунов С.К., Оспанов А.Т. Изучение электромагнитных полей в анизотропных средах. – Алматы: Наука, 1985. – 176 с.
4. Тлеукунов С.К. О характеристической матрице периодически неоднородного слоя. В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. – Ленинград: Зап. научн. семин., ЛОМИ, 1987. - Т.165. - С. 177-181.
5. Тлеукунов С.К., Метод матрицанта, Павлодар, НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004г., 148 с.

6. Tleykenov S. The structure of propagator matrix and its application in the case of the periodical inhomogeneous media. Abstr. Semin. on Earthquake processes and their consequences Seismological investigations. 1989. - Kurukshetra, India. - P. 4.

7. Курманов А.А. Структура фундаментальных решений системы уравнений Максвелла для электромагнитных полей в анизотропных средах при наличии проводимости. Вестник ПГУ №3. г. Павлодар, 2004 г.

8. Тлеуқенов С.К., Жукенов М.К. Магнитэлектрлік эффектiсi бар бiртексiз және периодты бiртексiз ортада электрмагниттiк толқындардың таралуы. Вестник ПГУ №3. г. Павлодар, 2005г.

С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті. Павлодар қ. Материал 00.00.12 ж. редакцияға түсті.

С.К. ТЛЕУКЕНОВ, М.К. ЖУКЕНОВ

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ ИЗОТРОПНОГО И АНИЗОТРОПНОГО ДИЭЛЕКТРИКОВ

S.K. TLEUKENOV, M.K. ZHUKENOV

REFLECTIVITIES AND REFRACTIVES OF AN ELECTROMAGNETIC WAVES ON BORDER OF AN ISOTROPIC DIELECTRIC AND ANISOTROPIC OF A DIELECTRIC

### **Резюме**

*В работе в рамках метода матрицанта получено матричная форма граничных условия взаимодействия электромагнитных волн с границей раздела диэлектрических сред с магнитоэлектрическим эффектом. Рассматривается отражение электромагнитной волны на границе изотропной диэлектрической среды с анизотропной диэлектрической средой с магнитоэлектрическим эффектом.*

### **Resume**

*In operation within the framework of a method of a matrixiant the matrix shape a boundary requirement of interaction of electromagnetic waves with a demarcation of dielectric mediums with permanent-magnet by effect is obtained. The reflection of an electromagnetic wave on border of isotropic dielectric medium with anisotropic dielectric medium with permanent-magnet effect is considered.*

**С.К. ТЛЕУКЕНОВ, Ш.С. ЗЕЙТОВА**  
**ПОСТРОЕНИЕ СТРУКТУРЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ**  
**РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ И УРАВНЕНИЙ**  
**МАКСВЕЛЛА В СЛУЧАЕ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД**  
**ТЕТРАГОНАЛЬНОЙ СИНГОНИИ КЛАССА 422**

Система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B}\vec{u}; \vec{u} = (U_z, \sigma_{zz}, U_x, \sigma_{xz}, E_y, H_x, U_y, \sigma_{yz}, H_y, E_x) \quad (1)$$

где  $\hat{B} = \|b_{ij}(z)\|_1^n$  - непрерывная матричная функция в некотором интервале  $(z_1, z_2)$  изменения аргумента  $z$ , имеет нормированное решение, обращающееся в единичную матрицу при  $z=z_0$ . Нормированное решение уравнения (2.1.1) называется матрицантом. Любое другое решение, имеющее смысл матрицы фундаментальных решений имеет вид:

$$\hat{X} = \hat{T}(z_0, z) \hat{C} \quad (2)$$

где  $\hat{T}(z_0, z)$  - матрицант,  $\hat{C}$  - произвольная постоянная матрица.

Поскольку

$$\vec{u} = \hat{T} \vec{u}_0 \quad (3)$$

$\vec{u}_0$  - вектор- столбец, определяемый начальными условиями при  $z=z_0$ , то

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \frac{d\hat{T}}{dz} \vec{u}_0 = \hat{B} \hat{T} \vec{u}_0 \quad (4)$$

Следовательно, матрицант также удовлетворяет уравнению (1) в виду произвольности вектора  $\vec{u}_0$ :

$$\frac{d\hat{T}}{dz} = \hat{B} \hat{T} \quad (5)$$

Нормированное решение уравнения (1) может быть построено методом последовательных приближений, исходя из рекуррентных соотношений:

$$\frac{d\hat{T}_k}{dz} = \hat{B} \hat{T}_{k-1} \quad (6)$$

Полагая  $\hat{T}_k(z_0) = E(k = 0, 1, 2, \dots)$  для  $\hat{T}_k$  получим:

$$\hat{T}_k = E + \int_{z_0}^z \hat{B}(z_1) \hat{T}_{k-1}(z_1) dz_1 \quad (7)$$

Таким образом

$$T_0 = E, \quad T_1 = E + \int_{z_0}^z B(z_1) dz_1 \quad (8)$$

$$T_2 = E + \int_{z_0}^z B(z_1) dz_1 + \int_{z_0}^z \int_{z_0}^{z_1} B(z_1) B(z_2) dz_1 dz_2 + \dots$$

Из (8) следует представление  $\hat{T}$  в форме бесконечного матричного ряда:

$$T = E + \int_{z_0}^z B(z_1) dz_1 + \int_{z_0}^z \int_{z_0}^{z_1} B(z_1) B(z_2) dz_1 dz_2 + \dots \quad (9)$$

Для матрицанта справедливы формулы:

$$T(z_0, z) = T(z_1, z) T(z_0, z_1) \quad (10)$$

$$\ln |T(z_0, z)| = \int_{z_0}^z \text{sp } B(z_1) dz_1 \quad (11)$$

$$\text{Если } B = B_0 - \text{ постоянная матрица, то } T_0 = \exp[B_0(z - z_0)] \quad (12)$$

$$\frac{dT^{-1}}{dz} = -T^{-1} B \quad (13)$$

Дифференциальная формула (13) следует из определения мультипликативного интеграла:

$$\int_{z_0}^z (E + B dz) = \lim [E + B(z_n) \Delta z_n [E + B(z_{n-1}) \Delta z_{n-1}] \dots [E + B(z_1) \Delta z_1]$$

и введения мультипликативной производной:

$$D_z T = \frac{dT}{dz} T^{-1}$$

Операции  $D_z$  и  $\int_{z_0}^z$  взаимно обратные. Из четвертого свойства матрицанта следует представление в форме бесконечного матричного ряда для обратного матрицанта. Полагая, как и при получении (9):

$$T_0^{-1} = E, \quad T_k^{-1} = E - \int_{z_0}^z T_{k-1}(z_1)B(z_1)dz_1$$

имеем:

$$T_1^{-1} = E - \int_{z_0}^z B(z_1)dz_1$$

$$T_2^{-1} = E - \int_{z_0}^z B(z_1)dz_1 + \int_{z_0}^z \int_{z_0}^{z_1} B(z_2)B(z_1)dz_1dz_2$$

откуда следует искомое представление  $T^{-1}$ :

$$T^{-1} = E - \int_{z_0}^z B(z_1)dz_1 + \int_{z_0}^z \int_{z_0}^{z_1} B(z_2)B(z_1)dz_1dz_2 + \dots \quad (14)$$

Бесконечный матричный ряд (14) также абсолютно и равномерно сходится на любом интервале.

При этом справедливо соотношение:

$$TT^{-1} = T^{-1}T = E \quad (15)$$

Матричные ряды (9) и (14) есть сумма матриц:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_{(n)}, \quad T^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T_{(n)}^{-1}$$

Индекс (n) совпадает с числом перемножаемых под знаками интеграла матриц  $B(z_i)$ .

Построение структуры матрицанта, в данном случае, есть установление зависимости между элементами прямой и обратной матриц  $T$  и  $T^{-1}$ .

