

Торайғыров университетінің
ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Торайғыров университета

ТОРАЙҒЫРОВ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ

Физика-математикалық сериясы
1997 жылдан бастап шығады



ВЕСТНИК ТОРАЙҒЫРОВ УНИВЕРСИТЕТА

Физико-математическая серия
Издается с 1997 года

ISSN 2710-3536

№ 4 (2021)
Павлодар

**НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
ТОРАЙГЫРОВ УНИВЕРСИТЕТА**

Физико-математическая серия

выходит 4 раза в год

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о постановке на переучет периодического печатного издания,
информационного агентства и сетевого издания

№ KZ95VPY00029553

выдано

Министерством информации и общественного развития
Республики Казахстан

Тематическая направленность

публикация материалов в области физики, математики,
механики и информатики

Подписной индекс – 76135

<https://doi.org/10.48081/NRCI9832>

Бас редакторы – главный редактор

Тлеукенов С. К.

доктор ф.-м.н., профессор

Заместитель главного редактора

Кумеков С. Е., *к.ф.-м.н., доцент*

Ответственный секретарь

Талипов О. М., *доктор PhD*

Редакция алқасы – Редакционная коллегия

Оспанов К. Н.,

д.ф.-м.н., профессор

Кутербекоев К. А.,

д.ф.-м.н., профессор

Ибраев Н. Х.,

д.ф.-м.н.

Ткаченко И. М.,

д.ф.-м.н., профессор (Испания)

Демкин В. П.,

д.ф.-м.н., профессор (Россия)

Qadir Abdul

доктор PhD, профессор (Пакистан)

Lobiya D. K.

доктор PhD, профессор (Индия)

Лапчик М. П.

д.пед.н., профессор (Россия)

Шокубаева З. Ж.,

технический редактор

За достоверность материалов и рекламы ответственность несут авторы и рекламодатели

Редакция оставляет за собой право на отклонение материалов

При использовании материалов журнала ссылка на «Вестник Торайгыров университета» обязательна

МРНТИ 27.29.17; 27.29.25; 27.33.19

<https://doi.org/10.48081/OKOQ1127>

***Э. А. Бакирова^{1,2}, Ж. М. Кадирбаева^{1,3}, А. Б. Касымова²**

¹Институт математики и математического моделирования,
Республика Казахстан, г. Алматы;

²Казахский национальный женский педагогический университет,
Республика Казахстан, г. Алматы;

³Международный университет информационных технологий,
Республика Казахстан, г. Алматы

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МНОГОТОЧЕЧНЫМ УСЛОВИЕМ

В настоящей работе исследуется линейная краевая задача с параметром для обыкновенного дифференциального уравнения с многоточечным условием. На основе метода параметризации Джумабаева и численных методов разработан численный метод решения линейной краевой задачи с параметром для обыкновенного дифференциального уравнения с многоточечным условием и предложены алгоритмы их реализации. Разбиением интервала и введением дополнительных параметров линейная краевая задача с параметром для обыкновенных дифференциальных уравнений с многоточечным условием сводится к эквивалентной краевой задаче с параметром. Эквивалентная краевая задача с параметрами состоит из задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами, многоточечного условия и условия склеивания. Решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами строится с помощью фундаментальной матрицы дифференциального уравнения. Подставляя значения в соответствующих точках построенного решения в многоточечное условие и условие склеивания, составляется система линейных алгебраических уравнений относительно параметров. Предложен

численный метод решения рассматриваемой задачи, основанный на решении построенной системы линейных алгебраических уравнений относительно параметров и метода Булирша-Штёра для решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на подинтервалах.

Ключевые слова: краевая задача, дифференциальное уравнение, задача управления, многоточечное условие, метод параметризации.

Введение

Краевые задачи с параметрами для системы обыкновенных дифференциальных уравнений интенсивно исследуются в последние годы. Вопросы существования, единственности и устойчивости решения задач с параметрами очень важны для разработки численных методов идентификации параметров математических моделей, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с многоточечным условием. Для решения этих классов задач управления, были использованы различные методы [1–12]. Несмотря на это, вопросы нахождения эффективных признаков однозначной разрешимости и построения численных алгоритмов нахождения оптимальных решений задач управления для систем обыкновенных дифференциальных уравнений все еще остаются открытыми. Одним из конструктивных методов исследования и решения краевых задач с параметрами для системы обыкновенных дифференциальных уравнений является метод параметризации Джумабаева [13].

