

Торайғыров университетінің
ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Торайғыров университета

ТОРАЙҒЫРОВ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ

Физика, математика және компьютерлік
ғылымдар сериясы
1997 жылдан бастап шығады



ВЕСТНИК ТОРАЙҒЫРОВ УНИВЕРСИТЕТА

Серия: Физика, математика
и компьютерные науки
Издается с 1997 года

ISSN 2959-068X

№ 2 (2023)
Павлодар

**НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
ТОРАЙГЫРОВ УНИВЕРСИТЕТА**

Серия: Физика, математика и компьютерные науки
выходит 4 раза в год

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о постановке на переучет периодического печатного издания,
информационного агентства и сетевого издания
№ KZ91VPY00046988

выдано

Министерством информации и общественного развития
Республики Казахстан

Тематическая направленность

публикация материалов в области физики, математики,
механики и информатики

Подписной индекс – 76208

<https://doi.org/10.48081/GGBG9646>

Бас редакторы – главный редактор

Тлеукинов С. К., *д.ф.-м.н., профессор*

Заместитель главного редактора Искулов Н. А., *к.ф.-м.н., профессор*

Ответственный секретарь Жумабеков А. Ж., *PhD доктор*

Редакция алкасы – Редакционная коллегия

Esref Adali,	<i>PhD доктор, профессор (Турция);</i>
Abdul Qadir Rahimoon,	<i>PhD доктор, профессор (Пакистан);</i>
Донбаев К. М.,	<i>д.ф.-м.н., профессор;</i>
Демкин В. П.,	<i>д.ф.-м.н., профессор (Российская Федерация);</i>
Жумадиллаева А. К.,	<i>к.т.н., профессор;</i>
Ибраев Н. Х.,	<i>д.ф.-м.н., профессор;</i>
Косов В. Н.,	<i>д.ф.-м.н., профессор;</i>
Сенцова С. М.,	<i>д.пед.н., профессор;</i>
Шоканов А. К.,	<i>д.ф.-м.н., профессор</i>
Омарова А. Р.,	<i>технический редактор</i>

За достоверность материалов и рекламы ответственность несут авторы и рекламодатели

Редакция оставляет за собой право на отклонение материалов

При использовании материалов журнала ссылка на «Вестник Торайгыров
университета» обязательна

© Торайгыров университет

СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИКА И СТАТИСТИКА»

FTAMP 27.29.15; 27.29.21

<https://doi.org/10.48081/ATSI5038>

Ж. К. Даниярова¹, *Э. М. Джусупова²

^{1,2}Торайгыров университеті, Қазақстан Республикасы, Павлодар қ.

*e-mail : mika_28@mail.ru

ТУЫНДЫҒА ҚАТЫСТЫ ШЕШІЛМЕГЕН СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ИНТЕГРАЛДЫ – ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ ГОЛОМОРФТЫ ШЕШІМДЕРІ

Ғылыми әдебиеттерде құрамында бірнеше параметрі бар интегро-дифференциалдық теңдеулер аз зерттелген, атап айтқанда олардың екеуі болғанда, бір параметр теңдеудің интегралдық бөлігінде, ал екіншісі дифференциалдық бөлікте болады. Бұл әсіресе туындыға қатысты шешілмеген интегро-дифференциалдық теңдеулер үшін қажетті. Мұндай теңдеулер класын зерттеу математикалық физика теңдеулерінің теориялық және қолданбалы аспектілерінің көптеген сұрақтарында өте пайдалы болар еді. Сызықты емес интегро-дифференциалдық теңдеулерді шешу әдістері жылу физикасы, акустика, механика және астронавтика сияқты ғылым мен техниканың салаларында қызығушылық тудырады. Өкінішке орай, осы класс есептерінің шешімдерін құру сызықты емес өрнектермен белгісіз функциялардың интегралдарына байланысты бірқатар қиындықтармен байланысты. Бұл жұмыста бірінші ретті интегралды-дифференциалдық теңдеу параметрге қатысты сызықтық ядросымен шешудің бірнеше әдістерінің тіркесімін қолдануы қарастырылады. Ұсынылған тәсіл сызықты емес интегро - дифференциалдық есепті сызықты емес алгебралық теңдеулер жүйесін шешуге келтіруге мүмкіндік береді. Мақала кейбір интегралдық және интегро-дифференциалдық теңдеулердің екі параметріне ε және λ - га тәуелді голоморфты шешімдерін зерттеуге арналған және сәйкес теорема дәлелденген. Мұнда біз анықталмаған коэффициенттер әдісін және функционалдық қатарлардың біркелкі жинақталуы туралы Вейерштрасс теоремасын кеңінен қолданамыз.