Структура матрицанта полной системы уравнений Максвелла и уравнений движения электроупругой волны в пьезокристалле тетрагональной сингонии 422 строится на основе поэлементного сравнения матриц  $T_{(n)}$  и  $T_{(n)}^{-1}$  каждого из слагаемых рядов (9) и (14), исходя из структуры матрицы коэффициентов в случае при одномерном распространении электроупругих



волн в пьезокристалле тетрагональной сингонии класса 422 структура прямого и обратного матрицанта имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{38} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{44} & 0 & 0 & t_{47} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55} & 0 & 0 & 0 & t_{59} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{66} & 0 & 0 & 0 & t_{610} \\ 0 & 0 & 0 & t_{74} & 0 & 0 & t_{77} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{83} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{88} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{95} & 0 & 0 & 0 & t_{99} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{106} & 0 & 0 & t_{1010} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{34} & 0 & 0 & t_{37} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{48} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{65} & 0 & 0 & 0 & t_{69} \\ 0 & 0 & t_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{78} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{84} & 0 & 0 & t_{87} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{96} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{105} & 0 & 0 & t_{109} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{44} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{74}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{33} & 0 & 0 & -\frac{t_{83}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{66} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{106}}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{59}}{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & \omega t_{38} & 0 & 0 & t_{88} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega t_{47} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{610} & 0 & 0 & 0 & t_{1010} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{59} & 0 & 0 & 0 & t_{99} \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{34} & 0 & 0 & \frac{t_{84}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{73}}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{56} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{69}}{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{65} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{105}}{\omega} \\ 0 & 0 & \omega t_{48} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega t_{37} & 0 & 0 & t_{87} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{510} & 0 & 0 & 0 & t_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{69} & 0 & 0 & 0 & t_{109} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Структуру, аналогичную (16-17) имеют среды:

- кубической сингонии, вдоль координатной оси z
- гексагональной сингонии класса 622, вдоль координатной оси z
- ромбической сингонии класса 222, вдоль координатной оси z

При анизотропии тетрагональной сингонии класса 422 структура матрицанта уравнений распространения электроупругих волн в плоскости (xz) ( $k_y=0$ ) определяется матрицей коэффициентов

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega b_{35} & b_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{34} & 0 & -b_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{87} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\omega b_{35} & 0 & b_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{109} & 0 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \end{pmatrix} \quad (18)$$

Для матриц  $\hat{B}$  вида (18) структура прямого и обратного матрицанта имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & t_{14} & 0 & 0 & t_{17} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & t_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{32} & t_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{38} & 0 & 0 \\ t_{41} & 0 & 0 & t_{44} & 0 & 0 & t_{47} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55} & 0 & 0 & 0 & t_{59} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{66} & 0 & 0 & 0 & t_{610} \\ 0 & 0 & 0 & t_{74} & 0 & 0 & t_{77} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{82} & t_{83} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{88} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{95} & 0 & 0 & 0 & t_{99} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{106} & 0 & 0 & 0 & t_{1010} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & 0 & 0 & t_{24} & 0 & 0 & t_{27} & 0 & 0 & 0 \\ t_{31} & 0 & 0 & t_{34} & 0 & 0 & t_{37} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{42} & t_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{48} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{56} & 0 & 0 & 0 & t_{510} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{65} & 0 & 0 & 0 & t_{69} & 0 \\ 0 & t_{72} & t_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{78} & 0 & 0 \\ t_{81} & 0 & 0 & t_{84} & 0 & 0 & t_{87} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{96} & 0 & 0 & 0 & t_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{105} & 0 & 0 & 0 & t_{109} & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & 0 & 0 & t_{32} & 0 & 0 & \frac{t_{52}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{11} & t_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{14} & t_{44} & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{74}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ t_{23} & 0 & 0 & t_{33} & 0 & 0 & \frac{t_{53}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{66} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{106}}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{95}}{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{58} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega f_{17} & \omega f_{47} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega f_{410} & 0 & 0 & 0 & t_{1010} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega f_{59} & 0 & 0 & 0 & t_{99} \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{72}}{\omega} & 0 & 0 \\ t_{21} & 0 & 0 & t_{31} & 0 & 0 & \frac{t_{51}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ t_{24} & 0 & 0 & t_{34} & 0 & 0 & \frac{t_{54}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{13} & t_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{73}}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{56} & 0 & 0 & -\frac{t_{96}}{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{65} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{105}}{\omega} \\ 0 & \omega f_{18} & \omega f_{48} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{78} & 0 & 0 \\ \omega f_{27} & 0 & 0 & \omega f_{37} & 0 & 0 & 0 & t_{57} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega f_{510} & 0 & 0 & 0 & t_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega f_{69} & 0 & 0 & 0 & t_{109} & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Структуру, аналогичную (19-20) имеют среды:

– гексагональной сингонии класса 622, вдоль координатной плоскости xz

Структура матрицанта есть зависимость между элементами прямого и обратного матрицанта в форме (20), а также зависимость между элементами  $T$  и  $T^{-1}$ , следующие из тождества:

$$TT^{-1} = T^{-1}T = E \quad (21)$$

Структура матрицанта отражает фундаментальные свойства и внутреннюю структуру решений уравнений Максвелла и уравнений движения электроупругих волн для неоднородных диэлектрических сред. Главная особенность структуры (20) и соотношений, вытекающих из тождества (21), - в их инвариантности относительно конкретного вида неоднородности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред.- М.:Наука, 1982- 620с.
2. Л.Бриллюэн, Н. Пароди. Распространение волн в периодических структурах. М.:И.А., 1959-452с.
3. С.К. Тлеуменов, К.А. Орынбасаров, А.Т. Оспан. Распространение электромагнитных волн в неоднородных анизотропных средах тетрагональной и гексагональной сингоний. // Материалы Межд. Конференции.- Караганда.1999.
4. А.Т. Оспан. Построение матрицанта уравнений распространения электромагнитных волн в периодически неоднородной среде.// Материалы Межд. Конференции.-Караганда.1999.
5. Тлеуменов С.К., Сагайдак Т.В. «Уравнения Максвелла и системы уравнений первого порядка для диэлектрических сред тригональной и ромбической сингоний» Материалы науч. конф. молодых ученых, студентов, школьников «II Сатпаевские чтения». Павлодар, 2002, Т.2, С. 110 –114.
6. Тлеуменов С.К. Построение структуры матрицанта уравнений движения изотропных и анизотропных упругих сред: автореферат дис.д.ф. – м.н. Алматы, 1995.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука,1988.
8. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986.
9. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. – Новосибирск: Наука, 1982.

Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар. Материал поступил в редакцию 15.08.2012 г.

С.Қ. ТЛЕУМЕНОВ, Ш.С. ЗЕЙТОВА

АНИЗОТРОПТЫ ОРТАЛАРДЫҢ ТЕТРАГОНАЛДЫ СИНГОНИЯНЫҢ 422 КЛАССЫ ҮШІН ҚОЗҒАЛЫС ТЕНДЕУЛЕРІ МЕН МАКСВЕЛЛ ТЕНДЕУЛЕРДІҢ ФУНДАМЕНТАЛДЫ ШЕШУЛЕРДІҢ ҚҰРЫЛЫМЫН ҚҰРУ

S.K. TLEUKENOV, SH. ZEITOVA

CREATION OF STRUCTURE OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF EQUATIONS OF MOTION AND MAXWELL'S EQUATIONS IN CASE OF TETRAGONAL SINGONIYA'S NON-ISOTROPIC MEDIUMS OF THE CLASS 422

### *Түйіндеме*

*Берілген мақалада тізбектей жуықтаулар әдісі арқылы Максвелл және анизотропты ортада 422 класты тетрагональды сингониялы анизотропты ортада Z осі мен XZ жазықтығы бойымен толқынның таралуы үшін болған жағдайдағы қозғалыстың теңдеулерінің толық жүйесінің матрицантының құрылымы құрастырыған.*

### *Resume*

*In the given article an approximation method the frame of a matriciant of a complete set of Maxwell equations and equations of motions is constructed in case of an anisotropic medium tetragonal singony of the class 422 at a wave propagation lengthwise axis Z and plane XZ.*

УДК 534.2:537.2

## **С.К. ТЛЕУКЕНОВ, А.Б. БЕЛЯЛОВА ОБ УРАВНЕНИЯХ ДИСПЕРСИИ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ ТЕТРАГОНАЛЬНОЙ СИНГОНИИ 422**

Введение понятия структуры матрицанта и ее определение позволили распространить классические методы, развитые Бриллюэном и Пароди для дискретных периодических структур, на сплошные периодические неоднородные среды.

Периодически неоднородная анизотропная среда, в случае электроупругих волн, описывается периодическими функциями пространственной координаты и удовлетворяет условиям:

$$\varepsilon_{ij}(z+h) = \varepsilon_{ij}; \mu(z+h) = \mu(z) \quad (1)$$

где  $h$ - период неоднородности.