В настоящей работе исследуется линейная краевая задача с параметром для обыкновенного дифференциального уравнения с многоточечным условием. На основе метода параметризации Джумабаева и численных методов разработан численный метод решения рассматриваемой задачи и предложены алгоритмы их реализации.

На отрезке $[O, T]$ рассматривается линейная краевая задача с параметром для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с многоточечным условием вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)\mu + f(t), \quad x \in R^n, \quad \mu \in R^m, \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^{N+1} C_i x(t_i) + D\mu = d, \quad d \in R^{n+m}, \quad (2)$$

где $(n \times n)$ – матрица $A(t)$, $(n \times m)$ – матрица $B(t)$ и n – вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0, T]$; C_i , $i = \overline{0, N+1}$, – постоянные матрицы размерности $((n+m) \times n)$, D – постоянная матрица размерности $((n+m) \times m)$; $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} = T$.

Решением задачи (1), (2) является пара $(x^*(t), \mu^*)$, где непрерывная на $[0, T]$ и непрерывно дифференцируемая на $(0, T)$ вектор-функция $x^*(t)$ удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений (1) и условию (2) при $\mu = \mu^*$.

Материалы и методы

Для решения задачи с параметром (1), (2) используется подход, разработанный в [14–18], основанный на алгоритмах метода параметризации и численных методах решения задач Коши.

Приведем схему метода параметризации Джумабаева. Интервал $[0, T]$ разбивается на N подынтервалы следующими точками:

$$[0, T] = \bigcup_{r=1}^{N+1} [t_{r-1}, t_r).$$

Пусть $C([0, T], R^n)$ – пространство непрерывных на $[0, T]$ функций $x: [0, T] \rightarrow R^n$ с нормой $\|x\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$; $C([0, T], \Delta_N, R^{n(N+1)})$ – пространство систем функций $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{N+1}(t))$, где $x_r: [t_{r-1}, t_r) \rightarrow R^n$ непрерывны на $[t_{r-1}, t_r)$ имеют конечный левосторонний предел $\lim_{t \rightarrow t_r-0} x_r(t)$ для всех $r = \overline{1, N+1}$, с нормой $\|x[\cdot]\|_2 = \max_{r=\overline{1, N+1}} \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|x_r(t)\|$.

Сужение функции $x(t)$ на $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N+1}$, обозначим через $x_r(t)$, т.е. $x_r(t) = x(t)$ для всех $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N+1}$. Тогда задача (1), (2) перейдет к эквивалентной задаче:

$$\frac{d\bar{x}_r}{dt} = A(t)x_r + B(t)\mu + f(t), t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N+1}, \quad (3)$$

$$\sum_{i=0}^N C_i x_{i+1}(t_i) + C_{N+1} \lim_{t \rightarrow T-0} x_{N+1}(t) + D\mu = d, \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_s-0} x_s(t) = x_{s+1}(t_s), \quad s = \overline{1, N}, \quad (5)$$

где (5) являются условиями непрерывности на внутренних точках разбиения отрезка $[0, T]$.

Решением задачи (3) – (5) является пара $(x^*[t], \mu^*)$ с элементами $x^*[t] = (x_1^*(t), x_2^*(t), \dots, x_{N+1}^*(t)) \in C([0, T], \Delta_N, R^{n(N+1)})$, $\mu^* \in R^m$,

где функции $x_r^*(t), r = \overline{1, N+1}$, непрерывно дифференцируемы на $[t_{r-1}, t_r)$, удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (3), условию (4) с $\mu = \mu^*$ и условиям непрерывности (5).

