

Торайғыров университетінің
ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Торайғыров университета

ТОРАЙҒЫРОВ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ

Физика, математика және компьютерлік
ғылымдар сериясы
1997 жылдан бастап шығады



ВЕСТНИК ТОРАЙҒЫРОВ УНИВЕРСИТЕТА

Серия: Физика, математика
и компьютерные науки
Издается с 1997 года

ISSN 2959-068X

№ 2 (2024)
Павлодар

**НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
ТОРАЙГЫРОВ УНИВЕРСИТЕТА**

Серия: Физика, математика и компьютерные науки
выходит 4 раза в год

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о постановке на переучет периодического печатного издания,
информационного агентства и сетевого издания
№ KZ91VPY00046988

выдано

Министерством информации и общественного развития
Республики Казахстан

Тематическая направленность

публикация материалов в области физики, математики,
механики и информатики

Подписной индекс – 76208

<https://doi.org/10.48081/PALS7230>

Бас редакторы – главный редактор

Тлеукинов С. К., *д.ф-м.н., профессор*

Заместитель главного редактора Испулов Н. А., *к.ф-м.н., профессор*

Ответственный секретарь Жумабеков А. Ж., *PhD доктор*

Редакция алкасы – Редакционная коллегия

Esref Adali,	<i>PhD доктор, профессор (Турция);</i>
Abdul Qadir Rahimoon,	<i>PhD доктор, профессор (Пакистан);</i>
Донбаев К. М.,	<i>д.ф-м.н., профессор;</i>
Демкин В. П.,	<i>д.ф-м.н., профессор (Российская Федерация);</i>
Жумадиллаева А. К.,	<i>к.т.н., профессор;</i>
Ибраев Н. Х.,	<i>д.ф-м.н., профессор;</i>
Косов В. Н.,	<i>д.ф-м.н., профессор;</i>
Сенцова С. М.,	<i>д.пед.н., профессор;</i>
Шоканов А. К.,	<i>д.ф-м.н., профессор</i>
Омарова А. Р.,	<i>технический редактор</i>

За достоверность материалов и рекламы ответственность несут авторы и рекламодатели

Редакция оставляет за собой право на отклонение материалов

При использовании материалов журнала ссылка на «Вестник Торайгыров
университета» обязательна

© Торайгыров университет

***Б. Ж. Сағындықов¹, Ж. Бимұрат²**

¹Satbayev University, Қазақстан Республикасы, Алматы қ.;

²Д. А. Қонаев атындағы Тау-кен істері институты,
Қазақстан Республикасы, Алматы қ.

*e-mail: b.sagindykov@satbayev.university

**ҚОС САНДАР АЛГЕБРАСЫ
ЖӘНЕ ҚОЛДАНУ ӘДІСТЕМЕЛЕРІ**

Бұл мақалада қос сандар ұғымы қарастырылады. Қос сандар алгебрасына тән негізгі қасиеттері мен бірқатар көріністері (алгебралық, тригонометриялық, көрсеткіштік және матрицалық) анықталады. Бұл мәліметтер мүмкіндігінше оның геометриялық құрылымын ашуға тікелей байланысты болады. Сонымен қатар комплекс сан мен қос сандар (гиперболалық комплекстік) арасындағы көптеген ұқсастықтар көрсетілді.

Қос сандар гиперболалық сандар жүйесінің ішкі жиыны ретінде қарастырылады. Қос сандар алгебрасы құрылды және нөлдік бөлгіштері анықталды. Нөлдік бөлгіштердің геометриялық және физикалық табиғаты түсіндірілді. Қос айнымалының қос мәнді функцияларын зерттеу мақсатында Эйлер формуласы толықтай қорытылып шығарылды. Қос айнымалы голоморфты (аналитикалық, регуляр) функциялар класы үшін Коши-Риман шарттары анықталды.

Геометриялық тұрғыдан қос сан $2D$ жазықтықта вектор ретінде қарастырылуы мүмкін. Алайда қос санның „нормасы“ нақты сан ретінде анықталмауы да және сондай-ақ нөлге тең болуы да мүмкін. Сондықтан қос сандардың сәйкес векторларының арасында изотропты деп аталатын ортогональ векторлар пайда болады. Одан әрі изотропты базистегі қос сандар алгебрасы мен аналитикалық сұрақтар баяндалады. Мақалада қос сандар алгебрасының теориясы гиперболалық типтегі сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесінің жалпы шешімін табуға қолданылды.