Основной характеристикой, определяющей закономерности элетроупругих волновых процессов в неограниченной периодической структуре, являются уравнения дисперсии. Построенная во второй главе

структура матрицанта позволяет модифицировать условие существования нетривиальных решений и в два раза понизить степень характеристического уравнения.

Из теоремы Блоха следует, что в случае трансляционной симметрии:

$$\vec{u}(h) = e^{i\tilde{k}h} \vec{u}(0) \quad (2)$$

где  $\vec{u}$  - вектор-столбец решений уравнения

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B} \vec{u} \quad (3)$$

Матрицант уравнения (3) для периода неоднородности  $h$  есть матрица монодромии. На ее основе имеем:

$$\vec{u}(h) = \hat{T} \vec{u}(0) \quad (4)$$

Объединяя (2) и (4) получим:

$$(\hat{T} - e^{i\tilde{k}h} \hat{E}) \vec{u}(0) = 0 \quad (5)$$

где  $\hat{E}$  - единичная матрица.

Из условия

$$\det[\hat{T} - e^{i\tilde{k}h} \hat{E}] = 0 \quad (6)$$

следует характеристическое уравнение, корни которого определяют искомые уравнения дисперсии волн в неограниченной периодической структуре.

Умножение (5) на  $\hat{T}^{-1} e^{-i\tilde{k}h}$  приводит к уравнению:

$$(\hat{T}^{-1} - e^{-i\tilde{k}h} \hat{E}) \vec{u}(0) = 0 \quad (7)$$

Соотношения (5) и (7) эквивалентны, определяют один и тот же спектр. Физически это означает, что волны, распространяющиеся в неограниченной периодической структуре в противоположных направлениях, имеющих один закон дисперсии. Объединяя эти соотношения приходим к следующей модифицированной форме условия существования нетривиальных решений:

$$\det[p - \hat{E} \cos \tilde{k}h] = 0 \quad (8)$$

В условии (8) введена очень важная для регулярных структур и широко используемая в дальнейшем, матрица:

$$\hat{p} = \frac{1}{2}[\hat{T} + \hat{T}^{-1}] \tag{9}$$

При одномерном распространение электроупругих волн в пьезокристалле тетрагональной сингонии класса 422 матрицы  $\hat{T}$  и  $\hat{T}^{-1}$  имеют структуру:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} & 0 & 0 & 0 & t_{38} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{44} & 0 & 0 & t_{47} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55} & 0 & 0 & 0 & t_{59} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{66} & 0 & 0 & 0 & t_{610} \\ 0 & 0 & 0 & t_{74} & 0 & 0 & t_{77} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{83} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{88} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{95} & 0 & 0 & 0 & t_{99} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{106} & 0 & 0 & 0 & t_{1010} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{34} & 0 & 0 & t_{37} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{48} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{56} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{65} & 0 & 0 & 0 & t_{69} \\ 0 & 0 & t_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{78} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{84} & 0 & 0 & t_{87} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{96} & 0 & 0 & t_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{105} & 0 & 0 & 0 & t_{109} \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{44} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{74}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{33} & 0 & 0 & -\frac{t_{83}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{66} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{106}}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{95}}{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & \omega t_{38} & 0 & 0 & t_{88} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega t_{47} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{610} & 0 & 0 & 0 & t_{1010} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{59} & 0 & 0 & 0 & t_{99} \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{34} & 0 & 0 & \frac{t_{84}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{73}}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{56} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{66}}{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{105}}{\omega} \\ 0 & 0 & \omega t_{48} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega t_{57} & 0 & 0 & 0 & t_{87} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{96} & 0 & 0 & 0 & t_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{69} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{109} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Из определения (9) матрицы  $\hat{p}$  следует ее структура:

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & 0 & p_{37} & p_{38} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{33} & p_{47} & p_{48} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{48} & -p_{38} & p_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{47} & -p_{37} & 0 & p_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} & p_{59} & p_{510} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} & p_{69} & p_{610} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{610} & p_{510} & p_{99} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{69} & -p_{59} & 0 & p_{99} \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \end{pmatrix} \tag{12}$$

Раскрытие определителя в (8) с учетом (12) приводит к уравнению:

$$[(p_{11} - \lambda)^2(p_{33} - \lambda)(p_{77} - \lambda)] + p_{37}p_{48} - p_{38}p_{47})^2 \\ ((p_{55} - \lambda)(p_{99} - \lambda) + p_{59}p_{610} - p_{510}p_{69})^2] = 0$$

Уравнение (13) имеет корни:

$$\tilde{p}_1 = p_{11}$$

$$\tilde{p}_2 = \frac{1}{2}[p_{33} + p_{77} - \sqrt{(p_{33} - p_{77})^2 + 4(p_{38}p_{47} - p_{37}p_{48})}] \quad (14)$$

$$\tilde{p}_3 = \frac{1}{2}[p_{33} + p_{77} + \sqrt{(p_{33} - p_{77})^2 + 4(p_{38}p_{47} - p_{37}p_{48})}]$$

$$\tilde{p}_4 = \frac{1}{2}[p_{55} + p_{99} - \sqrt{(p_{55} - p_{99})^2 + 4(p_{510}p_{69} - p_{59}p_{610})}]$$

$$\tilde{p}_5 = \frac{1}{2}[p_{55} + p_{99} + \sqrt{(p_{55} - p_{99})^2 + 4(p_{510}p_{69} - p_{59}p_{610})}]$$

$$\underline{\cos \tilde{k}_1} = \tilde{p}_1; \quad \underline{\cos \tilde{k}_2} = \tilde{p}_2; \quad \underline{\cos \tilde{k}_3} = \tilde{p}_3; \quad \underline{\cos \tilde{k}_4} = \tilde{p}_4; \quad \underline{\cos \tilde{k}_5} = \tilde{p}_5$$

При распространение электроупругих волн в пьезокристалле тетрагональной сингонии класса 422 вдоль координатной плоскости xz

матрицы  $\hat{T}$  и  $\hat{T}^{-1}$  имеют структуру:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & t_{14} & 0 & 0 & t_{17} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & t_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{32} & t_{33} & 0 & 0 & 0 & t_{38} & 0 & 0 & 0 \\ t_{41} & 0 & 0 & t_{44} & 0 & 0 & t_{47} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55} & 0 & 0 & 0 & t_{59} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{66} & 0 & 0 & 0 & t_{610} \\ 0 & 0 & 0 & t_{74} & 0 & 0 & t_{77} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{82} & t_{83} & 0 & 0 & 0 & t_{88} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{95} & 0 & 0 & 0 & t_{99} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{106} & 0 & 0 & 0 & t_{1010} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & 0 & 0 & t_{24} & 0 & 0 & t_{27} & 0 & 0 & 0 \\ t_{31} & 0 & 0 & t_{34} & 0 & 0 & t_{37} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{42} & t_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{48} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{56} & 0 & 0 & 0 & t_{510} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{65} & 0 & 0 & 0 & t_{69} \\ 0 & t_{72} & t_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{78} & 0 & 0 \\ t_{81} & 0 & 0 & t_{84} & 0 & 0 & 0 & t_{87} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{96} & 0 & 0 & 0 & t_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{105} & 0 & 0 & 0 & t_{109} & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$



$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & 0 & 0 & t_{32} & 0 & 0 & \frac{t_{52}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{11} & t_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{14} & t_{44} & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{74}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ t_{23} & 0 & 0 & t_{33} & 0 & 0 & \frac{t_{53}}{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{66} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{106}}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{95}}{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & \omega t_{38} & 0 & 0 & t_{58} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega t_{47} & \omega t_{47} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{610} & 0 & 0 & 0 & t_{1010} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{59} & 0 & 0 & 0 & t_{99} \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{72}}{\omega} & 0 & 0 \\ t_{21} & 0 & 0 & t_{31} & 0 & 0 & \frac{t_{51}}{\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{24} & 0 & 0 & t_{34} & 0 & 0 & \frac{t_{54}}{\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{13} & t_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{73}}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{56} & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{96}}{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{t_{105}}{\omega} & 0 \\ 0 & \omega t_{18} & \omega t_{48} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{78} & 0 & 0 \\ \omega t_{27} & 0 & 0 & \omega t_{57} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{87} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{510} & 0 & 0 & 0 & t_{910} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega t_{69} & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{109} & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Из определения (9) матрицы  $\hat{P}$  следует ее структура:

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & p_{13} & p_{14} & 0 & 0 & p_{17} & p_{18} & 0 & 0 \\ 0 & p_{11} & p_{23} & p_{24} & 0 & 0 & p_{27} & 0 & 0 & 0 \\ -p_{24} & p_{14} & p_{33} & 0 & 0 & 0 & p_{37} & p_{38} & 0 & 0 \\ p_{23} & -p_{13} & 0 & p_{33} & 0 & 0 & p_{47} & p_{48} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} & 0 & 0 & 0 & p_{59} & p_{510} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} & 0 & 0 & p_{69} & p_{610} \\ 0 & -p_{18} & -p_{48} & p_{38} & 0 & 0 & p_{77} & 0 & 0 & 0 \\ -p_{27} & p_{17} & p_{47} & -p_{37} & 0 & 0 & 0 & p_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{610} & p_{510} & p_{99} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{69} & -p_{59} & 0 & p_{99} \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_x \\ \sigma_{xz} \\ E_y \\ H_x \\ U_y \\ \sigma_{yz} \\ H_y \\ E_x \end{pmatrix} \quad (17)$$

Раскрытие определителя в (8) с учетом (17) приводит к уравнению, которое разделяется на два уравнения второй и третьей степени:

$$[\lambda^2 - (p_{55} + p_{99})\lambda + p_{55}p_{99} - p_{69}p_{510} + p_{610}p_{59}] = 0 \quad (18)$$

$$[\lambda^3 + (-p_{11} - p_{77} - p_{33})\lambda^2 + (p_{13}p_{24} + p_{18}p_{27} - p_{38}p_{47} + p_{37}p_{48} + p_{33}p_{77} + p_{11}p_{33} + p_{11}p_{77} - p_{14}p_{23})\lambda + (-p_{18}p_{27}p_{33} - p_{17}p_{23}p_{38} + p_{13}p_{27}p_{38} + p_{18}p_{24}p_{47} - p_{17}p_{24}p_{48} - p_{13}p_{24}p_{77} + p_{11}p_{38}p_{47} - p_{11}p_{37}p_{48} - p_{11}p_{33}p_{77} + p_{14}p_{27}p_{48} + p_{14}p_{23}p_{77}) = 0] \quad (19)$$

Или  $a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$

Уравнение (18) имеет корни:



$$\begin{aligned}\tilde{p}_4 &= \frac{1}{2}[p_{55} + p_{99} - \sqrt{(p_{55} - p_{99})^2 + 4(p_{69}p_{510} - p_{610}p_{59})}] \\ \tilde{p}_5 &= \frac{1}{2}[p_{55} + p_{99} + \sqrt{(p_{55} - p_{99})^2 + 4(p_{69}p_{510} - p_{610}p_{59})}]\end{aligned}\quad (20)$$

$$\cos \tilde{k}_4 = \tilde{p}_4; \quad \cos \tilde{k}_5 = \tilde{p}_5$$

Уравнение (19) имеет следующие корни:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_1 &= \frac{\alpha}{a^3\sqrt{32}} - \frac{b}{3a} - \frac{\sqrt[3]{2}(3ac - b^2)}{3\alpha} \\ \tilde{p}_2 &= \frac{(1 - i\sqrt{3})\alpha}{a^3\sqrt{62}} - \frac{b}{3a} + \frac{(1 + i\sqrt{3})(3ac - b^2)}{\sqrt[3]{32}\alpha} \\ \tilde{p}_3 &= -\frac{(1 + i\sqrt{3})\alpha}{a^3\sqrt{62}} - \frac{b}{3a} + \frac{(1 - i\sqrt{3})(3ac - b^2)}{a^3\sqrt{32}\alpha}\end{aligned}\quad (21)$$

$$\text{где } \alpha = \sqrt[3]{-2b^3 + 9acb - 27a^2d + \sqrt{4(3ac - b^2)^3 + (-2b^3 - 9acb - 27a^2d)^2}}$$

$$\cos \tilde{k}_1 = \tilde{p}_1; \quad \cos \tilde{k}_2 = \tilde{p}_2; \quad \cos \tilde{k}_3 = \tilde{p}_3$$

Уравнения дисперсии (13), (18), (19) характеризуют электроупругие свойства пьезоэлектрической среды.

Знание корней (14), (20), (21) дает уравнения дисперсии в неограниченной периодической структуре и в общем виде могут быть записаны как:

$$\cos \tilde{k}_i h = \tilde{p}_i \quad (22)$$

Для уравнений дисперсии (3.3.13) области прозрачности удовлетворяют условиям

$$|\operatorname{Re} \tilde{p}_i| < 1, \quad \operatorname{Im} \tilde{p}_i = 0.$$

Границы между зонами прозрачности и непропускания определяются равенствами

$$|\operatorname{Re} \tilde{p}_i| = 1, \quad \operatorname{Im} \tilde{p}_i = 0.$$

Дисперсионные кривые, определяемые из условия  $p(\omega, c) = \pm 1$  дают границы зон пропускания и непропускания в неограниченной периодически неоднородной среде.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М.И. Рязанов. Электродинамика конденсированного вещества. М.:Наука, 1984-304с.
2. И.О. Богульский, С.Я. Петров, А.В. Шабасов. Электромагнитные волны в неограниченных и конечных сверхрешетках.//Оптика и спектр. 1998. 84, №5, с.823-828
3. Л.В. Голубев, Е.И. Леонов. Сверхрешетки. М.:Знание. 1977-64с.
4. Н.А. Шульга. Основы механики слоистых сред в периодической структуре. Киев: Наукова думка, 1981-200с.
5. А. Ярив, П. Юх. Оптические волны в кристаллах. М.: Наука, 1987-616с.
6. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. – Новосибирск: Наука, 1982.
7. Тлеуменов С.К., Сагайдак Т.В. «Структура фундаментальных решений полной системы уравнений Максвелла и уравнений движения электроупругой волны» Материалы науч. конф. молодых ученых, студентов, школьников «III Сатпаевские чтения». Павлодар, 2003, Т.7, С. 158-163.

Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова,  
г. Павлодар. Материал поступил в редакцию 15.08.2012 г.

С.Қ. ТЛЕУКЕНОВ, А.Б. БЕЛЯЛОВА

АНИЗОТРОПТЫ ОРТАНЫҢ 422 ТЕТРАГОНАЛДЫ СИНГОНИЯДАҒЫ  
ЭЛЕКТРОСЕРПІМДІ ТОЛҚЫНДАРДЫҢ ДИСПЕРСИЯ ТЕНДЕУЛЕРІ  
ТУРАЛЫ

S.K. TLEUKENOV, A.B. BELYLOVA

ABOUT THE EQUATIONS OF DISPERSION OF ELECTROELASTIC  
WAVES IN TETRAGONAL SINGONY'S NON-ISOTROPIC MEDIUM 422

### *Түйіндеме*

*Берілген мақалада толқынның таралу заңдылығын анықтайтын негізгі сипаттамасы болып табылатын 422 класты тетрагональды сингонияның шектелмеген құрылымындағы серпімді электрлік толқындардың дисперсияларының теңдеулері құрасытырылған.*

### *Resume*

*In the given article the equations of a dispersion of elastic waves in unlimited periodic frame tetragonal singony of the class 422 are constructed, which one are basic performance determining regularity of a wave propagation.*

**С.К. ТЛЕУКЕНОВ, Т.С. ДОСАНОВ, М.К. ЖУКЕНОВ**  
**РАСЧЕТ ПОТОКОВ ЭНЕРГИИ ПРИ ОТРАЖЕНИИ**  
**ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТМ ВОЛНЫ ОТ**  
**АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ КЛАССА 42'2'**

Введение. Основные положения моделей физики сплошной среды, учитывающие взаимодействия полей различной физической природы, изложены в работах Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшица [1], Ж. Можена [2], Л. И. Седова [3, 4], А. С. Eringen, G. A. Maugin [5], Новацкого В. [6], И. Е. Тамма [7], Y. H Pao [8], Y. H Pao, K. Hutter[9], P. Penfield, H. A. Haus [10] и др.