Кілтті сөздер: интегро-дифференциалдық теңдеу, голоморфты шешімдері, резольвента әдісі, детерминанты, мажорантық қатарлар.

Кіріспе

Параметрге қатысты сызықтық ядросы бар бірінші ретті интегралды-дифференциалдық теңдеу.

1° Сызықтық емес теңдеуін қарастырамыз

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon \varphi(x, y, y') + \psi(x, y) + \int_0^1 [k_0(x, t) + \lambda(x, t)] f(t, y) dt \quad (1)$$

мұндағы $\varepsilon > 0$, λ – кейбір параметрлер,

φ, ψ және f функциялар $x \in [0, 1]$ бойынша үздіксіз, басқа аргументтер бойынша аналитикалық функциялар. $K_i(x, t)$ ($i = 0, 1$) ядролары x және t бойынша үздіксіз болып болжалды. $\varepsilon = 0$ қойып, біз қысқартылған теңдеуді аламыз [1].

$$\frac{dy}{dx} = \psi(x, u) + \int_0^1 [K_0(x, t) + \lambda K_1(x, t)] f(t, u) dt \quad (2)$$

$\lambda = \lambda_0$ кезінде (2) теңдеудің шешімі $u_0(x)$ болсын, яғни

$$\frac{du_0}{dx} = \psi(x, u_0) + \int_0^1 [K_0(x, t) + \lambda_0 K_1(x, t)] f(t, u_0) dt \quad (3)$$

Ауыстыру енгізсек

$$u(x) = u_0(x) + z(x), \quad \lambda = \lambda_0 + \mu \quad (4)$$

ψ және f және (3) функцияларының аналитикалық екенін ескерсек, (2) теңдеуінен аламыз

$$A_n(x) = \frac{\partial^n \psi(x, u_0)}{\partial u_0^n} \quad B_n(t) = \frac{\partial^n f(t, u_0)}{\partial u_0^n}$$

$$\frac{dz}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n(x) z^n(x) + \int_0^1 [\kappa_0(x, t) + \lambda_0 \kappa_1(x, t)] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} B_n(t) z^n(t) dt + \\ + \mu \int_0^1 \kappa_1(x, t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B_n(t) z^n(t) dt$$

$$A_n(x) = \frac{\partial^n \psi(x, u_0)}{\partial u_0^n}, \quad B_n(t) = \frac{\partial^n f(t, u_0)}{\partial u_0^n}$$

(n=0,1,2...)

(5) теңдеуінің шешімдерін қатар түрінде іздейміз

$$z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n z_n(x) \quad (6)$$

(6) қатарын (5) теңдеуге қоя отырып, және коэффициенттерді бірдей μ дәрежелерімен салыстыра отырып, белгісіз қатар коэффициенттерін анықтау үшін (6) сызықтық интегралды - дифференциалдық теңдеулерге келеміз [2].

$$\frac{dz_1}{dx} = A_1(x) z_1(x) + \int_0^1 [\kappa_0(x, t) + \lambda_0 \kappa_1(x, t)] B_1(t) z_1(t) dt + \int_0^1 \kappa_1(x, t) B_0(t) dt, \quad (7)$$

$$\frac{dz_2}{dx} = A_1(x) z_2(x) + \int_0^1 [\kappa_0(x, t) + \lambda_0 \kappa_1(x, t)] B_1(t) z_2(t) dt + \\ + \frac{1}{2!} \int_0^1 [\kappa_0(x, t) + \lambda_0 \kappa_1(x, t)] B_2(t) z_1^2(t) dt + \int_0^1 \kappa_1(x, t) B_1(t) z_1(t) dt + \\ + \frac{1}{2!} A_2(t) z_1^2(t), \quad (7.1)$$

$$\frac{dz_n}{dx} = A_1(x) z_n(x) + \int_0^1 [\kappa_1(x, t) + \lambda_0 \kappa_1(x, t)] B_1(t) z_n(t) dt + f_n(x), \quad (7.2)$$

мұндағы

$$f_n(x) = \int_0^1 [\kappa_0(x, t) + \lambda_0 \kappa_1(x, t)] \left[\sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} B_m(t) \left(\sum_{k=1}^{n-1} z_k(t) \right)^m \right]' dt + \\ + \int_0^1 \kappa_1(x, t) \left[\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m!} B_m(t) \left(\sum_{k=1}^{n-1} z_k(t) \right)^m \right]' dt + \left[\sum_{m=2}^n \frac{1}{m!} A_m(t) \left(\sum_{k=1}^{n-1} z_k(t) \right)^m \right]'; \quad (8)$$