Кілтті сөздер: қос сандар, гиперболалық сандар жүйесі, Эйлер формуласы, Коши-Риман шарттары, голоморфты функция.

Кіріспе

Екі өлшемді векторлық өрістерді зерттеуде комплекс айнымалы функциялар теориясының мазмұнына және оның қолданысына қызықпайтын математикті табу қиын шығар. Фробениус теоремасына байланысты [1] комплекс сандар өрісінің барлық қасиеттерін үш өлшемді кеңістікке түбегейлі көшіру мүмкін емес.

Физикалық эксперименттердің нәтижелерін есептеу үшін негізінен нақты сандар қолданылады [2]. Алайда бұл сандардың базистік элементтері (бірліктері) әртүрлі сандарға негізделген.

Комплекс сандар өрісінің ішінен оны «кеңейтудің» бір нұсқасын М. А. Лаврентьев ұсынды [3]. Бұл нұсқа қос сандар деп аталатын комплекс сандардың гиперболалық аналогтарымен байланысты. Сондай-ақ қос айнымалы қарапайым функциялардың анықтамалары мен қасиеттері қарастырылды.

Қос сандар алгебрасы $\mathbb{R}$ өрістер жұбының тікелей қосындысына бөлінді. Лобачевский жазықтығында қос сандар бағытталған түзулер ретінде қарастырылды [4]. Негізінен қос сандар евклидтік емес Лобачевский геометриясында қолданыс тапты. Лобачевский жазықтығындағы кез келген бағытталған түзуге қайсыбір қос сан сәйкес қойылды [4]. Бұл геометрияда Евклид кеңістігінде нақты түрде кездеспейтін жарық конусы деп аталатын фундаментальды физикалық объект пайда болды. Жарық конусының нүктелері мен векторларына қос сандар алгебрасының нөлдік бөлгіштері табиғи түрде сәйкес келеді [5].

[8] жұмыста студенттерге жоғары деңгейде білім беру мақсатында Евклид геометриясымен қатар қос сандар теориясына негізделген Лоренц геометриясы қарастырылды. XX ғасырдың басында Альберт Эйнштейн Лоренц геометриясына негізделген өзінің арнайы салыстырмалылық теориясын дамытты.

Материалдар мен әдістер

Қос сандарды гиперболалық сандар жүйесінің ішкі жиыны ретінде қарастырайық [6,7]. Қысқаша жалпы комплекс сандар жиынына тоқтала кетейік.

$$z = x + py, \quad p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$$

теңдігі арқылы жалпы комплекс саны берілсін дейік, мұнда θ_0, θ_1 , – басқарушы параметрлер деп аталатын оң бүтін сандар.

Жалпы комплекс санның нормасы

$$\|z\|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2 + \theta_1 x y + \theta_0 y^2 \quad (1)$$

теңдігі арқылы анықталады, мұнда $\bar{z} = x + \theta_1 y - py$ саны бастапқы

$z = x + py$ жалпы комплекс санының түйіндесі.

Анықтама. Егер (1) квадраттық форманың дискриминанты $D = \frac{\theta_1^2}{4} - \theta_0 > 0$ болса, онда $Z = x + py$ түрдегі жалпы комплекс сандар жиыны гиперболалық сандар жүйесін анықтайды.

Анықтама. Егер $\theta_0 = -1$, $\theta_1 = 0$ болса, онда $z = x + jy$, $j^2 = 1$ сандары гиперболалық сандар жүйесінің ішкі жиынын құрайды және олар қос сандар деп аталады, мұнда j – бірлік абстракт элемент.

Ескерту. Қос сандар гиперболалық сандар жүйесінен басқарушы параметрлердің $\theta_0 = -1$, $\theta_1 = 0$ және $p = j$ мәндерінде алынады.

