

Торайғыров университетінің
ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Торайғыров университета

ТОРАЙҒЫРОВ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ

Физика-математикалық сериясы
1997 жылдан бастап шығады



ВЕСТНИК ТОРАЙҒЫРОВ УНИВЕРСИТЕТА

Физико-математическая серия
Издается с 1997 года

ISSN 2710-3536

№ 1 (2021)
Павлодар

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ТОРАЙГЫРОВ УНИВЕРСИТЕТ

Физико-математическая серия

выходит 4 раза в год

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о постановке на переучет периодического печатного издания,
информационного агентства и сетевого издания
№ KZ95VPY00029553

выдано

Министерством информации и общественного развития
Республики Казахстан

Тематическая направленность

публикация материалов в области физики, математики,
механики и информатики

Подписной индекс – 76135

<https://doi.org/10.48081/EOJL7907>

Бас редакторы – главный редактор

Тлеукенов С. К.

доктор ф.-м.н., профессор

Заместитель главного редактора Кумеков С. Е., *к.ф.-м.н., доцент*

Ответственный секретарь Талипов О. М., *доктор PhD*

Редакция алқасы – Редакционная коллегия

Оспанов К. Н., *д.ф.-м.н., профессор*

Кутербекоев К. А., *д.ф.-м.н., профессор*

Ибраев Н. Х., *д.ф.-м.н.*

Ткаченко И. М., *д.ф.-м.н., профессор (Испания)*

Демкин В. П., *д.ф.-м.н., профессор (Россия)*

Qadir Abdul *доктор PhD, профессор (Пакистан)*

Lobiyal D. K. *доктор PhD, профессор (Индия)*

Лапчик М. П. *д.пед.н., профессор (Россия)*

Шокубаева З. Ж., *технический редактор*

За достоверность материалов и рекламы ответственность несут авторы и рекламодатели

Редакция оставляет за собой право на отклонение материалов

При использовании материалов журнала ссылка на «Вестник Торайгыров университета» обязательна

Б. Н. Дроботун, А. К. Есиркепова

Торайғыров университет, Республика Казахстан, г. Павлодар

К ВОПРОСУ ОПИСАНИЯ ДЕДУКТИВНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ПРОПОЗИЦИОННЫХ ИСЧИСЛЕНИЙ НА ЯЗЫКЕ ТЕОРИИ АЛГЕБР

В историческом плане, формирование представлений, обусловивших разработку концепции логического исчисления, осуществлялось на базе алгебраических предпосылок, отражающих операционный характер мышления человека. Тем не менее, в современных трактовках канонических компонент общей схемы определения логического исчисления, алгебраический потенциал применяемых подходов, аккумулируя в себе возможности дальнейшего развития, оставался практически не использованным.

В данной работе выявляются возможности и наиболее естественные формы реализации алгебраической точки зрения в определении логического исчисления и сопутствующих ему понятий и конструкций. На основе полученных, при этом, методов и технологий, в работе предпринимается опыт описания формально-языковых конструкций и дедуктивных средств исчисления высказываний в терминах общей теории алгебр.

В результате осуществления этого подхода было получено, в частности, что множество всех формул исчисления высказываний может быть отождествлено с множеством термальных операций алгебры, каноническим образом связанной с синтаксической составляющей этого исчисления. Далее, следуя этому пути были предложены всюду определенные аналоги правил вывода исчисления высказываний и характеристика совокупности его выводимых формул как основного множества подалгебры этой алгебры, порожденной множеством аксиом.

Ключевые слова: логическое исчисление, исчисление высказываний, алгебра, термальная операция, формула, аксиома, правило вывода, теорема.

Введение

История развития традиционной логики [1] показывает, что формирование представлений о логическом исчислении осуществлялось на основе широкого использования алгебраических методов и технологий, свойственных соответствующим периодам развития алгебры.

В связи с этим, следует отметить, что алгебраическая трактовка логических исчислений не является навязанной извне и что алгебраическую сущность этих исчислений предопределила природа мышления человека [2–5]. В первую очередь, эта трактовка обусловлена тем, что умозаключение, являясь основной формой мышления, носит операционный характер, т.е. представляет собой один из наиболее ярких прообразов современного понятия алгебраической операции.

Тем не менее, в традиционных описаниях общей схемы определения логического исчисления и ее конкретных реализациях, отмеченная ранее алгебраичность методов построения синтаксической и дедуктивной компонент этих исчислений, не получает соответствующего развития.