Жоғарыда айтылғандай, мұнда квадрат жақшаның штрихі $f_n(x)$ -ге тек k, m индекстерінің барлық көбейтінділерінің қосындысы сыртқы $\sum$ белгінің жоғарғы санына тең болатын қос қосындының мүшелері кіретіндігін білдіреді

$\Delta(x, s)$ теңдеудің шешімі болсын

$$\Delta'(x, s) = A_1(x)\Delta(x)$$

$$\Delta(x, s)|_{x=s} = 1 \text{ кезінде}$$

Онда (7.2) – нан, нөлдік бастапқы шарттарды ескере отырып, немесе

$$Z_n(x) = \int_0^x \Delta(x, s) \left[\int_0^1 [\bar{k}_0(s, t) + \lambda_0 \bar{k}_1(s, t)] z_n(t) dt + f_n(s) \right] ds,$$

$$Z_n(x) = \int_0^1 [H_0(x, t) + \lambda_0 H_1(x, t)] z_n(t) dt + \phi_n(x), \text{ аламыз}$$

мұндағы

$$\bar{K}_i(x, t) = K_i(x, t) \cdot B_i(t),$$

$$H_i(x, t) = \int_0^x \Delta(x, s) \bar{K}_i(s, t) ds$$

(i=0,1)

$$\Phi_n(x) = \int_0^x \Delta(x, s) f_n(s) ds,$$

$f_n(x)$ (8) формула бойынша анықталады

Егер (9) теңдеу кез-келген λ_0 -де $\Phi_n(x)$ (II тарау, §2.2 қараңыз) функциясының жалғыз шешімі болса және бірлік саны $H_0(x, t)$ -ге тән сан болмаса, біз $H_0(x, t) + \lambda_0 H_1(x, t)$ ядросын қалыпты деп атаймыз [3].

Материалдар мен әдістер

$H_0(x, t) + \lambda_0 H_1(x, t)$ ядросы қалыпты ядро болсын және $D(\lambda_0) \neq 0$, мұндағы $D(\lambda_0)$ Фредгольм ядросының детерминанты

$$K(x, t) = H_1(x, t) + \int_0^1 H_1(x, s) R_0(s, t) ds,$$

$H_0(x, t)$ ядросының $R_0(s, t)$ -резолвенті, сондықтан (9) теңдеуінде келесі формуламен анықталған жалғыз шешім бар

$$Z_n(x) = \lambda_0 \int_0^1 R(x, s, \lambda_0) \phi_n(s) ds + \quad (11)$$

$$+ \lambda_0 \int_0^1 R_0(x, s) \int_0^1 R(s, t, \lambda_0) \phi_n(t) dt ds + \int_0^1 R_0(x, s) \phi_n(s) ds + \phi_n(x).$$

$R(x, t, \lambda_0)$ мұнда $K(x, t)$ ядросының резолвенті. Осылайша, біз барлық $Z_n(x)$ функцияларын ретті түрде анықтай аламыз, және осылайша мұндай анықтама бір мәнді болады. (11) - ді (6) – ге алмастыра отырып, (5) теңдеудің шешімін аламыз:

$$Z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \left[\lambda_0 \int_0^1 R(x, s, \lambda_0) \phi_n(s) ds + \right. \quad (12)$$

$$\left. + \lambda_0 \int_0^1 R_0(x, s) \int_0^1 R(s, t, \lambda_0) \phi_n(t) dt ds + \int_0^1 R_0(x, s) \phi_n(s) ds + \phi_n(x) \right].$$

Енді (12) қатар екенін және қатар одан X бойынша бөлінген дифференциация арқылы алынаынын көрсету қажет, яғни. Қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty} Z'_n(x) \mu^n \quad (13)$$