Қос сандардың арифметикасы. Қос сандардың қосу, азайту, көбейту және бөлу амалдары

$$\begin{aligned}(a + jb) + (c + jd) &= (a + c) + j(b + d), \\(a + jb) - (c + jd) &= (a - c) + j(b - d), \\(a + jb) \cdot (c + jd) &= (ac + bd) + j(bc + ad), \\ \frac{a + jb}{c + jd} &= \frac{(a + jb) \cdot (c - jd)}{(c + jd)(c - jd)} = \frac{ac - bd}{c^2 - d^2} + j \frac{bc - ad}{c^2 - d^2}\end{aligned}$$

формулалары бойынша анықталады. Бұл ретте $Z = x + jy$ және $\bar{Z} = x - jy$ қос сандары өзара түйіндес қос сандар деп аталады.

Қос сандардың $Z + \bar{Z} = 2x$ және $Z \cdot \bar{Z} = |Z|^2 = x^2 - y^2$ қосындысы мен көбейтіндісі нақты сандарды береді. Сондай-ақ $Z = \bar{Z}$ теңдігі нақты сандарды, ал $Z = -\bar{Z}$ теңдігі жорамал сандарды сипаттайды.

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{x + jy} = \frac{x - jy}{x^2 - y^2}$$

санын z қос санына кері сан деп атайық. Осыдан $x(1 \pm j)$ түріндегі сандардың кері сандары жоқ екенін көруге болады; әрине олар нөлдік бөлгіштер деп аталады. Демек $|x^2 - y^2| \neq 0$ шарты орындалғанда және тек сонда ғана қос сандарды бөлу мүмкін болады.

Жазықтықта $x + jy$ қос санына координаттары x , y болатын нүктені немесе бірдей координаттары бар векторды сәйкес қоюға болады. $x(1 \pm j)$ сандарына жазықтықты төрт ширекке бөлетін (I, II, III, IV) $x - y = 0$ және $x + y = 0$ түзулерінің қиылысу нүктесі сәйкес келеді.

Анықтама. $Z = x + jy$ қос санының модулі деп ρ оң санын айтамыз және I, III ширектер үшін $\rho = \sqrt{x^2 - y^2}$, ал II, IV ширектер үшін $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. $z = x + jy$ қос санының абсолют шамасын әдеттегідей теңдігі арқылы анықтаймыз. Осылайша қос сандар үшін модуль және абсолютті шама ұғымдары бір мағына бермейді [3].

Анықтама. Қос санның $z = x + jy$, $j^2 = 1$, түрде жазылуы оның алгебралық түрде жазылуы деп аталады.

Енді қос санның тригонометриялық түрде жазылуын қарастырайық. Алдымен қос сандар үшін Эйлер формуласын қорытып шығарамыз.

Эйлер формуласы. Дәрежесінде $z = x + jy$ қос саны тұратын

$$e^z = e^{x+jy} = e^x \cdot e^{jy} = e^x(J(y) + jK(y))$$

экспонентасын қарастырайық, мұнда $J(y)$ және $K(y)$ функциялары әзірге белгісіз функциялар. Сонымен

$$e^{jy} = J(y) + jK(y) \quad (2)$$

(2) теңдіктің екі жағын бірдей тәуелсіз y айнымалысы бойынша дифференциалдайық, сонда $je^{jy} = J'(y) + jK'(y)$

немесе

$$j(J(y) + jK(y)) = J'(y) + jK'(y)$$

түрдегі дифференциалдық теңдеу аламыз. Бұдан $J(y)$ және $K(y)$ функцияларын табу үшін

$$J'(y) = K(y), K'(y) = J(y)$$

түрдегі дифференциалдық теңдеулер жүйесі алынады. Нәтижесінде $J(y)$ және $K(y)$ функцияларын табу үшін $J(0) = 1$, $K(0) = 0$, және $J'(0) = 0$, $K'(0) = 1$ бастапқы шарттарын қанағаттандыратын

$$J''(y) - J(y) = 0, K''(y) - K(y) = 0 \quad (3)$$

біртекті екінші ретті тұрақты коэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесін құрамыз. Одан әрі екі теңдеуге де ортақ жүйенің характеристикалық теңдеуі құрылады:

$$k^2 - 1 = 0, k_{1,2} = \pm 1.$$

Характеристикалық теңдеудің түбірлері нақты және әртүрлі. Демек (3) жүйенің жалпы шешімдері $J(y) = C_1 e^{-y} + C_2 e^y$ және $K(y) = C_3 e^{-y} + C_4 e^y$ түрде табылады.