Определение логического исчисления и детальное описание его составляющих можно найти в [6–8].

К числу наиболее значимых логических исчислений I относятся пропозициональные исчисления, отличительной особенностью которых является то, что алфавит $A(I)$ этих исчисления содержит лишь символы пропозициональных (логических) связок, взятых из множества $\{\&; \vee; \rightarrow; \leftrightarrow; \neg\}$, а также символы $x_1; x_2; \dots; x_s; \dots$, $s \in N$, – пропозициональных (высказывательных) переменных и вспомогательных символов $(;)$ – левой и правой скобок.

В качестве объекта и субъекта исследования в данной статье выступают, соответственно, пропозициональные логические исчисления и общая схема определения базовых компонент исчисления высказываний.

Материалы и методы

В данной работе используются методы и канонические конструкции общей теории алгебраических систем применительно к получению описания формального языка и дедуктивных средств пропозициональных логических исчислений в терминах теории алгебр. В соответствии с этим, в работе:

- выявляются и конкретизируются научно-методологические предпосылки алгебраического подхода к описанию понятий, схем и конструкций синтаксиса исчисления высказываний;

- определяются и реализуются возможности использования канонических средств теории алгебр для получения алгебраических характеристик языка и множества теорем этого исчисления;

– дается обоснование корректности полученных описаний языка и множества теорем с логико-алгебраических позиций.

Согласно этому, в работе будут рассматриваться только функциональные сигнатуры, т.е. сигнатуры σ , содержащие лишь символы для алгебраических операций и константных символов:

$$\sigma = \langle F_1^{m_1}; F_2^{m_2}; \dots; F_k^{m_k}; c_1; c_2; \dots; c_r \rangle$$

Одним из основных понятий работы является понятие термина сигнатуры σ .

Индуктивная схема построения множества $Term_\sigma(X)$ – термов этой сигнатуры над множеством переменных $X = \{x_1; x_2; \dots; x_l; \dots\}$ и множеств подтермов этих термов реализуется следующим образом:

а) **Базис индукции** (шаг 0). Переменные $x_i \in X$, $i = 1; 2; \dots; l; \dots$ и константные символы c_j , $j = 1; 2; \dots; r$, сигнатуры σ объявляются терминами шага 0 этой сигнатуры. Единственным подтермом любого термина шага 0 является сам этот терм.

б) **Индукционное предположение** (шаг k) Предполагается, что все термы шага k и множества всех подтермов каждого такого термина уже определены;

в) **Индукционный шаг**. Пусть $F_i^{m_i} \in \sigma$ и $t_1 = t_1(x_1; x_2; \dots; x_n)$; $t_2 = t_2(x_1; x_2; \dots; x_n)$; ...; $t_{m_i} = t_{m_i}(x_1; x_2; \dots; x_n)$ – произвольные термы шага k. Тогда все термы шага k и все слова вида $t(x_1; x_2; \dots; x_n) = F_i^{m_i}(t_1; t_2; \dots; t_{m_i})$ объявляются терминами шага (k + 1).

Подсложностью термина $t \in Term_\sigma(X)$ будем, далее, понимать номер шага, на котором этот терм впервые появился в процессе пошагового построения множества $Term_\sigma(X)$. Сложность термина t будет обозначаться через $S(t)$.

Очевидно, что термы шага 0 имеют сложность 0 и если $t = F_i^{m_i}(t_1; t_2; \dots; t_{m_i})$ – терм шага (k + 1), то $S(t) = \max\{S(t_1); S(t_2); \dots; S(t_{m_i})\} + 1$.

Пусть $M = \langle M; {}^o\sigma \rangle$ – произвольная алгебра сигнатуры σ , $t = t(x_1; x_2; \dots; x_q) \in Term_\sigma(X)$ и $a_1; a_2; \dots; a_q \in M$. Значение ${}^o t(a_1; a_2; \dots; a_n)$ термина $t = t(x_1; x_2; \dots; x_n)$ в алгебре M , при $x_1 = a_1; x_2 = a_2; \dots; x_n = a_n$ определяется индукцией по сложности $S(t)$ этого термина.