Введем дополнительные параметры $\lambda_r = x_r(t_{r-1}), r = \overline{1, N+1}$, $\lambda_{N+2} = \mu$. И на каждом интервале $[t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N+1}$, произведем замену функции $x_r(t) = u_r(t) + \lambda_r, r = \overline{1, N+1}$. Тогда переходим к эквивалентной краевой задаче с параметрами:

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)[u_r + \lambda_r] + B(t)\lambda_{N+2} + f(t),$$

$$t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N+1}, \quad (6)$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, r = \overline{1, N+1}, \quad (7)$$

$$\sum_{i=0}^N C_i \lambda_{i+1} + C_{N+1} \lambda_{N+1} + C_{N+1} \lim_{t \rightarrow T-0} u_{N+1}(t) + D \lambda_{N+2} = d, \quad (8)$$

$$\lambda_s + \lim_{t \rightarrow t_s-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = \overline{1, N}. \quad (9)$$

Пара $(u^*[t], \lambda^*)$ с элементами $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_{N+1}^*(t)) \in C([0, T], \Delta_N, R^{n(N+1)})$, $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_{N+1}^*, \lambda_{N+2}^*) \in R^{n(N+1)+m}$ называется решением задачи (6)–(9) если функции $u_r^*(t), r = \overline{1, N+1}$ непрерывно дифференцируемы на $[t_{r-1}, t_r)$ и при $\lambda_j = \lambda_j^*, j = \overline{1, N+2}$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (6) и условиям (7)–(9).

Задачи (1), (2) и (6)–(9) эквивалентны. Если пара $(x^*(t), \mu^*)$ является решением задачи (1), (2), тогда пара $(u^*[t], \lambda^*)$ с элементами $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_{N+1}^*(t)) \in C([0, T], \Delta_N, R^{n(N+1)})$, $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_{N+1}^*, \lambda_{N+2}^*) \in R^{n(N+1)+m}$, где $\lambda_r^* = x_r^*(t_{r-1}), u_r^*(t) = x_r^*(t) + x_r^*(t_{r-1}), t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N+1}, \lambda_{N+2}^* = \mu^* \in R^m$ будет решением задачи (3)–(6). И наоборот, если пара $(\tilde{u}[t], \tilde{\lambda})$ с элементами $\tilde{u}[t] = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \dots, \tilde{u}_{N+1}(t)) \in C([0, T], \Delta_N, R^{n(N+1)})$, $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{N+2}) \in R^{n(N+1)+m}$, – решение задачи (3)–(6), тогда пара $(\tilde{x}(t), \tilde{\mu})$ определяемая равенствами $\tilde{x}(t) = u_r(t) + \tilde{\lambda}_r, t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N+1}, \tilde{x}(T) = \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{u}_N(t) + \tilde{\lambda}_N$ and $\tilde{\mu} = \tilde{\lambda}_{N+2}$, будет решением исходной задачи (1), (2).

Пусть $X_r(t)$ – фундаментальная матрица дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ на $[t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N+1}$. Тогда решение задачи Коши (6), (7) можно записать в виде

$$u_r(t) = X_r(t) \int_{t_{r-1}}^t X_r^{-1}(\tau) A(\tau) d\tau \lambda_r + X_r(t) \int_{t_{r-1}}^t X_r^{-1}(\tau) B(\tau) d\tau \lambda_{N+2} + \\ + X_r(t) \int_{t_{r-1}}^t X_r^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau, t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N+1}. \quad (10)$$

Подставив правую часть (10) в условия (8), (9) при соответствующих предельных значениях, получим следующую систему алгебраических уравнений относительно параметров λ_r , $r = \overline{1, N+2}$:

$$\sum_{i=0}^N C_i \lambda_{i+1} + C_{N+1} \left[I + X_{N+1}(T) \int_{t_N}^T X_{N+1}^{-1}(\tau) A(\tau) d\tau \right] \lambda_{N+1} + D \lambda_{N+2} + \\ + C_{N+1} X_{N+1}(T) \int_{t_N}^T X_{N+1}^{-1}(\tau) B(\tau) d\tau \lambda_{N+2} = \\ = d - C_{N+1} X_{N+1}(T) \int_{t_N}^T X_{N+1}^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau, \quad (11)$$

$$\lambda_s + X_s(t_s) \int_{t_{s-1}}^{t_s} X_s^{-1}(\tau) A(\tau) d\tau \lambda_s + X_s(t_s) \int_{t_{s-1}}^{t_s} X_s^{-1}(\tau) B(\tau) d\tau \lambda_{N+2} - \\ - \lambda_{s+1} = -X_s(t_s) \int_{t_{s-1}}^{t_s} X_s^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau, \quad s = \overline{1, N}. \quad (12)$$