Бұл теңдіктерден бастапқы шарттарды қанағаттандыратын $J(y)$ және $K(y)$ функциялары $J(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = chy$ және $K(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = shy$

түрде табылады. Демек қос сандар үшін Эйлер формуласы

$$e^{jy} = chy + jshy \quad (4)$$

түрде жазылады. (4) теңдіктен

$$e^{-jy} = chy - jshy$$

теңдігі, ал бұдан гиперболалық функциялар үшін

$$e^{jy} \cdot e^{-jy} = 1 \Rightarrow ch^2 y - sh^2 y = 1$$

тепе-теңдігі алынады.

Қос санның модулі бірмәнді анықталмайды, өйткені

$$|z| = |x + jy| = \pm \sqrt{x^2 - y^2}.$$

Сондықтан қос санның „тригонометриялық түрде“ жазылуы

$$z = |z|(chy + jshy) \text{ немесе } z = |z|(shy + jchy)$$

теңдіктері арқылы анықталады. Мұнда y шамасы z қос санының аргументі деп аталады және $Argz$ арқылы белгіленеді.

Ескерту. Егер қос санның $z = |z|(shy + jchy)$ түрде жазылуындағы аргументін

$$Arg\{|z|(shy + jchy)\} = y - i\frac{\pi}{2}$$

теңдігі арқылы анықтайтын болсақ, онда оны қарапайым комплекс сан деп қарастыруға болады.

Бұл келісім орындалған жағдайда қос санның „тригонометриялық түрде“ жазылуын

$$z = |z|(chy + jshy) \quad (5)$$

теңдігі арқылы, ал оның „көрсеткіштік түрде“ жазылуын

$$z = |z|e^{jy} \quad (6)$$

теңдігі арқылы анықтай аламыз, мұнда y – қос санның аргументі;

$$tg(Argz) = \frac{y}{x}, \quad 0 < |z| < \infty, \quad -\infty < Argz < \infty.$$

(x, y) жазықтығында тең аргументтің сызықтары координаттар бас нүктесінен шығатын түзулер, ал тең модуль сызықтары – асимптоталары $x - y = 0$ және $x + y = 0$ түзулері болатын теңбүйірлі гиперболалар болады.

Кейбір жағдайларда $\frac{1}{1+j} = \omega_1$, $\frac{1}{1-j} = \omega_2$ және $\frac{1}{0} = \infty$ бөлінділерін жаңа сипаттағы сандар деп санау есептеулер үшін ыңғайлы болады. Сонымен бірге енгізілген жаңа сандардың көмегімен қос сан ұғымын одан әрі кеңейту қажеттілігі туындайды. Ол үшін жаңа сандарға қосымша $\alpha\omega_1$, $\alpha\omega_2$ нақты санға көбейту және $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1-j}{1+i} = \beta_1$, $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1+j}{1-j} = \beta_2$ түріндегі бөлінді ережелерін енгіземіз. Бұл ретте $\alpha\omega_1$, $\alpha\omega_2$, ∞ , β_1 және β_2 таңбаларына қатысты әрекет ережелері

$$z + \infty = \infty, \quad z - \infty = \infty, \quad z \cdot \infty = \infty, \quad \frac{\infty}{z} = \infty, \quad \frac{z}{\infty} = 0$$

теңдіктері арқылы анықталады. Сонда

$$\begin{aligned}
 (x + jy) \pm \alpha \omega_1 &= (\pm \alpha) \omega_1, \\
 (x + jy) \cdot \alpha \beta_2 &= (x + y) \alpha \beta_2, \\
 \frac{x+jy}{\alpha \omega_2} &= \frac{x-y}{\alpha} (1 - j), \\
 \frac{\alpha + jb}{\alpha \beta_1} &= \frac{x-y}{\alpha} \beta_2, \\
 x \omega_1 \cdot y \omega_2 &= \infty, \\
 x \omega_1 \cdot y \beta_2 &= x y \omega_2, \\
 x \omega_1 \cdot y \omega_1 &= \frac{xy}{2} \omega_1
 \end{aligned} \tag{7}$$

және т.б. формулалары алынады.