а) **Базис индукции** ($S(t) = 0$). То есть $t = t(x_1; x_2; \dots; x_n) = x_i$, $1 \leq i \leq n$, или $t(x_1; x_2; \dots; x_n) = \tilde{c}_j$, $j = 1; 2; \dots; r$. Тогда, в первом случае, полагаем ${}^o t(a_1; a_2; \dots; a_n) = a_i$, а во втором – ${}^o t(a_1; a_2; \dots; a_n) = {}^o c_j$.

б) **Индукционное предположение** ($S(t) \leq k$). Предположим, что значение $t(a_1; a_2; \dots; a_n)$ термина $t(x_1; x_2; \dots; x_n)$ в алгебре M уже определено

для любого термина t , сложность которого не превосходит k , и это значение есть элемент множества M .

в) **Индукционный шаг** ($S(t) = k + 1$). В этом случае, согласно определению термов шага $(k + 1)$, существуют такие термы $t_1; t_2; \dots; t_{m_i} \in \text{Term}_\sigma(X)$, что $t = F_i^{m_i}(t_1; t_2; \dots; t_{m_i})$ для некоторого функционального символа $F_i^{m_i} \in \sigma$. Так как $S(t) = S(F_i^{m_i}(t_1; t_2; \dots; t_n)) = \max\{S(t_1), S(t_2); \dots; S(t_n)\} + 1 = k + 1$, то $S(t_s) \leq k$, $s = 1; 2; \dots; n$. В соответствии с индукционным предположением, значения $b_s = t_s(a_1; a_2; \dots; a_n)$ термов $t_s(x_1; x_2; \dots; x_n)$ в алгебре M , при $x_1 = a_1; x_2 = a_2; \dots; x_n = a_n$, $s = 1; 2; \dots; m_i$, уже определены и принадлежат M . Тогда полагаем ${}^\varphi t(a_1; a_2; \dots; a_n) = {}^\varphi F_i^{m_i}(b_1; b_2; \dots; b_{m_i})$.

Заметим, что так как ${}^\varphi F_i^{m_i} - m_i$ -местная алгебраическая операция, определенная на множестве M и $b_1; b_2; \dots; b_{m_i} \in M$, то ${}^\varphi F_i^{m_i}(b_1; b_2; \dots; b_{m_i}) \in M$.

Определив значение ${}^\varphi t(a_1; a_2; \dots; a_n)$ термина $t(x_1; x_2; \dots; x_n)$ в алгебре M для любых $a_1; a_2; \dots; a_n \in M$, мы определили, тем самым, n -местную алгебраическую операцию ${}^\varphi t = {}^\varphi t(x_1; x_2; \dots; x_n)$ на носителе M алгебры M . Эта операция называется термальной (или производной) операцией (в отличие от основных операций ${}^\varphi F_i^{m_i}$, $i = 1; 2; \dots; k$, этой алгебры), соответствующей терму t . Множество термальных операций алгебры $M = \langle M; {}^\varphi \sigma \rangle$ будем обозначать через ${}^\varphi \text{Term}_\sigma(X)$.

Алгебраическое описание множества формул исчисления высказываний можно получить теперь следующим образом. Пусть

$$\sigma_0 = \langle F_1^2; F_2^2; F_3^2; F_4^2; F_5^1; c_1; c_2 \rangle$$

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 1. Множество $\text{Term}_{\sigma_0}(X)$ – термов сигнатуры σ_0 (с точностью до выбора обозначений для функциональных символов) есть множество L формул исчисления высказываний.

Доказательное обоснование этого утверждения достаточно очевидно. В частности, слово $F_2^2(F_5^1(F_1^2(x_1; x_2)); F_3^2(x_1; x_3))$, как терм сложности 3, при использовании логических связок $\&; \vee; \rightarrow; \leftrightarrow; \neg$ в качестве обозначений для функциональных символов $F_1^2; F_2^2; F_3^2; F_4^2; F_5^1$, соответственно, примет вид: $(\neg(x_1 \& x_2) \vee (x_1 \rightarrow x_3))$, т.е. будет представлять собой формулу $A(x_1; x_2; x_3)$ сложности 3 исчисления высказываний.

Аналогичным образом получается алгебраическая характеристика множества формул алгебры высказываний от пропозициональных

переменных $x_1; x_2; \dots; x_k; \dots$. А именно, будем считать теперь, что $\&; \vee; \rightarrow; \leftrightarrow$ и $\neg$ – традиционные обозначения логических операций: конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквиваленции и отрицания, соответственно, над высказываниями, определение которых на множестве $B_0 = \{0; 1\}$ задается посредством следующей таблицы (смотри таблицу 1).