Обозначив через $Q_*(\Delta_N)$ матрицу, соответствующую левой части системы (11), (12) и составленную из коэффициентов при параметрах λ_r , $r = \overline{1, N+2}$, а также введя вектор

$$F_*(\Delta_N) = \left(-d + C_{N+1} X_{N+1}(T) \int_{t_N}^T X_{N+1}^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau, \right.$$

$$\left. X_1(t_1) \int_{t_0}^{t_1} X_1^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau, \dots, X_N(t_N) \int_{t_{N-1}}^{t_N} X_N^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau \right),$$

запишем систему (11), (12) в виде

$$Q_*(\Delta_N) \lambda = -F_*(\Delta_N), \quad \lambda \in R^{n(N+1)+m}. \quad (13)$$

Нетрудно установить, что разрешимость краевой задачи (1), (2) эквивалентна разрешимости системы (13). Решением системы (13) является вектор $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_{N+1}^*, \lambda_{N+2}^*) \in R^{n(N+1)+m}$ состоит из значений решений исходной задачи (1), (2) в начальных точках подинтервалов, т.е. $\lambda_r^* = x^*(t_{r-1})$, $r = \overline{1, N+1}$, $\lambda_{N+2}^* = \mu^*$.

Далее мы рассмотрим задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений на подинтервалах

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + P(t),$$

$$z(t_{r-1}) = 0, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1, N+1}, \quad (14)$$

где $P(t)$ – либо $(n \times n)$ матрица, либо вектор, оба непрерывные на $[t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1, N+1}$. Следовательно, решение задачи (14) представляет собой квадратную матрицу или вектор размерности n . Обозначим через $a_r(P, t)$ решение задачи Коши (14). Очевидно, что

$$a_r(P, t) = X_r(t) \int_{t_{r-1}}^t X_r^{-1}(\tau) P(\tau) d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r],$$

где $X_r(t)$ – фундаментальная матрица дифференциального уравнения (14) на r -ом интервале.

Результаты и обсуждение

Мы предлагаем следующую численную реализацию алгоритма, основанного на методе Булирша-Штёра.

1. Предположим, у нас есть разбиение $\Delta_N: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} = T$. Разделите каждый r -й интервал $[t_{r-1}, t_r]$, $r = \overline{1, N+1}$, на N_r частей с шагом $h_r = (t_r - t_{r-1})/N_r$. Предположим, что на каждом интервале $[t_{r-1}, t_r]$ переменная $\hat{t}$ принимает дискретные значения: $\hat{t} = t_{r-1}, \hat{t} = t_{r-1} + h_r, \dots, \hat{t} = t_{r-1} + (N_r - 1)h_r, \hat{t} = t_r$, и обозначим через $\{t_{r-1}, t_r\}$ множество таких точек.

2. Решить следующие задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Булирша-Штёра

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + A(t), \quad z(t_{r-1}) = 0, \quad t \in [t_{r-1}, t_r],$$

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + B(t), \quad z(t_{r-1}) = 0, \quad t \in [t_{r-1}, t_r],$$

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t), \quad z(t_{r-1}) = 0, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1, N+1},$$

тогда находятся значения $(n \times n)$ матриц $a_r(A, \hat{t}), a_r(B, \hat{t})$ и вектор $a_r(f, \hat{t})$ на $\{t_{r-1}, t_r\}$, $r = \overline{1, N+1}$.

Построить систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров

$$Q_*^{\tilde{h}}(\Delta_N)\lambda = -F_*^{\tilde{h}}(\Delta_N), \quad \lambda \in R^{n(N+1)+m}. \quad (15)$$

Решая систему (15), находим $\lambda^{\tilde{h}}$. Как отмечено выше, элементы $\lambda^{\tilde{h}} = (\lambda_1^{\tilde{h}}, \lambda_2^{\tilde{h}}, \dots, \lambda_{N+2}^{\tilde{h}})$ являются значениями приближенного решения задачи (1), (2) в начальных точках подинтервалов: $x^{\tilde{h}_r}(t_{r-1}) = \lambda_r^{\tilde{h}}$, $r = \overline{1, N+1}, \mu^* = \lambda_{N+2}^*$.