Қос сандарды жазудың (6) көрсеткіштік формасы екі немесе бірнеше қос сандарды көбейту қажет болған жағдайда өте ыңғайлы.

$$z_1 = |z_1| e^{j\varphi_1} \text{ және } z_2 = |z_2| e^{j\varphi_2}$$

қос сандары берілсін дейік. Сонда

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 [ch(\varphi_1 + \varphi_2) + jsh(\varphi_1 + \varphi_2)] \tag{8}$$

немесе

$$r_1(ch\varphi_1 + jsh\varphi_1) r_2(ch\varphi_2 + jsh\varphi_2) = r_2(ch(\varphi_1 + \varphi_2) + jsh(\varphi_1 + \varphi_2))$$

теңдігі алынады, мұнда $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$.

Ереже. Екі қос санның көбейтіндісінің модулі көбейткіштердің модульдерінің көбейтіндісіне тең, ал аргументі олардың аргументтерінің қосындысына тең.

Осындай жолмен қос сандарды бөлу ережесі шығады:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{9}$$

немесе

$$\frac{r_1(ch\varphi_1 + jsh\varphi_1)}{r_2(ch\varphi_2 + jsh\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (ch(\varphi_1 - \varphi_2) + jsh(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

(8) формуланың көмегімен қос сандар үшін Муавр формуласын

$$(r(ch\varphi + jsh\varphi))^n = r^n(cosn\varphi + jsinn\varphi)$$

теңдігі арқылы анықтаймыз.

Егер қос санның „тригонометриялық түрде“ жазылуы

$$z = |z|(sh\varphi + jch\varphi)$$

теңдігі арқылы берілсе, онда

$$(r(sh\varphi + jch\varphi))^n = \begin{cases} r^n(shn\varphi + jchn\varphi), n \text{ тақ болған кезде,} \\ r^n(chn\varphi + jshn\varphi), n \text{ жұп болған кезде} \end{cases}$$

формулалары алынады.

Қос саннан n -ші дәрежелі түбірді қарастыра отырып

$$\sqrt[n]{r(ch\varphi + jsh\varphi)} = \begin{cases} \sqrt[n]{r} \left(ch\frac{\varphi}{n} + jsh\frac{\varphi}{n} \right), n \text{ тақ болған кезде,} \\ \sqrt[n]{r} \left(sh\frac{\varphi}{n} + jch\frac{\varphi}{n} \right), n \text{ жұп болған кезде,} \end{cases}$$

сондай-ақ

$$\sqrt[n]{r(sh\varphi + jch\varphi)} = \begin{cases} \sqrt[n]{r} \left(sh\frac{\varphi}{n} + jch\frac{\varphi}{n} \right), n \text{ тақ болған кезде,} \\ \sqrt[n]{r} \left(ch\frac{\varphi}{n} + jsh\frac{\varphi}{n} \right), n \text{ жұп болған кезде түбір табылмайды} \end{cases}$$

теңдіктері алынады.

Жалпы комплекс айнымалы аналитикалық функциялар теориясы

$z = x + py$, $p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$ жалпы комплекс айнымалы комплекс мәнді функциясы берілсін дейік.

Теорема [6,7]. $z_0 = x_0 + py_0 \in \mathbb{C}$ нүктесінде $f(z)$ функциясының дифференциалданатын болуы үшін $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ нүктесінде оның $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ нақты және $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ жорамал бөліктерінің $\mathbb{R}$ -дифференциалдануы қажетті және жеткілікті. Сонымен қатар Коши-Риман шарттарының, яғни

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \theta_1 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \theta_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

теңдіктерінің орындалуы міндетті.

Анықтама. $D \subset \mathbb{C}$ ашық жиынында анықталған қос айнымалының қос мәнді f функциясы берілсін дейік. Қос айнымалының функциялары үшін Коши-Риман шарттары

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

теңдіктері арқылы анықталады, өйткені қос сандар үшін $\theta_0 = -1, \theta_1 = 0$.

Анықтама. D ашық жиынының әрбір нүктесінде дифференциалданатын және (11) Коши-Риман шарттары орындалатын f функциясын аналитикалық (регуляр, голоморфты) функция деп атаймыз.