Таблица 1 – Логические операции

x	y	$(x \& y)$	$(x \vee y)$	$(x \rightarrow y)$	$(x \leftrightarrow y)$	$\neg x$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Задавая интерпретацию φ сигнатуры σ_0 на множестве $B_0 = \{0; 1\}$ по правилам:

$$\begin{aligned}\varphi(F_1^2) &= {}^0F_1^2(x; y) = (x \& y); & \varphi(F_2^2) &= {}^0F_2^2(x; y) = (x \vee y); \\ \varphi(F_4^2) &= {}^0F_4^2(x; y) = (x \rightarrow y); & \varphi(F_5^1) &= {}^0F_5^1(x; y) = \neg x \\ \varphi(c_1) &= {}^0c_1 = 0; & \varphi(c_2) &= {}^0c_2 = 1,\end{aligned}$$

получаем алгебру $\mathbf{B}_0 = \langle B_0; \& \vee; \rightarrow; \leftrightarrow; \neg; 0; 1 \rangle$ и следующее утверждение относительно этой алгебры.

Предложение 2. Множество ${}^0Term_\sigma(X)$ – термальных операций алгебры $\mathbf{B}_0$ совпадает с множеством всех формул алгебры высказываний.

Переходя к алгебраической характеристизации множества всех выводимых формул (теорем) исчисления высказываний, напомним правила дедукции этого исчисления.

Пусть $A(x)$ – формула исчисления высказываний, имеющая хотя бы одно вхождение переменной x , и B – произвольная формула этого исчисления. Через $A(B)$ будем обозначать формулу, которая получается из формулы $A(x)$ посредством замены переменной x , во всех местах ее вхождения в эту формулу, на формулу B .

а) **Правило подстановки.** Если $A = A(x)$ – выводимая формула исчисления высказываний, содержащая переменную x , и B – произвольная формула этого исчисления, то формула $A(B)$ также является выводимой.

Из определения правила подстановки следует, что это правило является частичной унарной операцией на L . Обозначая эту операцию через $S_z^B(x)$, получаем:

$$(\forall A \in L)((S_z^B(A) = A(B) \Leftrightarrow (\text{переменная } z \text{ имеет вхождения в формулу } A))).$$

Заметим, что формула B , в определении операции $S_z^B(x)$, играет роль параметра.

б) **Правило заключения.** Если A и $(A \rightarrow B)$ – выводимые формулы исчисления высказываний (ИВ), то формула B также выводима.

Правило заключения, как это следует из его определения, является частичной бинарной операцией на множестве L . Обозначая эту операцию через $M.P(x; y)$, получаем, что

$$(\forall A; B \in L) (M.P(A; B) = C \Leftrightarrow (B = (A \rightarrow C))).$$

в) В качестве аксиом в ИВ выбираются следующие формулы:

$$\begin{aligned} A1 &= (x \rightarrow (y \rightarrow x)) ; \\ A2 &= (x \rightarrow (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) ; \\ A3 &= (x \& y \rightarrow x) ; \\ A4 &= (x \& y \rightarrow y) ; \\ A5 &= (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow (y \& z)) ; \\ A6 &= (x \rightarrow (x \vee y)) ; \\ A7 &= (y \rightarrow (x \vee y)) ; \\ A8 &= (x \rightarrow z) \rightarrow (y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z) ; \\ A9 &= (x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x}) ; \\ A10 &= (x \rightarrow \bar{\bar{x}}) ; \\ A11 &= (\bar{\bar{x}} \rightarrow x) . \end{aligned}$$

В этих формулах под $x; y; z$ понимаются любые из пропозициональных переменных $x_1; x_2; \dots; x_k; \dots$.

г) Конечная последовательность $B_1; B_2; \dots; B_k$ – формул исчисления высказываний называется выводом (или доказательством) в ИВ, если каждая формула B_i является или аксиомой или получена из некоторых предшествующих формул этой последовательности по одному из правил вывода.

д) Формула **D** называется выводимой или теоремой, если существует такой вывод $B_1; B_2; \dots; B_k$ этого исчисления, что $D = B_k$, т.е. **D** является последней формулой этого вывода.