4. Чтобы определить значения приближенного решения в оставшихся точках множества $\{t_{r-1}, t_r\}$, нужно решить задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)\lambda_{N+2}^{\tilde{h}} + f(t),$$

$$x(t_{r-1}) = \lambda_r^{\tilde{h}}, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1, N+1}.$$

А решения задач Коши можно найти методом Булирша-Штёра. Таким образом, алгоритм позволяет найти численное решение задачи (1), (2).

Чтобы проиллюстрировать предложенный подход для численного решения линейной краевой задачи с параметром для обыкновенного дифференциального уравнения с многоточечным условием (1), (2) на основе метода параметризации Джумабаева, рассмотрим следующий пример.

Пример. На отрезке $[0,1]$ рассматривается линейная краевая задача с параметром для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с многоточечным условием

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)\mu + f(t), \quad x \in R^2, \quad \mu \in R^3, \quad t \in (0,1), \quad (16)$$

$$\sum_{i=0}^4 C_i x(t_i) + D\mu = d, \quad d \in R^5. \quad (17)$$

$$\text{Here } t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{4}, t_2 = \frac{1}{2}, t_3 = \frac{3}{4}, t_4 = 1,$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} t^2 & e^t \\ 2 & t+1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) & 5t & t^2-3 \\ t^4 & 0 & 2t \end{pmatrix},$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 3 \\ 1 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 3 & 0 \\ 8 & -6 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \\ 11 & 0 \\ 4 & 6 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 6 & 13 \\ 4 & 7 \\ -5 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 5 & 3 \\ 8 & 1 \\ 2 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 0 & 7 & -6 \\ -2 & 1 & 8 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} \frac{4485}{64} \\ \frac{15369}{64} \\ \frac{17485}{64} \\ \frac{713}{16} \\ \frac{8563}{64} \end{pmatrix},$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} 15t^2 - 2e^t - 4\sin(t) - 5t^3e^t - 28t - 5t^3 - t^4 - 40 \\ 13t^2 - 5t^3 - 9t^4 + 18t - 2 \end{pmatrix}.$$

Мы используем численную реализацию предложенного алгоритма. Мы предоставляем результаты численной реализации алгоритма путем разбиения подинтервалов $[0, 0,25]$, $[0,25, 0,5]$, $[0,5, 0,75]$, $[0,75, 1]$ с шагом $h = 0,025$.

Решая систему уравнений (15), получаем численные значения параметров

$$\lambda_1^{\tilde{h}} = \begin{pmatrix} -0.0000000074 \\ 2.0000000097 \end{pmatrix}, \lambda_2^{\tilde{h}} = \begin{pmatrix} 1.3124999962 \\ 2.0781250094 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3^{\tilde{h}} = \begin{pmatrix} 2.7499999981 \\ 2.6250000085 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4^{\tilde{h}} = \begin{pmatrix} 4.3124999983 \\ 4.1093750063 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5^{\tilde{h}} = \tilde{\mu} = \begin{pmatrix} 3.9999999981 \\ 5.9999999994 \\ -15.0000000023 \end{pmatrix}.$$

Численные решения в других точках подынтервалов находим методом Булирша-Штёра решая следующие задачи Коши

$$\frac{d\tilde{x}_r}{dt} = A(t)\tilde{x}_r + B(t)\lambda_5^{\tilde{h}} + f(t),$$

$$x(t_{r-1}) = \lambda_r^{\tilde{h}}, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = 1:4.$$

Точным решением задачи (16), (17) является пара $(x^*(t), \mu^*)$, где

$$x^*(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 5t \\ 5t^3 + 2 \end{pmatrix}, \mu^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

Для разности соответствующих значений точных и построенных решений задачи справедлива следующая оценка:

$$\max_{j=\overline{0,40}} \|x^*(t_j) - \tilde{x}(t_j)\| < 2 \cdot 10^{-8}, \text{ and } \|\mu^* - \tilde{\mu}\| < 2 \cdot 10^{-8}.$$