Коши теоремасы. Бірбайланысты D облысында бірімәнді анықталатын $f(z)$ функциясы берілсін дейік, мұнда $z = x + jy$, $j^2 = -1$. Сонда осы $f(z)$ функциясынан D облысында толықтай жатқан кез келген γ тұйық контуры бойынша алынған интегралдың мәні нөлге тең.

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} f(z) dz &= \oint_{\gamma} (u + jv)(dx + jdy) = \\ &= \oint_{\gamma} u dx + v dy + j \oint_{\gamma} v dx + u dy. \end{aligned} \quad (12)$$

(12) теңдіктің оң жақ бөлігінде тұрған екінші текті қисық сызықты интегралдарға Грин формуласын қолданамыз. Нәтижесінде

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy = 0.$$

$$\text{Мысал.} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) + by(t), \\ \frac{dy}{dt} = bx(t) + ay(t) \end{cases} \quad (13)$$

түрде берілген бірінші ретті біртекті сызықтық теңдеулер жүйесінің жалпы шешімін табайық, мұнда $a, b \in \mathbb{R}$.

Осы жүйенің жалпы шешімін табу үшін екінші теңдеуді j абстракт элементіне көбейтіп, бірінші теңдеуге мүшелеп қосамыз, мұнда $j^2 = 1$. Сонда $x + jy$ белгісіз функциясына қатысты айнымалылары ажыратылатын

$$\frac{d}{dx}(x + jy) = a(x + jy) + jb(x + jy) = (a + jb)(x + jy)$$

түрдегі теңдеу алынады. Бұл теңдеудің айнымалыларын ажыратып, интегралдайтын болсақ

$$\begin{aligned} x + jy &= (C_1 + jC_2)e^{(a+jb)t} = (C_1 + C_2)e^{at} \cdot e^{jbt} = \\ &= (C_1 + C_2)e^{at}(chbt + jshbt) \end{aligned}$$

теңдігі алынады. Демек (13) жүйенің жалпы шешімі

$$\begin{cases} x(t) = e^t(C_1 chbt + C_2 shbt), \\ y(t) = e^t(C_1 shbt + C_2 chbt) \end{cases} \quad (14)$$

түрде табылады.

Нәтижелер және талқылау

Комплекс сандар бірінші кезекте алгебралық себептермен ашылғанымен, олар жазықтықтағы нүктелерді белгілеу үшін қолданылады. Ғылымның әртүрлі салаларында қолдану арқылы эллиптикалық, гиперболалық және параболалық болып келетін жалпы комплекс сандар теориясы қарқынды дамып келеді. Гиперболалық комплекс сандар гиперболалық кеңістіктерді сипаттауда қолданылады. Алайда мұндай сандар әртүрлі бағдарламалау тілдерінде өте кең тарамаған [9; 10]. Гиперболалық сандар мен комплекс сандарға қолданылатын амалдар бір-біріне ұқсас келеді. Сондықтан комплекс сандарға арналған код негізге алынады. Тек комплекс сандар жиыны ғана өріс құрайды. Қос және дуаль сандар сақина тәрізді құрылымға ие, өйткені олардың құрамында нөлдік бөлгіштері бар.

Қорытынды

Гиперболалық сандар жүйесінің ішкі жиыны болатын қос сандардың алгебрасы құрылды. Қос сандардың алгебралық, көрсеткіштік, тригонометриялық және матрицалық көрсетілімдері анықталды. Қос айнымалының қос мәнді функциялары үшін Коши-Риман шарттары жазылды және аналитикалық функция ұғымы анықталды. Аналитикалық функциялар үшін Коши теоремасы дәлелденді. Соңында қос сандар үшін анықталған Эйлер формуласының көмегімен сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі шешілді.