Определения а) и б), как отмечалось ранее, правил вывода ИВ показывают, что эти правила определяют некоторые частичные отображения. А именно:

- правило подстановки есть частичное отображение из L в L ;
- правило заключения – частичное отображение из $L \times L$ в L .

В частности, правило подстановки S_z^B формулы **B** в формулу **A** вместо переменной z не применимо, если в **A** эта переменная не имеет вхождений. Аналогично, правило заключения применимо только к формулам вида **A** и $(A \rightarrow B)$, т.е. далеко не ко всем парам формул. Всюду определенные аналоги этих правил могут быть введены следующим образом.

На множестве L определим совокупность $\{S_z^B(x) \mid z \in X; B \in L\}$ – унарных операций и бинарную операцию $G(x; y)$ по правилам:

$$(\forall A \in L) \left(S_z^B(A) = \begin{cases} A(B), & \text{если переменная } z \text{ имеет вхождение в} \\ & \text{формулу } A; \\ A, & \text{в противном случае.} \end{cases} \right)$$

$$(\forall A; B \in L) \left(G(A; B) = \begin{cases} C, & \text{если } B = (A \rightarrow C); \\ A, & \text{в противном случае.} \end{cases} \right)$$

Нетрудно видеть, что $S_z^B(x)$ и $G(x; y)$ являются всюду определенными аналогами правил подстановки и заключения, т.е. алгебраическими операциями на множестве L , что дает возможность определить алгебру $B_1 = \langle L; {}^0\sigma_1 \rangle$ сигнатуры

$$\sigma_1 = \langle \{F_z^{1,B} \mid z \in X; B \in L\}, F^2(x; y) \rangle,$$

где интерпретация φ функциональных символов этой сигнатуры в множестве L задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi(F_z^{1,B}) &= {}^0F_z^{1,B}(x) = S_z^B(x), \quad z \in X; B \in L; \\ \varphi(F^2) &= {}^0F^2(x; y) = G(x; y), \end{aligned}$$

т.е. носителем алгебры B_1 является множество L , а основными операциями этой алгебры являются $S_z^B(x)$, $z \in X$; $B \in L$, и $G(x; y)$.

Для описания производных (термальных) операций алгебры B_1 конкретизируем индуктивный процесс построения множества $Term_\sigma(X)$ сигнатуры σ применительно к сигнатуре σ_1 .

а) **Базис индукции** (шаг 0) и б) Индукционное предположение (шаг k) остаются теми же самыми, как и в общем случае. Конкретизация индукционного шага осуществляется следующим образом:

в) **Индукционный шаг** (шаг $k+1$). Пусть $t; t_1; t_2$ – термы, полученные на шаге k . К термам шага $(k+1)$ отнесем все термы шага k и слова вида: $F_z^{1,B}(t)$, $z \in X$; $B \in L$, и $F^2(t_1; t_2)$.

К примеру, слово $t' = t'(x_1; x_2) = F_2^2(F_x^{B_1}(x_1) F_u^{B_2}(x_2))$ – терм сигнатуры σ_1 .

Как и в общем случае, значением термальной операции ${}^{\sigma}t = {}^{\sigma}t(x_1; x_2; \dots; x_n)$, соответствующей терму $t = t(x_1; x_2; \dots; x_n) \in Term_{\sigma_1}(X)$, при заданных значениях $A_1; A_2; \dots; A_n \in L$ для переменных $x_1; x_2; \dots; x_n$, соответственно, будет элемент $C = {}^{\sigma}t(A_1; A_2; \dots; A_n)$, т.е. формула носителя L алгебры B_1 .

Алгебраическое описание множества $Th_\sigma(X)$ – выводимых формул (т.е. теорем) ИВ будет заключаться в обосновании того, что это множество есть носитель подалгебры алгебры B_1 , которая порождается множеством $\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_{11}$ – аксиом ИВ, как формул, принадлежащих множеству L .

Пусть $M = \langle M; {}^{\sigma}\sigma \rangle$ – произвольная алгебра сигнатуры σ и C – некоторое непустое подмножество носителя M этой алгебры.

Подалгебра алгебры M , порожденная подмножеством C основного множества M этой алгебры, определяется [9–10] как пересечение всех подалгебр $M' = \langle M'; {}^{\sigma}\sigma \rangle$ алгебры $M = \langle M; {}^{\sigma}\sigma \rangle$, носители которых содержат множество C . В дальнейшем эту подалгебру будем обозначать через $M(C) = \langle M(C); {}^{\sigma}\sigma_1 \rangle$.