Выводы

Таким образом, в данной работе на основе метода параметризации Джумабаева и численных методов разработан численный метод решения линейной краевой задачи с параметром для обыкновенных дифференциальных уравнений с многоточечным условием и предложен алгоритм их реализации. Предложенный численный метод решения рассматриваемой задачи, основан на решении построенной системы

линейных алгебраических уравнений относительно параметров и метода Булирша-Штёра для решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на подинтервалах. А также рассмотрен пример иллюстрирующий численную реализацию решения линейной краевой задачи с параметром для обыкновенного дифференциального уравнения с многоточечным условием.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 **Кигурадзе, И. Т.** Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. достиж., 1987. – Т. 30. – С. 3–103.
- 2 **Ronto, M., Samoilenko, A. M.** Numerical analytic methods in the theory of boundary-value problems. – World Scientific, River Edge, 2000.
- 3 **Boichuk, A. A., Samoilenko, A. M.** Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – VSP, 2004.
- 4 **Brunner, H.** Collocation methods for Volterra integral and related functional equations. – Cambridge University Press, 2004.
- 5 **Wazwaz, A. M.** Linear and Nonlinear Integral Equations : Methods and Applications. – Higher Equation Press, 2011.
- 6 **Loreti, P., Sforza, D.** Control problems for weakly coupled systems with memory. In J. of Diff. Equat., 2014. – Vol. 257. – P. 1879–1938.
- 7 **Dzhumabaev, D. S., Bakirova, E. A., Kadirbayeva, Zh. M.** An algorithm for solving a control problem for a differential equation with a parameter. In News of the NAS RK. Phys.-Math. Series. – 2018. – Vol. 5. – № 321. – P. 25–32.
- 8 **Assanova, A. T., Bakirova, E. A., Kadirbayeva, Zh. M.** Numerical implementation of solving a boundary value problem for a system of loaded differential equations with parameter. In News of the NAS RK. Phys.-Math. Series. 2019. – Vol. 3. – № 325. – P. 77–84.
- 9 **Assanova, A. T., Bakirova, E. A., Kadirbayeva, Zh. M.** Numerically approximate method for solving of a control problem for integro-differential equations of parabolic type. In News of the NAS RK. Phys.-Math. Series. 2019. – Vol. 6. – № 328. – P. 14–24.
- 10 **Assanova, A. T., Bakirova, E. A., Kadirbayeva, Zh. M.** Numerical solution of a control problem for ordinary differential equations with multipoint integral condition. In International Journal of Mathematics and Physics. – 2019. – Vol. 10. – № 2. – P. 4–10.
- 11 **Assanova, A. T., Bakirova, E. A., Kadirbayeva, Zh. M.** Numerical solution to a control problem for integro-differential equations. In Computational mathematics and mathematical physics. – 2020. – Vol. 60. – № 2. – P. 203–221.

12 Assanova, A. T., Bakirova, E. A., Kadirbayeva, Zh. M., Uteshova, R. E. A computational method for solving a problem with parameter for linear systems of integro-differential equations. In Computational and Applied Mathematics. – 2020. – Vol. 39. – №3. – Article number: 248.

13 Dzhumabaev, D. S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. USSR Comput. Math. Math. Phys. – 1989. – Vol. 29. – № 1. – P. 34–46.

14 Dzhumabaev, D. S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations. In Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2016. – Vol. 294. – P. 342–357.

15 Dzhumabaev, D. S. Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations. In Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2018. – Vol. 41. – № 4. – P. 1439–1462.

16 Dzhumabaev, D. S. Well-posedness of nonlocal boundary value problem for a system of loaded hyperbolic equations and an algorithm for finding its solution. In Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2018. – Vol. 461. – № 1. – P. 817–836.

17 Dzhumabaev, D. S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems. In Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2018. – Vol. 327. – № 1. – P. 79–108.

18 Kadirbayeva, Zh. M. On the method for solving linear boundary-value problem for the system of loaded differential equations with multipoint integral condition. In Mathematical Journal. – 2017. – Vol. 17. – № 4. – P. 50–61.