ПАЙДАЛАНҒАН ДЕРЕКТЕР ТІЗІМІ

- 1 Кантор, И. Л., Солодовников, А. С. Гиперкомплексные числа. – М. : Наука, 1973. – 144 с.
- 2 Свешников, А. Г., Тихонов, А. Н. Теория функций комплексной переменной. – М. : Наука, 1967. – 304 с.
- 3 Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. О. Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М. : Наука, 1977. – 408 с.
- 4 Павлов, Д. Г., Кокарев, С. С. Алгебра, геометрия и физика двойных чисел // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2013. – 1(19). Том 10. – С. 86–161.
- 5 Сазанов, А. А. Четырехмерный мир Минковского. Гл. ред. физ.-мат. лит. – М. : Наука, 1988. – 224 с.
- 6 Сагиндыков, Б. Ж., Бимурат, Ж. Аналитические функции обобщенного комплексного переменного и некоторые приложения. // Естественные и математические науки в современном мире. – 2014. – № 1(13). – С. 7–19.
- 7 Сагиндыков, Б. Ж., Бимурат, Ж. Обобщенная комплексная экспонента и ее применение для отыскания суммы // Естественные и математические науки: вопросы и тенденции развития. – 2013. – С. 7–16.
- 8 Sobczyk, G. The Hyperbolic Number Plane // The College Mathematics Journal. – 1995. – 26(4) – P. 268–280.
- 9 Kulyabov, D. S., Korolkova, A. V., Gevorkyan, M. N. Hyperbolic as Einstein numbers // Journal of Physics : Conference Series. – 2020. – Vol. 1557. – P. 012027.
- 10 Kulyabov, D. S., Korolkova, A. V., Sevastianov, L. A. Complex Numbers for Relativistic Operations // Preprints. – 2021. – P. 2021120094.

REFERENCES

- 1 Kantor, I. L., Solodovnikov, A. S. Giperkompleksny`e chisla [Hypercomplex Numbers]. – Moscow : Nauka, 1973. – 144 p.
- 2 Sveshnikov, A. G., Tixonov, A. N. Teoriya funkciy kompleksnoj peremennoj [Theory of Functions of a Complex Variable]. – Moscow : Nauka, 1967. – 304 p.
- 3 Lavrent`ev, M. A., Shabat, B. O. Problemy` gidrodinamiki i ix matematicheskie modeli [Problems of Hydrodynamics and Their Mathematical Models]. – Moscow : Nauka, 1977. – 408 p.

4 **Pavlov, D. G., Kokarev, S. S.** Algebra, geometriya i fizika dvoyny'x chisel [Algebra, Geometry, and Physics of Dual Numbers] // Giperkompleksny'e chisla v geometrii i fizike. – 2013. – 1(19). – Vol 10. – P. 86–161.

5 **Sazanov, A. A.** Chety'rexmerny'j mir Minkovskogo [The Four-Dimensional World of Minkowski]. – Gl. red. fiz.-mat. lit. Moscow : Nauka, 1988. – 224 p.

6 **Sagindykov, B. Zh., Bimurat, Zh.** Analiticheskie funkicii oboshhennogo kompleksnogo peremennogo i nekotory'e prilozheniya [Analytical Functions of Generalized Complex Variable and Some Applications] // Estestvenny'e i matematicheskie nauki v sovremennom mire. – 2014. – №1(13). – P. 7–19.

7 **Sagindykov, B. Zh., Bimurat, Zh.** Obobshhennaya kompleksnaya e'ksponenta i ee primeneniye dlya oty'skaniya summy' [Generalized Complex Exponent and Its Application for Finding Sums] // Estestvenny'e i matematicheskie nauki: voprosy' i tendencii razvitiya. – 2013. – P. 7–16.

8 **Sobczyk, G.** The Hyperbolic Number Plane // The College Mathematics Journal. – 1995. – 26(4) – P. 268–280.

9 **Kulyabov, D. S., Korolkova, A. V., Gevorkyan, M. N.** Hyperbolic as Einstein numbers // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1557. – P. 012027.

10 **Kulyabov, D. S., Korolkova, A. V., Sevastianov, L. A.** Complex Numbers for Relativistic Operations. // Preprints. – 2021. – P. 2021120094.

09.05.24 ж. баспаға түсті.

10.05.24 ж. түзетулерімен түсті.

19.06.24 ж. басып шығаруға қабылданды.

***Б. Ж. Сагиндыков¹, Ж. Бимурат²**

¹Satbayev University, Республика Казахстан, г. Алматы;

²Институт горного дела имени Д. А. Кунаева,

Республика Казахстан, г. Алматы

Поступило в редакцию 09.05.24.