Для получения алгебраической характеристики множества теорем ИВ нам потребуется описание этой подалгебры на языке термальных операций алгебры M . А именно, имеет место следующее утверждение [10]: носитель $M(C)$ подалгебры $M(C)$ алгебры $M = \langle M; {}^{\sigma}\sigma \rangle$, порожденной непустым подмножеством C носителя M этой алгебры, совпадает с множеством

$$\{{}^{\sigma}t(a_1; a_2; \dots; a_n) / (a_1; a_2; \dots; a_n \in C); t \in Term_\sigma(X)\}$$

Требуемое описание множества теорем ИВ получается из этого предложения при: $\sigma = \sigma_1$; $M = L$; $C = \{\mathcal{A}_1; \mathcal{A}_2; \dots; \mathcal{A}_{11}\}$. А именно, имеет место следующее утверждение.

Предложение 3. Множество $Th_{\sigma_1}(X)$ теорем ИВ есть множество значений ${}^{\varphi}t(\mathcal{A}_{i_1}; \mathcal{A}_{i_2}; \dots; \mathcal{A}_{i_n})$ термальных операций ${}^{\varphi}t(x_1; x_2; \dots; x_n)$, соответствующих термам $t = t(x_1; x_2; \dots; x_n) \in Term_{\sigma_1}(X)$ при всевозможных значениях $\mathcal{A}_{i_1}; \mathcal{A}_{i_2}; \dots; \mathcal{A}_{i_n} \in \{\mathcal{A}_1; \mathcal{A}_2; \dots; \mathcal{A}_{11}\}$ для переменных $x_1; x_2; \dots; x_n$ соответственно.

Выводы

В математике операции, определяемые на множествах, элементы которых являются объектами достаточно сложной природы (в частности, сами являются операциями или формулами) называются операторами. Вышеприведенная характеристика множества теорем ИВ, как значений термов сигнатуры σ_1 , позволяет получить, так называемую, операторную запись каждой из этих теорем.

Получим, к примеру, операторную запись теоремы $(x \& y) \rightarrow (y \& x)$ исчисления высказываний. Предварительно приведем вывод этой формулы в исчислении авсказываний.

$$\begin{aligned} B_1 &= (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow (y \& z))) - \text{аксиома } \mathcal{A}_5; \\ B_2 &= (x \& y) \rightarrow y - \text{аксиома } \mathcal{A}_4; \\ B_3 &= (((x \& y) \rightarrow y) \rightarrow (((x \& y) \rightarrow z) \rightarrow (x \& y) \rightarrow (y \& z)))) - \\ &S_x^{(x \& y)}(B_1(x); \\ B_4 &= (x \& y) \rightarrow x - \text{аксиома } \mathcal{A}_3; \\ B_5 &= (((x \& y) \rightarrow z) \rightarrow (x \& y) \rightarrow (y \& z))) - M.P(B_2; B_3); \\ B_6 &= (((x \& y) \rightarrow x) \rightarrow (x \& y) \rightarrow (y \& z))) - S_z^x(B_5(z); \\ B_7 &= (x \& y) \rightarrow (y \& x) - M.P(B_4; B_6). \end{aligned}$$

Рассмотрим, далее, следующую последовательность термов сигнатуры σ_1 :

$$\begin{aligned} t_1(x_1) &= x_1; \quad t_2(x_2) = x_2; \quad t_3(x_1) = F_x^{(x \& y)}(x_1); \quad t_4(x_3) = x_3; \\ t_5(x_1; x_2) &= F_2^2(x_2; F_x^{(x \& y)}(x_1)); \quad t_6(x_1; x_2) = F_z^x(F_2^2(x_2; F_x^{(x \& y)}(x_1))); \\ t_7(x_1; x_2; x_3) &= F_2^2(x_3; F_z^x(F_2^2(x_2; F_x^{(x \& y)}(x_1)))). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что:

$$B_1 = \varphi_{t_1}(\mathcal{A}_5); B_2 = \varphi_{t_2}(\mathcal{A}_5); B_3 = \varphi_{t_3}(\mathcal{A}_5); B_4 = \varphi_{t_4}(\mathcal{A}_3); \\ B_5 = \varphi_{t_5}(\mathcal{A}_4; \mathcal{A}_5); B_6 = \varphi_{t_6}(\mathcal{A}_3; \mathcal{A}_5); B_7 = \varphi_{t_7}(\mathcal{A}_5; \mathcal{A}_4; \mathcal{A}_3).$$

Т.е. операторным представлением теоремы $(x \& y) \rightarrow (y \& x)$ является значение термальной операции

$$\varphi_{t_7}(x_1; x_2; x_3) = (G(x_3; P_z^x(G(x_2; P_x^{(x \& y)}(x_1))))$$

при $x_1 = \mathcal{A}_5; x_2 = \mathcal{A}_4; x_3 = \mathcal{A}_3$.