Барлық $x \in [0, 1]$ үшін жеткілікті кіші мәндермен біріктіріңіз μ . Ол үшін мажорантты қатарлар әдісі қолданылады [4]. Келесі теңсіздіктер орын алсын:

$$|\Delta(x, s) \Delta'_x(x, s)| \leq M, \quad (14)$$

$$(0 \leq x, s \leq 1)$$

$$\max_{0 \leq x, s \leq 1} \left\{ \frac{1}{m!} \int_0^1 K_i(x, t) B_m(t) dt, \left| \frac{1}{m!} A_m(x) \right| \right\} \leq B,$$

$$(i=0, 1; \quad m=0, 1, 2, \dots)$$

$$\max_{0 \leq x, s \leq 1} \left\{ \int_0^1 |R(x, s, \lambda_0)| ds, \int_0^1 |R_0(x, s)| ds \right\} \leq R_0,$$

$$\max_{0 \leq x, s \leq 1} \left\{ \int_0^1 |R'_x(x, s, \lambda_0)| ds, \int_0^1 |R'_{0x}(x, s)| ds \right\} \leq R_1,$$

Мұндағы M, B, R_0 және R_1 – тұрақтылар

$$|f_1(x)| = \int_0^1 |K_1(x, t) B_0(t)| dt \leq B,$$

$$|\phi_1(x)| \leq \int_0^x |\Delta(x, s)| \|f_1(s)\| ds \leq MB|$$

бізде бар

Мұны көру оңай $u_0 = a_0, u_{1k} = a_1, \dots, u_{n1} = a_n$

Жалпы

$$\begin{aligned} u_{0n} = & \left[(1 + |\lambda_0| C_0) B_0 + |\lambda| C_0 \sum_{i=1}^n B_i \right] \left\{ \left[\sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (u_{0k} + u_{1k} + u_{nk}) \right)^m \right]' + \right. \\ & \left. + |\lambda_0| \left[\sum_{m=1}^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} (u_{0k} + u_{1k} + \dots + u_{nk}) \right)^m \right]' \right\}, \\ u_{1n} = & \left[|\lambda_0| C_1 B_0 + (1 + |\lambda_0| C_1) B_1 + |\lambda| C_1 \sum_{i=2}^n B_i \right] \left\{ \left[\sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (u_{0k} + u_{1k} + u_{nk}) \right)^m \right]' + \right. \\ & \left. + |\lambda_0| \left[\sum_{m=1}^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} (u_{0k} + u_{1k} + \dots + u_{nk}) \right)^m \right]' \right\}, \\ u_{nn} = & \left[(1 + |\lambda_0| C_n) B_n + |\lambda| C_n \sum_{i=1}^{n-1} B_i \right] \left\{ \left[\sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (u_{0k} + u_{1k} + u_{nk}) \right)^m \right]' + \right. \\ & \left. + |\lambda_0| \left[\sum_{m=1}^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} (u_{0k} + u_{1k} + \dots + u_{nk}) \right)^m \right]' \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Жоғарыда айтылғандардан бұл

анық

$$|v_1(x)| \prec u_{01}, \quad |v_1'(x)| \prec u_{11}, \quad \dots, \quad |v_1^{(n)}(x)| \prec u_{n1}$$

үшін $0 \leq x \leq 1$.

Кез келген n натурал сан үшін теңсіздіктер ақиқат болатынын математикалық индукция әдісімен көрсетейік:

$$|v_k(x)| < u_{0k}, \quad |v'_k(x)| < u_{1k}, \quad |v_k^{(n)}(x)| < u_{nk} \quad (16)$$

Шынында да, (11) ескере отырып, бізде бар

$$|f_n^{(i)}(x)| \leq \left\{ \sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (u_{0k} + u_{1k} + u_{nk}) \right)^m \right\}' + |\lambda_0| \left\{ \sum_{m=1}^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} (u_{0k} + u_{1k} + \dots + u_{nk}) \right)^m \right\}', \quad (17)$$

(17) ескеріп, (10) мен (14) және (15) салыстыра отырып, қалаған теңсіздікті аламыз (16). Сондықтан (13) қатарлар үшін $v(x), v'(x), \dots, v^{(n)}(x)$ күшейткіш қатарлар болып табылады, ал (13) қатарларының жинақтылық облысы $v(x), v'(x), \dots, v^{(n)}(x)$ да қатарлардың жинақтылық облысы болады. Демек, (4) немесе бірдей теңдеу (3) болып табылатын теңдеу шешімдердің бірдей голоморфты тобына ие, оған шешім $u_0(x)$ де жатады [5].