Если рассматривать развитие отдельных направлений в волновой физике, то можно отметить, что успехи в области акустооптики, акустоэлектроники и оптоэлектроники в последнее время были обусловлены, например, тем, что для различных применений были созданы новые материалы с необычными свойствами. В частности, появились новые классы материалов, таких, как фотонные кристаллы, среды с негативной рефракцией и т.д., обладающие уникальными физическими характеристиками. Оказалось, что в этих средах распространение и отражение электромагнитных волн может происходить весьма необычным образом. Однако и в традиционных материалах микроэлектроники и оптоэлектроники, особенно в кристаллических средах, созданных в последние годы, могут наблюдаться необычные физические эффекты. Ожидается, что такие материалы в ближайшее время будут использованы в современных радиофизических и оптоэлектронных устройствах, а также в лазерной технике, оптике и спектроскопии для управления параметрами электромагнитного излучения.

В данной работе на основе метода матрицанта [11] проведен численный анализ задачи отражения электромагнитной ТМ волны на границе «изотропный диэлектрик – анизотропный кристалл класса 42/2/ с пьезомагнитным эффектом».

Матрица коэффициентов. Определяющие соотношения для анизотропной среды с пьезомагнитным эффектом, как известно, имеют вид [1, 12]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl} - Q_{ijk} H_k \quad (1)$$

$$B_i = \mu_{ij} H_j + Q_{ijk} \epsilon_{ij} \quad (2)$$

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j \quad (3)$$

где  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжения,  $c_{ijkl}$  – тензор упругости;

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,l})$$

тензор деформации;  $Q_{ijk}$  – тензор пьезомагнитных коэффициентов;  $\varepsilon_{ij}, \mu_{ij}$  – тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости;  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля;  $\vec{H}$  – напряженность магнитного поля;  $\vec{B}$  – индукция магнитного поля;  $\vec{D}$  – вектор электрического смещения.

Уравнения движения упругой среды [13]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (4)$$

где  $\rho$  – плотность среды;  $\vec{u}$  – вектор смещения.

Уравнения Максвелла (вектор плотности тока  $\vec{j} = 0$ ) [14]

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (5)$$

Анализ системы уравнений (1) – (5) в случае гармонических волн, проводится на основе метода разделения переменных и представления решения в виде [11]:

$$f(x, y, z, t) = f(z) \exp(i\omega t - imx - iny) \quad (6)$$

где  $m$  и  $n$  – компоненты волнового вектора.

Используя (6), система уравнений (1)–(5) приводится к эквивалентной системе дифференциальных уравнений первого порядка [15]:

$$\frac{d\vec{w}}{dz} = B\vec{w} \quad (7)$$

здесь  $\vec{w} = (u_z, \sigma_{zz}, u_x, \sigma_{xz}, E_y, H_x, u_y, \sigma_{yz}, H_y, E_x)^T$  – вектор столбец содержащий независимые характеристики упругого и электромагнитного полей;  $B = B[c_{ijkl}(z), Q_{ijk}(z), \varepsilon_{ij}(z), \mu_{ij}(z), \rho(z), \omega, m, n]$  – матрица коэффициентов, элементы которой содержат в себе физико-механические параметры среды и частоту связанных упругих и электромагнитных волн.

Для сред тетрагональной сингонии классов 42/2/ декартову систему координат установим так, чтобы ось  $z$  была параллельна оси четвертого порядка, ось  $x$  параллельна оси второго порядка, тогда тензор упругости характеризуется 6 различными модулями упругости. При наличии пьезомагнитного эффекта в такой среде, тензор пьезомагнитных

коэффициентов имеет 3 различных коэффициента. Тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости характеризуются 2 различными элементами [12].

$$c_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}; Q_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{15} & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{31} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mu_{ij} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix}; \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Структура матрица коэффициентов, позволяет определить, какие типы волн связаны между собой.

В случае распространения связанных упругих и электромагнитных волн в анизотропной среде класса 42/2/ с пьезомагнитным эффектом в плоскости xz ( $n=0$ ):

$$\begin{cases} \frac{du_y}{dz} = \frac{1}{c_{44}} \sigma_{yz} + \frac{Q_{15}}{c_{44}} H_y \\ \frac{d\sigma_{yz}}{dz} = (m^2 c_{66} - \rho_2 \omega^2) u_y \\ \frac{dH_y}{dz} = -i\omega \varepsilon_{11} E_x \\ \frac{dE_x}{dz} = -i\omega \frac{Q_{15}}{c_{44}} \sigma_{yz} - i\omega \left( \mu_{11} + \frac{Q_{15}^2}{c_{44}} - \frac{m^2}{\omega^2 \varepsilon_{33}} \right) H_y \end{cases} \quad (8)$$

В однородной изотропной среде упругие волны не связаны с электромагнитной волной, поэтому для них в плоскости xz ( $n = 0$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du'_y}{dz} = \frac{2}{c'_{11} - c'_{12}} \sigma'_{yz} \\ \frac{d\sigma'_{yz}}{dz} = \left( \frac{2m^2}{c'_{11} - c'_{12}} - \rho_1 \omega^2 \right) u'_y \\ \frac{dH'_y}{dz} = -i\omega \varepsilon E'_x \\ \frac{dE'_x}{dz} = -i\omega \left( \mu - \frac{m^2}{\omega^2 \varepsilon} \right) H'_y \end{array} \right. \quad (9)$$

Штрихи обозначают, то, что величина относится к изотропной среде. Модули упругости изотропной среды  $c'_{11}$  и  $c'_{12}$  можно записать через коэффициенты Ламе:  $c'_{11} = 2\mu_{co} + \lambda$ ,  $c'_{12} = \lambda$ .

Матричная формулировка задачи отражения. В работе [16] показано, что матрицант усредненной среды имеет вид:

$$\hat{T}_{ycp} = \frac{\hat{P} - p_1 \hat{E}}{p_1 - p_2} \left( \hat{E} \cos kz + \frac{\langle \hat{B} \rangle}{k} \sin kz \right) + \frac{\hat{P} - p_2 \hat{E}}{p_2 - p_1} \left( \hat{E} \cos kz + \frac{\langle \hat{B} \rangle}{\kappa} \sin kz \right) \quad (10)$$

Здесь  $\hat{P} = \hat{E} + \frac{\langle \hat{B} \rangle^2 h^2}{2}$ ;  $p_1, p_2$  – корни уравнения:  $Det[\hat{P} - \lambda \hat{E}] = 0$ ;  $p_1 = \cos kh$ ,  $p_2 = \cos k\kappa h$ ;  $h$  – период неоднородности [16].

Усредненный матрицант разлагается на матрицант прямых и обратных волн, т.е. волн распространяющихся вдоль положительного и отрицательного направлений оси  $z$  соответственно [17].

$$\hat{T}^+ = \frac{1}{2(\kappa^2 - k^2)} \left( (\hat{B}^2 + \kappa^2 \hat{E}) + \frac{i}{k} (\hat{B}^3 + \kappa^2 \hat{B}) \right) \exp(-ikz) - \frac{1}{2(\kappa^2 - k^2)} \left( (\hat{B}^2 + k^2 \hat{E}) + \frac{i}{k} (\hat{B}^3 + k^2 \hat{B}) \right) \exp(-ikz) \quad (11)$$

$$\hat{T}^- = \frac{1}{2(\kappa^2 - k^2)} \left[ \left( (\hat{B}^2 + \kappa^2 \hat{E}) - \frac{i}{k} (\hat{B}^3 + \kappa^2 \hat{B}) \right) \exp(ikz) - \left( (\hat{B}^2 + k^2 \hat{E}) - \frac{i}{k} (\hat{B}^3 + k^2 \hat{B}) \right) \exp(ikz) \right]$$

Заметим, что  $\hat{T}^+$  и  $\hat{T}^-$  отличаются только знаком  $k$  и .