Список использованных источников

- 1 Математика XIX века: под редакцией А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. – М. : Наука, 1978.
- 2 Карри, Х. Основания математической логики: Пер. с англ. – М. : Наука, 1969.
- 3 Кондаков, Н. И. Логический словарь - справочник. – М. : Наука 1975.
- 4 Гильберт Д, Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики: Пер. с нем. – М. : Наука, 1979.
- 5 Математическая теория логического вывода. Сборник переводов под редакцией Идельсона А. В., Минц Г. Е. – М. : Наука, 1967.
- 6 Ершов, Ю. Л., Палютин, Е. А. Математическая логика. – М. : Наука, 1979.
- 7 Гончаров, С. С., Дроботун, Б.Н., Никитин, А. А. Алгебраические и алгоритмические свойства логических исчислений. Часть 1. Моногр. – Новосибирск: изд-во НГУ. Научное издание, 2008.
- 8 Черч, А. Введение в математическую логику: Пер. с англ. – М. : Наука, 1960.
- 9 Мальцев, А. И. Алгебраические системы. – М. : Наука, 1970.
- 10 Гончаров, С. С., Дроботун, Б. Н., Никитин, А. А. Алгебраические и алгоритмические свойства логических исчислений. Часть 2. Моногр. – Новосибирск : изд-во НГУ. Научное издание, 2008.

References

- 1 Matematika XIX veka: pod redakciej A. N. Kolmogorova i A. P. Yushkevicha. [Mathematics of the nineteenth century: edited by A. N. Kolmogorov and A. P. Yushkevich.] – М. : Nauka, 1978.

2 **Karri, H.** Osnovaniya matematicheskoy logiki: Per. s angl. – [Foundations of mathematical logic: Per. from English.] – М. : Nauka, 1969.

3 **Kondakov, N. I.** Logicheskij slovar' [Logical dictionary.] – spravochnik. – М. : Nauka – 1975.

4 **Gilbert, D., Bernays, P.** Osnovaniya matematiki. Logicheskie ischisleniya i formalizaciya arifmetiki: Per. s nem. [Foundations of mathematics. Logical calculus and formalization of arithmetic: Trans. from German]– М. : Nauka, 1979.

5 Matematicheskaya teoriya logicheskogo vyvoda. Sbornik perevodov pod redakciej Idel'sona A. V., Minca G. E. [Mathematical theory of logical inference. Collection of translations edited by Idelson A.V., Mints G. E]. – М. : Nauka, 1967.

6 **Yershov, Yu. L., Palyutin, E. A.** Matematicheskaya logika. [Mathematical logic.] – М. : Nauka, 1979.

7 **Goncharov, S. S., Drobotun, B. N., Nikitin, A. A.** Algebraicheskie i algoritmicheskie svojstva logicheskikh ischislenij. CHast' 1. Monogr. [Algebraic and algorithmic properties of logical calculi. Part 1. Monogr.] – Novosibirsk : NSU Publishing House. Scientific edition, 2008.

8 **Church, A.** Vvedenie v matematicheskuyu logiku: Per. s angl. [Introduction to mathematical logic: Trans. from English] – М. : Nauka, 1960.

9 **Maltsev, A. I.** Algebraicheskie sistemy [Algebraic systems].

10 **Goncharov, S. S., Drobotun, B. N., Nikitin, A. A.** Algebraicheskie i algoritmicheskie svojstva logicheskikh ischislenij. CHast' 2. Monogr. [Algebraic and algorithmic properties of logical calculi. Part 2. Monogr.] – Novosibirsk : NSU Publishing House. Scientific Publication, 2008.

Материал поступил в редакцию 19.03.21.