Поступило с исправлениями 10.05.24.

Принято в печать 19.06.24.

АЛГЕБРА ДВОЙНЫХ ЧИСЕЛ И МЕТОДЫ ПРИМЕНЕНИЯ

В данной статье рассматривается понятие двойных чисел. Определены основные свойства и ряд представлений (алгебраических, тригонометрических, экспоненциальных и матричных), характерных для алгебры двойных чисел. Эти сведения напрямую связаны с максимально возможным раскрытием его геометрической структуры. Кроме того, было

показаны сходства между комплексными числами и двойными числами (гиперболический комплекс). Двойные числа считаются подмножеством гиперболической системы счисления. Была создана алгебра двойных чисел и определены делители нуля. Объяснена геометрическая и физическая природа делителей нуля. Для изучения функций двойных чисел полностью была выведена формула Эйлера. Для класса голоморфных двойных (аналитических, регулярных) функций определены условия Коши-Римана.

Геометрически двойное число можно представить как вектор в двумерной плоскости. Однако «норма» двойного числа не может быть определена как действительное число, а также может быть равна нулю. Поэтому между соответствующими векторами двойных чисел возникают ортогональные векторы, называемые изотропными. Даже излагаются алгебра двойных чисел на изотропном базисе и аналитические вопросы. В статье теория алгебры двойных чисел использована для нахождения общего решения системы линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа.

Ключевые слова: двойные числа, система гиперболических чисел, формула Эйлера, условия Коши-Римана, голоморфная функция.

***B. Sagindykov¹, Zh. Bimurat²**

¹Satbayev University, Republic of Kazakhstan, Almaty;

²Mining Institute named after D. A. Kunaev, Republic of Kazakhstan, Almaty.

Received 09.05.24.

Received in revised form 10.05.24.

Accepted for publication 19.06.24.

ALGEBRA OF DUAL NUMBERS AND ITS APPLICATION METHODS

This article explores the concept of dual numbers. The fundamental properties and various representations (algebraic, trigonometric, exponential, and matrix) characteristic of dual number algebra are defined. These insights are directly linked to the maximal revelation of its geometric structure. Additionally, similarities between complex numbers and dual numbers (hyperbolic complex) are demonstrated. Dual numbers are considered a subset of the hyperbolic number system. The algebra of dual numbers is established, and nilpotent elements are defined. The geometric and physical nature of nilpotent elements is elucidated. The

Euler formula is fully derived for the study of dual number functions. For the class of holomorphic dual (analytic, regular) functions, the Cauchy-Riemann conditions are defined.

Geometrically, a dual number can be represented as a vector in a two-dimensional plane. However, the «norm» of a dual number cannot be defined as a real number and may also be equal to zero. Therefore, orthogonal vectors, called isotropic vectors, arise between corresponding vectors of dual numbers. Subsequently, the algebra of dual numbers on an isotropic basis and analytical issues are discussed. In the article, the theory of dual number algebra is applied to finding the general solution of systems of linear differential equations of hyperbolic type.

Keywords: dual numbers, hyperbolic number system, Euler formula, Cauchy-Riemann conditions, holomorphic function.

Теруге 03.06.2024 ж. жіберілді. Басуға 28.06.2024 ж. қол қойылды.

Электрондық баспа

7,50 Mb RAM

Шартты баспа табағы 10,01. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.

Компьютерде беттеген: Е. Е. Калихан

Корректор: А. Р. Омарова

Тапсырыс № 4247

Сдано в набор 03.06.2024 г. Подписано в печать 28.06.2024 г.

Электронное издание

7,50 Mb RAM

Усл.печ.л. 10,01. Тираж 300 экз. Цена договорная.

Компьютерная верстка Е. Е. Калихан

Корректор: А. Р. Омарова

Заказ № 4247

«Toraighyrov University» баспасынан басылып шығарылған

«Торайгыров университеті» КЕ АҚ

140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

«Toraighyrov University» баспасы

«Торайгыров университеті» КЕ АҚ

140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

+7(718)267-36-69

e-mail: kereku@tou.edu.kz

www.vestnik.tou.edu.kz

<https://vestnik-pm.tou.edu.kz/>