На основе метода матрицанта падающую, отраженную и преломленную волны можно задать в виде (множитель  $e^{i(\cdot)m}$  всюду опущен):

$$\vec{w}_{nad} = \hat{T}_1^+ \vec{w}_0, \vec{w}_{omp} = \hat{T}_1^- \vec{w}_r, \vec{w}_{np} = \hat{T}_2^+ \vec{w}_t \quad (12)$$



ГДЕ  $\vec{w}_{nad} = (0, 0, H_y^{nad}, E_x^{nad})^t$ ;  $\vec{w}_0 = (0, 0, H_0, E_0)^t$ ;  $\vec{w}_{omp} = (u_y^{omp}, \sigma_{yz}^{omp}, H_y^{omp}, E_x^{omp})^t$ ;  
 $\vec{w}_r = (u_r, \sigma_r, H_r, E_r)^t$ ;  $\vec{w}_{np} = (u_y^{np}, \sigma_{yz}^{np}, H_y^{np}, E_x^{np})^t$ ;  $\vec{w}_t = (u_t, \sigma_t, H_t, E_t)^t$ , причем  
 выполняются следующие условия:

$$\vec{w}_{nad}(0) = \hat{T}_1^+(0)\vec{w}_0 = \vec{w}_0, \quad \vec{w}_{omp}(0) = \hat{T}_1^-(0)\vec{w}_r = \vec{w}_r, \quad \vec{w}_{np}(0) = \hat{T}_2^+(0)\vec{w}_t = \vec{w}_t \quad (13)$$

Если среды жестко связаны должны выполняться граничные условия:

$$\hat{T}_1^+(0)\vec{w}_0 + \hat{T}_1^-(0)\vec{w}_r = \hat{T}_2^+(0)\vec{w}_t \quad (14)$$

$$\vec{w}_0 + \vec{w}_r = \vec{w}_t \quad (15)$$

Из условий (14) и (15) получаем:

$$\vec{w}_r = (\hat{T}_2^+(0) - \hat{T}_1^-(0))^{-1}(\hat{T}_1^+(0) - \hat{T}_2^+(0))\vec{w}_0 = \hat{G}\vec{w}_0 \quad (16)$$

Соотношение (17) определяет амплитуды отраженных волн.

Из (15) и (16) амплитуды преломленных волн:

$$\vec{w}_t = (\hat{E} + \hat{G})\vec{w}_0 \quad (17)$$

Для изотропной среды

$$\hat{T}_1^\pm = \begin{pmatrix} 1 & \pm \frac{ib'_{12}}{k_{u1}} & 0 & 0 \\ \pm \frac{ib'_{21}}{k_{u1}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{e^{\mp ik_{u1}z}}{2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \pm \frac{ib'_{34}}{k_{e1}} \\ 0 & 0 & \pm \frac{ib'_{43}}{k_{e1}} & 1 \end{pmatrix} \frac{e^{\mp ik_{e1}z}}{2} \quad (18)$$

$$k_{u1} = \sqrt{-b_{12}b_{21}}; \quad k_{e1} = \sqrt{-b_{34}b_{43}} \quad (19)$$

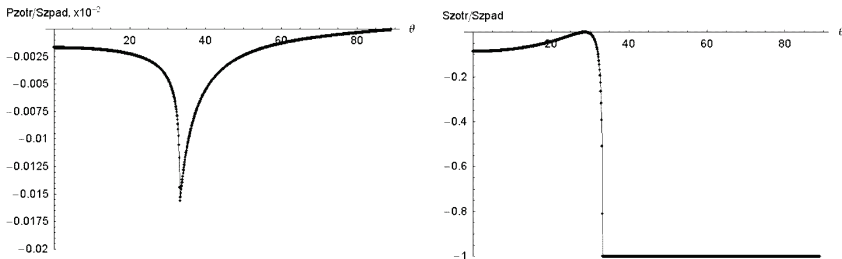
Для анизотропной среды класса 42/2/ с пьезомагнитным эффектом

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & -i\omega b_{13} & b_{43} & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

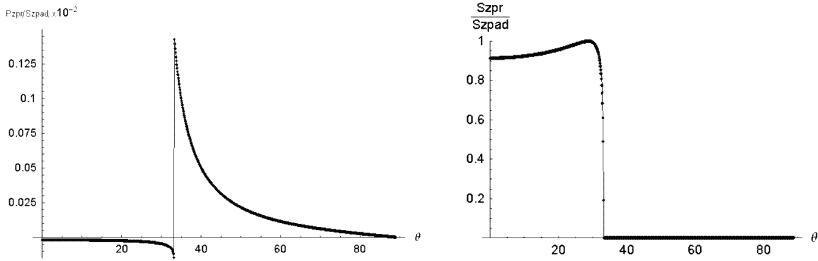
Из (11) и (21) получаем матрицант прямых волн во второй среде. Нормальные составляющие волновых векторов упругой и электромагнитной волн во второй среде:

$$\left. \begin{aligned} k^2 &= k_{u2}^2 \\ \kappa^2 &= k_{e2}^2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \left( -b_{12}b_{21} - b_{34}b_{43} \mp (b_{12}b_{21} - b_{34}b_{43}) \sqrt{1 - \frac{4i\omega b_{13}^2 b_{21} b_{34}}{(b_{12}b_{21} - b_{34}b_{43})^2}} \right) \quad (21)$$

Численный расчет. Проведен численный расчет энергетических коэффициентов отражения и преломления. Энергетические коэффициенты отражения представляют собой отношение нормальных составляющих энергетических потоков отраженных к падающей ( $\frac{P_z^{omp}}{S_z^{nao}}, \frac{S_z^{omp}}{S_z^{nao}}$ ), и, преломленных к падающей ( $\frac{P_z^{np}}{S_z^{nao}}, \frac{S_z^{np}}{S_z^{nao}}$ ). Расчеты проведены для различных значений параметров изотропной и анизотропной сред. Ниже приведены графики для одного из наборов параметров первой и второй сред.  $c'_{11} = 10^{10} \text{ Па}$ ,  $c'_{12} = 0,4 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $c_{44} = 10^{11} \text{ Па}$ ,  $c_{66} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\rho_1 = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_2 = 5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\varepsilon/\varepsilon_0 = 10$ ,  $\varepsilon_{11}/\varepsilon_0 = \varepsilon_{33}/\varepsilon_0 = 3$ ,  $\omega = 10^6 \text{ с}^{-1}$ ,  $\mu/\mu_0 = \mu_{11}/\mu_0 = 1$ ,  $Q_{15} = 10^3 \text{ Н/(А}\cdot\text{м)}$ . При данных параметрах сред наблюдается аналог полного внутреннего отражения падающей электромагнитной волны. Из полученных графиков видно, что максимальное значение энергетических коэффициентов отражения и преломления упругих волн достигается при угле полного внутреннего отражения. Поток преломленной упругой волны направлен к границе раздела сред при углах меньших угла полного внутреннего отражения, и, направлен от границы при углах больших угла полного внутреннего отражения. Так как поток энергии преломленной упругой волны направлен к границе раздела сред, а z компонента волнового вектора преломленной упругой волны положительна, то это означает, что угол между фазовой и групповой скоростями волны больше 90 градусов.

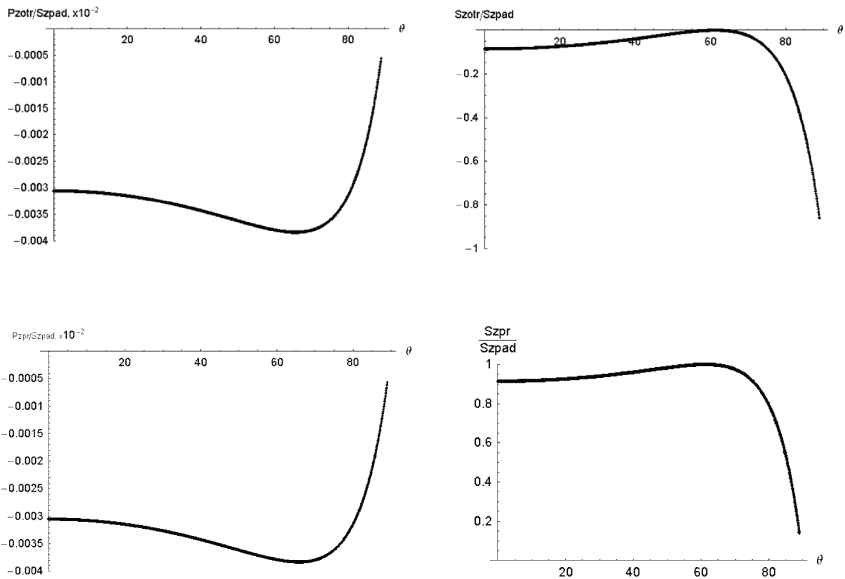






Далее был проанализирован случай, при котором отсутствовало ПВО. Параметры первой и второй сред.  $c'_{11} = 10^{10} \text{ Па}$ ,  $c'_{12} = 0,4 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $c_{44} = 10^{11} \text{ Па}$ ,  $c_{66} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\rho_1 = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_2 = 5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\vartheta/\vartheta_0 = 3$ ,  $\vartheta_{11}/\vartheta_0 = \vartheta_{33}/\vartheta_0 = 10$ ,  $\omega = 10^6 \text{ с}^{-1}$ ,  $\mu/\mu_0 = \mu_{11}/\mu_0 = 1$ ,  $Q_{15} = 10^3 \text{ Н/(А}\cdot\text{м)}$ .