Б. Н. Дроботун, А. К. Есиркепова

Дедуктивті сипаттау сұрағына пропозициялық есептеулердің құрамдас бөлігі алгебра теориясы тілінде

Торайғыров университеті,
Қазақстан Республикасы, Павлодар қ.
Материал 19.03.21 баспаға түсті.

B. N. Drobotun, A. K. Yessirkepova

To the question of the description of the deductive a component of propositional calculus in the language of algebra theory

Toraighyrov University,
Republic of Kazakhstan, Pavlodar.
Material received on 19.03.21.

Тарихи тұрғыдан алғанда, логикалық есептеу тұжырымдамасының дамуын анықтайтын идеялардың қалыптасуы адам ойлауының операциялық сипатын көрсететін алгебралық алғышарттар негізінде жүзеге асырылды. Дегенмен, логикалық есептеулерді анықтаудың жалпы схемасының канондық компоненттерінің қазіргі түсіндірулерінде одан әрі даму мүмкіндіктерін жинақтай отырып, қолданылатын тәсілдердің алгебралық әлеуеті іс жүзінде қолданылмады.

Бұл жұмыста логикалық есептеулерді және онымен байланысты ұғымдар мен құрылымдарды анықтауда алгебралық көзқарасты жүзеге асырудың мүмкіндіктері мен табиғи формалары анықталады. Алынған әдістер мен технологияларға сүйене отырып, жұмыста алгебралардың жалпы теориясы тұрғысынан сөйлемдерді есептеудің формальды-тілдік құрылымдары мен дедуктивті құралдарын сипаттау тәжірибесі қолданылады.

Осы тәсілді жүзеге асыру нәтижесінде, атап айтқанда, тұжырымдарды есептеудің барлық формулаларының жиынтығын алгебраның жылу амалдарының жиынтығымен анықтауға болатындығы, канондық түрде осы есептеудің синтаксистік компонентімен байланысты екендігі анықталды. Әрі қарай, осы жолдан кейін барлық жерде тұжырымдарды есептеу ережелерінің белгілі бір аналогтары ұсынылды және оның тұжырымдалған формулаларының жиынтығын көптеген аксиомалардан туындаған осы алгебраның подалгебрасының негізгі жиынтығы ретінде сипаттау ұсынылды.

Кілтті сөздер: логикалық есептеу, мәлімдемелерді есептеу, алгебра, жылу операциясы, формула, аксиома, шығару ережесі, теорема.

In historical terms, the formation of ideas that led to the development of the concept of logical calculus was carried out on the basis of algebraic assumptions that reflect the operational nature of human thinking. Nevertheless, in modern interpretations of the canonical components of the general scheme for defining logical calculus, the algebraic potential of the applied approaches, accumulating the possibilities for further development, remained practically unused.

In this paper, we identify the possibilities and the most natural forms of implementation of the algebraic point of view in the definition of logical calculus and its accompanying concepts and constructions. On the basis of the methods and technologies obtained, the paper attempts to describe

formal language constructions and deductive means of the propositional calculus in terms of the general theory of algebras.

As a result of this approach, it was obtained, in particular, that the set of all formulas of the propositional calculus can be identified with the set of thermal operations of algebra, canonically related to the syntactic component of this calculus. Further, following this path, certain analogs of the rules for the derivation of the propositional calculus were proposed everywhere, and the characterization of the set of its deducible formulas as the main set of the subalgebra of this algebra generated by the set of axioms.

Keywords: logical calculus, propositional calculus, algebra, thermal operation, formula, axiom, inference rule, theorem.

Теруге 19.03.2021 ж. жіберілді. Басуға 29.03.2021 ж. қол қойылды.

Электрондық баспа

7,04 Mb RAM

Шартты баспа табағы 8,0. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.

Компьютерде беттеген А. К. Шукурбаева

Корректор: А. Р. Омарова

Тапсырыс № 3743

Сдано в набор 19.03.2021 г. Подписано в печать 29.03.2021 г.

Электронное издание

7,04 Mb RAM

Усл.печ.л 8,0. Тираж 300 экз. Цена договорная.

Компьютерная верстка А. К. Шукурбаева

Корректор: А. Р. Омарова

Заказ № 3743

«Toraighyrov University» баспасынан басылып шығарылған

«Торайғыров университеті» ҚеАҚ

140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

«Toraighyrov University» баспасы

«Торайғыров университеті» ҚеАҚ

140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

67-36-69

e-mail: kereku@tou.edu.kz

www.vestnik.tou.edu.kz