REFERENCES

1 Kiguradze, I. T. Kraevye zadachi dlya system obiknovennykh differentsial'nykh uravneniy [Boundary value problems for systems of ordinary differential equations]. In Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. probl. mat. Nov. dostizh., 1987. – T.3 0. – P. 3–103.

2 Ronto, M., Samoilenko, A. M. Numerical analytic methods in the theory of boundary-value problems. – World Scientific, River Edge, 2000.

3 Boichuk, A. A., Samoilenko, A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – VSP, 2004.

4 Brunner, H. Collocation methods for Volterra integral and related functional equations. – Cambridge University Press, 2004.

5 Wazwaz, A. M. Linear and Nonlinear Integral Equations : Methods and Applications. – Higher Equation Press, 2011.

6 **Loreti, P., Sforza, D.** Control problems for weakly coupled systems with memory. In *J. of Diff. Equat.*, 2014. – Vol. 257. – P. 1879–1938.

7 **Dzhumabaev, D. S., Bakirova, E. A., Kadirbayeva, Zh. M.** An algorithm for solving a control problem for a differential equation with a parameter. In *News of the NAS RK. Phys.-Math. Series.* – 2018. – Vol. 5. – № 321. – P. 25–32.

8 **Assanova, A. T., Bakirova, E. A., Kadirbayeva, Zh. M.** Numerical implementation of solving a boundary value problem for a system of loaded differential equations with parameter. In *News of the NAS RK. Phys.-Math. Series.* – 2019. – Vol. 3. – № 325. – P. 77–84.

9 **Assanova, A. T., Bakirova, E. A., Kadirbayeva, Zh. M.** Numerically approximate method for solving of a control problem for integro-differential equations of parabolic type. In *News of the NAS RK. Phys.-Math. Series.* – 2019. – Vol. 6. – № 328. – P. 14–24.

10 **Assanova, A. T., Bakirova, E. A., Kadirbayeva, Zh. M.** Numerical solution of a control problem for ordinary differential equations with multipoint integral condition. In *International Journal of Mathematics and Physics.* – 2019. – Vol. 10. – № 2. – P. 4–10.

11 **Assanova, A. T., Bakirova, E. A., Kadirbayeva, Zh. M.** Numerical solution to a control problem for integro-differential equations. In *Computational mathematics and mathematical physics.* – 2020. – Vol. 60. – № 2. – P. 203–221.

12 **Assanova, A. T., Bakirova, E. A., Kadirbayeva, Zh. M., Uteshova, R. E.** A computational method for solving a problem with parameter for linear systems of integro-differential equations. In *Computational and Applied Mathematics.* – 2020. – Vol. 39. – № 3. – Article number: 248.

13 **Dzhumabaev, D. S.** Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. In *USSR Comput. Math. Math. Phys.* – 1989. – Vol. 29. – № 1. – P. 34–46.

14 **Dzhumabaev, D. S.** On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations. In *Journal of Computational and Applied Mathematics.* – 2016. – Vol. 294. – P. 342–357.

15 **Dzhumabaev, D. S.** Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations. In *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* – 2018. – Vol. 41. – № 4. – P. 1439–1462.

16 **Dzhumabaev, D. S.** Well-posedness of nonlocal boundary value problem for a system of loaded hyperbolic equations and an algorithm for finding its solution. In *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* – 2018. – Vol. 461. – № 1. – P. 817–836.

17 **Dzhumabaev, D. S.** New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value

18 **Kadirbayeva, Zh. M.** On the method for solving linear boundary-value problem for the system of loaded differential equations with multipoint integral condition. In Mathematical Journal. – 2017. – Vol. 17. – № 4. – P. 50–61.

Материал поступил в редакцию 20.12.21.

*Э. А. Бакирова^{1,2}, Ж. М. Кадирбаева^{1,3}, А. Б. Касымова²

¹Математика және математикалық моделдеу институты,
Қазақстан Республикасы, Алматы қ.

²Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті,
Қазақстан Республикасы, Алматы қ.

³Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті,
Қазақстан Республикасы, Алматы қ.

Материал 20.12.21 баспаға түсті.