При данных значениях параметров сред, ПВО не наблюдается ни при каких углах падения ТМ волны. В этом случае, из полученных графиков видно, что максимальное значение энергетических коэффициентов отражения и преломления упругих волн достигается при аналоге угла Брюстера. Поток преломленной упругой волны направлен к границе раздела сред при всех углах падения.



Закключение. Таким образом, в данной статье были численно проанализировано поведение энергетических коэффициентов при отражении электромагнитной ТМ волны на границе «изотропный диэлектрик – анизотропный кристалл класса 42/2/ с пьезомагнитным эффектом». Также следует отметить то, что мы называем упругую сдвиговую волну во второй среде «преломленной» (хотя падает только электромагнитная ТМ волна) связано с тем, что в общем случае на границу раздела могут падать как упругая, так и электромагнитная волны.

Перечисленные выше особенности поведения энергетических коэффициентов связано, во-первых, с анизотропией второй среды, во-вторых, с наличием пьезомагнитного эффекта, а в-третьих, с тем, что скорость электромагнитной волны на несколько порядков больше скорости упругой волны.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.8. Электродинамика сплошных сред.– М.: Наука, 1982.– 623с.
2. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – Т. 1. – 528 с.
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1984. – Т. 2. – 560 с.
5. Eringen A. C., Maugin G. A. *Electrodynamics of continua*. – New York: Springer-Verlag, 1990. – Vol. 2. – 363 p.
6. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 160 с.
7. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
8. Pao Y. H. *Electromagnetic forces in deformable continua* // *Mechanics Today* / Ed. By S. Nemat-Nasser. – New York etc.: Pergamon press, 1978. – Vol. 1. – P. 209–305.
9. Pao Y. H., Hutter K. *Electrodynamics for moving elastic solids and viscous fluids* // *Proc. IEEE*. – 1975. – Vol. 63, N. 7. – P. 1011-1021.
10. Penfield P., Haus H. A. *Electrodynamics of moving media*. – Cambridge: MIT, 1967. – 215 p.
11. Тлеукунов С.К. Метод матрицанта. Павлодар, НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004, 148 с.
12. Вайнштейн Б.К. Современная кристаллография: в 4-х т. / редкол.: Вайнштейн Б.К. (гл. ред.) и др. [предисл. Б.К. Вайнштейн] - М.: Наука, 1979.-4 т.
13. Новацкий В. Теория упругости.- М.:Мир, 1986.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.2. Теория поля.– М.: Наука, 1988.– 512 с.
15. Тлеукунов С.К., Орынбасаров К.А., Оспанов А.Т. Об упругих и магнитоупругих волнах в неоднородных и периодически неоднородных

средах. Теория и практика геологической интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Тез.докл. Всесоюзного сем. им. О.Г. Успенского. Алма-Ата, 1990. С.146.

16. Тлеукунов С.К. О характеристической матрице периодически неоднородного слоя. В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. Зап.научн.семина., ЛОМИ, Т.165, 1987, С. 177-181.

17. Тлеукунов С.К., Досанов Т.С. К задаче отражения электромагнитной ТМ волны на границе раздела изотропного полупространства и анизотропной среды класса  $42'2'$  с пьезомагнитным эффектом//«Вестник КазНПУ», 2007 г.

Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар. Материал поступил в редакцию 15.08.2012 г.

ТЛЕУКУНОВ С.К., ДОСАНОВ Т.С., ЖУКЕНОВ М.К.

42/2/ КЛАССЫНА ЖАТАТЫН АНИЗОТРОПТЫ ОРТА ШЕКАРАСЫНДА ТМ ЭЛЕКТРОМАГНИТТІК ТОЛҚЫНЫНЫҢ ШАҒЫЛУЫ КЕЗІНДЕ ЭНЕРГИЯ АҒЫНДАРЫНЫҢ ЕСЕПТЕУІ

TLEUKENOV S.K., DOSANOV T.S., ZHUKENOV M. K.

CALCULATION OF STREAMS OF ENERGY AT REFLECTION ELECTROMAGNETIC TM WAVES FROM THE ANISOTROPIC ENVIRONMENT OF THE CLASS  $42'2'$

### ***Түйіндеме***

*Жұмыста матрицант әдісі негізінде изотропты диэлектрик және пьезомагнитті эффектiсi бар 42/2/ классына жататын анизотропты орта шекарасында ТМ электромагниттік толқынының шағылуы қарастырылған. Сандық талдау негізінде байланысқан серпiмдi және электромагниттік толқындардың шағылу және сыну энергетикалық коэффициенттерінің тәртіп ерекшеліктері туралы маңызды қорытындылар жасалды. Толық шағылу кезінде, ішкі толық шағылу бұрышының шектік мәнінен кем электрмагниттік толқындардың барлық түсу бұрыштарында сынған ығысу толқын ағыны ортаны бөлетін шекараға бағытталған. Ішкі толық шағылудың шектік бұрышында энергетикалық коэффициенттер максимал мәнге жетеді. Ішкі толық шағылу болмаған жағдайда сынған ығысу толқынының ағыны электрмагниттік толқынның кез-келген түсу бұрышында ортаны бөлетін шекараға бағытталады. Түсу бұрышы Брюстер бұрышына тең болған жағдайда энергетикалық коэффициенттер максимал мәнге ие болады.*

**Resume**

*In given article on the basis of a method matricant the problem of reflection electromagnetic TM waves on border isotropic dielectric and the anisotropic environment of a class 42/2/ with piezomagnetic effect is considered. On the basis of the numerical analysis the important conclusions concerning features of behavior of energy coefficients of reflection and refraction of the connected elastic and electromagnetic waves are drawn. It is shown, that in the presence of total internal reflection the stream of the refracted shift wave is directed to border of section of environments at all corners of falling of an electromagnetic wave smaller a limiting angle of total internal reflection. The maximum value of energy coefficients of reflection is reached at limiting angle of total internal reflection. In the absence of total internal reflection the stream of the refracted shift wave is directed to border of section of environments at all angels of falling of an electromagnetic wave. The maximum value of energy coefficients of reflection is reached at falling angle which equal Brewster angle.*

**НАШИ АВТОРЫ**

*Альжанов Альмухан Балгабекович* - начальник Центра информационной защиты, АО «Эксим Банк», г. Павлодар.

*Жукенов Марат Каратаевич* - к.ф.-м.н., : зав. кафедрой физики и приборостроения, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

*Сейтханова Айнур Кусбековна* - старший преподаватель кафедры физики и приборостроения, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар

*Искакова Анаргуль Батырбаевна* - старший преподаватель кафедры физики и приборостроения, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

*Г.Ж. Әмренова*

*Е. Ертай*

*М.Х. Хамитов*

*Досумбеков Кайрат Рахметоллович* - старший преподаватель кафедры физики и приборостроения, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

*Джумабаев Дулат Сыздықбекович* - д.ф.-м.н., профессор, заведующий лабораторией дифференциальных уравнений Института Математики Министерства образования и науки Республики Казахстан.

*Асанова Анар Турмаганбеткызы* - д.ф.-м.н., доцент, главный научный сотрудник лаборатории дифференциальных уравнений Института Математики Министерства образования и науки Республики Казахстан.

*Арипов Еркин* – д.ф.-м.н., профессор, Жезказганский университет имени О.А. Байконурова.

*Сарсенбаев Жаркынбек Есенбаевич* - Соискатель.

*Испулов Нурлыбек Айдаргалиевич* - к.ф.-м.н., доцент по специальности «Физика» ККСОН МОН РК, декан факультета Физики, математики и информационных технологий, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

*Сейтханова Айнур Кусбековна* - старший преподаватель кафедры физики и приборостроения, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

*Тлеукиенов Садритен Кабдыгалиевич* - д.ф.-м. н., профессор, зав. кафедрой Технической физики, Евразийский национальный университет имени Л. Гумилева, г. Астана.

*Беялова Айнагуль Баянбековна* - магистрант кафедры физики приборостроения Павлодарского государственного университета имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

Жукенов Марат Каратаевич - к.ф.-м.н., зав. кафедрой физики и приборостроения, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

Зейтова Шолпан Сериковна - магистрант кафедры физики и приборостроения Павлодарского государственного университета имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

Досанов Талгат Сапаргалиевич - к.ф.-м.н., доцент кафедры физики и приборостроения, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

**ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ**

(«ВЕСТНИК ПГУ», «НАУКА И ТЕХНИКА КАЗАХСТАНА»,  
«ӨЛКЕТАНУ- КРАЕВЕДЕНИЕ»)

1. В журналы принимаются статьи по всем научным направлениям в 1 экземпляре, набранные на компьютере, напечатанные на одной стороне листа с межстрочным интервалом 1,5, с полями 30 мм со всех сторон листа, название статьи: кегль - 14 пунктов и дискета со всеми материалами в текстовом редакторе «Word 7,0 (97, 2000, 2007) для Windows».

2. Общий объем статьи, включая аннотацию, литературу, таблицы и рисунки, не должен превышать **8-10 страниц**.

3. Статья должна сопровождаться рецензией доктора или кандидата наук для авторов, не имеющих ученой степени. Для статей, публикуемых в Вестник химико-биологической серии, требуется экспертное заключение.

**Статьи должны быть оформлены в строгом соответствии со следующими правилами:**

1. УДК по таблицам универсальной десятичной классификации;
2. Название статьи - на казахском, русском и английском языках, заглавными буквами жирным шрифтом, абзац центrovанный;
3. Инициалы и фамилия(-и) автора(-ов), полное название учреждения;
4. Резюме на казахском, русском и английском языках: кегль - 10 пунктов, курсив, отступ слева-справа — 1 см, интервал 1,0; для Вестников химико – биологической серии требуется также экспертное заключение (см. образец);
5. Текст статьи: кегль - 14 пунктов, гарнитура - Times Nev Roman (для русского, английского и немецкого языков), KZ Times Nev Roman (для казахского языка).
6. Межстрочный интервал 1,5 (полуторный);
7. Список использованной литературы (ссылки и примечания в статье обозначаются сквозной нумерацией и заключаются в квадратные скобки). Список литературы должен быть оформлен в соответствии с ГОСТ 7.1-84 (см. образец).

*На отдельной странице*

**В бумажном и электронном вариантах приводятся:**

- **сведения об авторе: - Ф.И.О. полностью, ученая степень и ученое звание, место работы** (для публикации в разделе «Наши авторы»);
- **полные почтовые адреса, номера служебного и домашнего телефонов, E-mail** (для связи редакции с авторами, не публикуются);
- **название статьи и фамилия (-и) автора (-ов) на казахском, русском и английском языках** (для «Содержания»).

1. Иллюстрации. Перечень рисунков и подрисуночные надписи к ним представляют по тексту статьи. В электронной версии рисунки и иллюстрации представляются в формате TIF или JPG с разрешением не менее 300 dpi.

2. Математические формулы должны быть набраны как Microsoft Equation (каждая формула - один объект).

3. Автор просматривает и визирует гранки статьи и несет ответственность за содержание статьи.

4. Редакция не занимается литературной и стилистической обработкой статьи. Рукописи, диски и дискеты не возвращаются. Статьи, оформленные с нарушением требований, к публикации не принимаются и возвращаются авторам.

5. Оплата за публикацию в Вестнике составляет 5000 (Пять тысяч) тенге.

6. Статью (бумажная, электронная версии, оригинал квитанции об оплате) следует направлять по адресу:

140008, Казахстан, г. Павлодар, ул. Ломова, 64, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, Издательство «Кереку», каб. 137

Тел. 8 (718-2) 67-36-69, (внутр. 147; 183)

Факс: 8 (718-2) 67-37-02.

E-mail: [kereky@mail.ru](mailto:kereky@mail.ru)

#### Наши реквизиты:

|  |   |
|--|---|
| РГКП Павлодарский<br>государственный<br>университет им. С. Торайгырова | РНН 4 5 1 8 0 0 0 3 0 0 7 3<br>БИН 990 140 004 654          |
| АО«Цеснабанк»<br>Код сектора экономики – 6<br>Признак резиденства -1   | ИИК 579 98 F T B 0 0 0 0 0 0 3 3 1 0<br>БИК T S E S K Z K A |



УДК 316:314.3

**А.Б. ЕСИМОВА**  
**СЕМЕЙНО-РОДСТВЕННЫЕ СВЯЗИ**  
**КАК СОЦИАЛЬНЫЙ КАПИТАЛ**  
**В РЕАЛИЗАЦИИ РЕПРОДУКТИВНОГО МАТЕРИАЛА**

Одной из актуальных проблем современности является проблема демографическая. Еще в XX веке исследователи активно занимались поиском детерминант рождаемости, выявлением факторов, определяющих реализацию репродуктивных планов семей, индивидов.....

*Продолжение текста публикуемого материала.*

*Пример оформления таблиц, рисунков, схем:*

Таблица 1

Суммарный коэффициент рождаемости отдельных национальностей

|       | СКР, 1999 г. | СКР, 1999 г. |
|-------|--------------|--------------|
| Всего | 1,80         | 2,22         |

Диаграмма 1

Показатели репродуктивного поведения

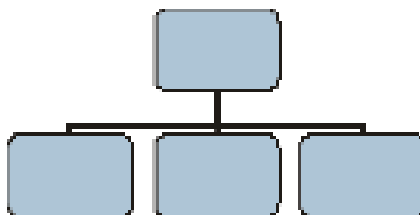
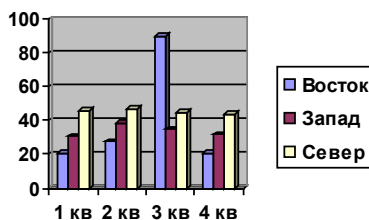


Рисунок 1 – Социальные взаимоотношения

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Этнодемографический ежегодник Казахстана. Статистический сборник. – А., 2006. – С.424.

2 Бурдые П. Формы капитала // Экономическая социология. – Т.3, №5. – 2002.-С.66.

*Место работы автора (-ов):*

Международный Казахско-Турецкий университет имени Х.А. Яссави, г. Туркестан.

А.Б. ЕСИМОВА

ОТБАСЫЛЫҚ-ТУЫСТЫ ҚАТЫНАСТАР РЕПРОДУКТИВТІ МІНЕЗ-ҚҰЛЫҚТЫ ЖҮЗЕГЕ АСЫРУДАҒЫ ӘЛЕУМЕТТІК КАПИТАЛ РЕТІНДЕ

A.B. YESSIMOVA

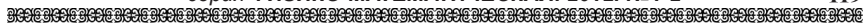
THE FAMILI-RELATED NETWORKS AS SOCIAL CAPITAL FOR REALIZATION OF REPRODUCTIVE BEHAVIORS

***Түйіндеме***

*Бұл мақалада автор Қазақстандағы әйелдердің отбасылық –туыстық қатынасы арқылы репродуктивті мінез-құлықында айырмашылықтарын талдайды.*

***Resume***

*In given article the author analyzes distinctions of reproductive behaviour of married women of Kazakhstan through a prism the kinship networks.*



Теруге 20.06.2012 ж. жіберілді. Басуға 28.06.2012 ж. қол қойылды.  
Форматы 70x100 1/16. Кітап-журнал қағазы.  
Көлемі шартты 7,9 б.т. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.  
Компьютерде беттеген А.Р. Тайлақова  
Корректорлар: Б.Б. Әубәкірова, А. Елемесқызы, А.Р. Омарова  
Тапсырыс № 1962

Сдано в набор 20.06.2012 г. Подписано в печать 28.06.2012 г.  
Формат 70x100 1/16. Бумага книжно-журнальная.  
Объем 7,9 ч.-изд. л. Тираж 300 экз. Цена договорная.  
Компьютерная верстка А.Р. Тайлақова  
Корректоры: Б.Б. Аубақирова, А. Елемесқызы, А.Р. Омарова  
Заказ № 1962

«КЕРЕКУ» баспасы  
С. Торайғыров атындағы  
Павлодар мемлекеттік университеті  
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.  
67-36-69  
E-mail: [publish@psu.kz](mailto:publish@psu.kz)  
[kereky@mail.ru](mailto:kereky@mail.ru)