КӨП НҮКТЕЛІ ШАРТЫ БАР ЖӘЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН БАСҚАРУ ЕСЕПТЕРІН САНДЫҚ ШЕШУ ТУРАЛЫ

Бұл жұмыста көп нүктелі шарты бар жәй дифференциалдық теңдеу үшін параметрі бар сызықтық шеттік есеп зерттеледі. Джумабаев параметрлеу әдісі мен сандық әдістер негізінде көп нүктелі шарты бар жәй дифференциалдық теңдеу үшін параметрі бар сызықтық шеттік есепті шешудің сандық әдісі жасалады және оларды жүзеге асыру алгоритмдері ұсынылады. Аралықты бөлу және қосымша параметрлерді енгізу арқылы көп нүктелі шарты бар жәй дифференциалдық теңдеу үшін параметрі бар сызықтық шеттік есеп параметрі бар эквивалентті шеттік есепке келтіріледі. Параметрлері бар эквивалентті шеттік есеп параметрлері бар жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебінен, көп нүктелі шартынан және байланыс шарттарынан тұрады. Параметрлері бар жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебінің шешімі дифференциалдық теңдеудің фундаменталды матрицасын қолдана отырып құрылады. Құрылған шешімнің тиісті нүктелеріндегі мәндерді көп нүктелі шартқа және байланыстыру шарттарына қоя отырып, параметрлерге қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі жасалады. Қарастырып отырған есепті шешудің ішкі интервалдардағы жәй дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебін шешуге арналған Булири-Штер әдісіне және параметрлерге қатысты

құрылған сызықтық алгебралық теңдеулердің жүйесін шешуге негізделген сандық әдісі ұсынылған.

Кілтті сөздер: шеттік есеп, дифференциалдық теңдеу, басқару есебі, көп нүктелі шарт, параметрлеу әдісі.

*E. A. Bakirova^{1,2}, Zh. M. Kadirbayeva^{1,3}, A. B. Kasymova²

¹Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,
Republic of Kazakhstan, Almaty;

²Kazakh National Women's Teacher Training University,
Republic of Kazakhstan, Almaty;

³International Information Technology University,
Republic of Kazakhstan, Almaty.

Material received on 20.12.21.

NUMERICAL SOLUTION OF THE CONTROL PROBLEM FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MULTIPOINT CONDITION

In this paper, we study a linear boundary value problem with a parameter for an ordinary differential equation with a multipoint condition. A numerical method for solving the considering problem is developed on the basis of the Dzhumabaev parameterization method and numerical methods, and algorithms for their implementation are proposed. By splitting the interval and introducing additional parameters, a linear boundary value problem with a parameter for ordinary differential equations with a multipoint condition is reduced to an equivalent boundary value problem with a parameter. An equivalent boundary value problem with parameters consists of the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations with parameters, a multipoint condition, and a gluing condition. The solution to the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations with parameters is constructed using the fundamental matrix of the differential equation. Substituting the values at the corresponding points of the constructed solution into the multipoint condition and the gluing condition, a system of linear algebraic equations with respect to the parameters is compiled. A numerical method is proposed for solving the considering problem, based on solving the constructed system of linear algebraic equations with respect to parameters and the Bulirsch-Stör method for solving the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations on subintervals.

Keywords: boundary value problem, differential equation, control problem, multi-point condition, parameterization method.

Теруге 20.12.2021 ж. жіберілді. Басуға 30.12.2022 ж. қол қойылды.

Электрондық баспа

1,85 Mb RAM

Шартты баспа табағы 6,16. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.

Компьютерде беттеген З. С. Исакова

Корректор: А. Р. Омарова

Тапсырыс № 3872

Сдано в набор 20.12.2021 г. Подписано в печать 30.12.2022 г.

Электронное издание

1,85 Mb RAM

Усл.печ.л. 6,16. Тираж 300 экз. Цена договорная.

Компьютерная верстка З. С. Исакова

Корректор: А. Р. Омарова

Заказ № 3872

«Toraighyrov University» баспасынан басылып шығарылған

«Торайғыров университеті» КЕ АҚ

140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

«Toraighyrov University» баспасы

«Торайғыров университеті» КЕ АҚ

140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

67-36-69

e-mail: kereku@tou.edu.kz

www.vestnik.tou.edu.kz