Әрі қарай, (4), (5), [6] әдебиетіндегі (7) және [3] әдебиетіндегі (20) теңдеулерін ескере отырып, біз аламыз

$$\begin{aligned} |z_n(x)| &\leq |\lambda_0| R! |\phi_n(S)| + \\ &|\lambda_0| R_0^2 |\phi_n(x)| + R_0 |\phi_n(x)| + (\phi_n(x)) \leq (|\lambda_0| R_0 + |\lambda_0| R_0^2 + R_0 + 1) \\ MB \left\{ (1 + \lambda_0) \left[\sum_{m=1}^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \right)^m \right] + \left[\sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \right)^m \right]' + \left[\sum_{m=2}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \right)^m \right]' \right\} = \\ N_0 \left\{ (1 + \lambda_0) \left[\sum_{m=1}^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \right)^m \right] + \left[\sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \right)^m \right]' + \left[\sum_{m=2}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \right)^m \right]' \right\} = a_n \end{aligned}$$

$$\text{,т.е. } |z_n(x)| \leq a_n.$$

Теңдеуден дәл осы жолмен

$$\begin{aligned} z_n'(x) &= \lambda_0 \int_0^1 R_{\lambda}(x, S, x_0) \phi_n(S) dS + \lambda_0 \int_0^1 R_{0x}(x, S) \int_0^1 R_{\lambda}(S, t, \lambda_0) \phi_n(t) dt ds + \\ &+ \int_0^1 R_{0x}(x, S) \phi_n(S) dS + \phi_n'(x), \end{aligned}$$

сондай-ақ мынаны ескере отырып

$$\phi_n'(x) = \int_0^x \Delta_x(x, S) f_n(S) dS + f_n(x), \text{ бағалай аламыз } |z_n'(x)| \leq b_n.$$

Осылайша, $z(x)$ және $z'(x)$ үшін күшейту қатарлары (16) болып табылады, және (16) қатарлардың жинақтылық аймағы – сондай ақ $z(x)$ және $z'(x)$ жинақтылық аймағы болады.

Нәтижелер және талқылау

Теорема. 1) $x \in [0, 1]$ бойынша $\varphi(x, n), f(x, n)$ үздіксіз және бойынша аналитикалық функциялар болсын

2) $D(\lambda_0) \neq 0$ және $H_0(x, t)$ ядросы қалыпты, мұндағы $D(x)$ Фредгольм ядросының детерминанты

$$K(x, t) = H_1(x, t) + \int_0^1 H_1(x, S) R_0(S, t) dt$$

3) (14) теңсіздік орны бар

Бұл жағдайда (2) қысқартылған теңдеудің жалғыз голоморфты шешімі бар, келесідегідей формуламен анықталатын

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0) \left[\lambda_0 \int_0^1 R_{\lambda}(x, S, x_0) \phi_n(S) dS + \lambda_0 \int_0^1 R_{0x}(x, S) \int_0^1 R_{\lambda}(S, t, \lambda_0) \phi_n(t) dt ds + \int_0^1 R_{0x}(x, S) \phi_n(S) dS + \phi_n'(x) \right]$$

Шығады:

$$u^{(n)}(x) + u_{\varepsilon}^{(n)}(x) = \varepsilon \varphi(x, u + u_{\varepsilon}, u' + u'_{\varepsilon}, \dots, u^{(n)} + u_{\varepsilon}^{(n)}) + \\ + \psi(x, u + u_{\varepsilon}, u' + u'_{\varepsilon}, \dots, u^{(n-1)} + u_{\varepsilon}^{(n-1)}) + \lambda \int_0^1 K(x, t) f(t, u + u_{\varepsilon}, u' + u'_{\varepsilon}, \dots, u^{(n-1)} + u_{\varepsilon}^{(n-1)}) dt$$

Енді функциялар φ, ψ және f аналитикалық функциялар болып табылатындығын ескере отырып, бізде бар

$$u_{\varepsilon}^{(n)}(x) = \varepsilon \left[\varphi^* + \sum_{j=0}^n \frac{\partial \varphi^*}{\partial u^{(j)}} u_{\varepsilon}^{(j)} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial u} u_{\varepsilon} + \dots + \frac{\partial}{\partial u^{(n)}} u_{\varepsilon}^{(n)} \right)^m \varphi^* \right] + \\ + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial \psi^*}{\partial u^{(j)}} u_{\varepsilon}^{(j)} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial u} u_{\varepsilon} + \dots + \frac{\partial}{\partial u^{(n-1)}} u_{\varepsilon}^{(n-1)} \right)^m \varphi^* + \lambda \int_0^1 K(x, t) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial f^*}{\partial u^{(j)}} u_{\varepsilon}^{(j)} dt + \\ + \lambda \int_0^1 K(x, t) \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial u} u_{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial u'} u'_{\varepsilon} + \dots + \frac{\partial}{\partial u^{(n-1)}} u_{\varepsilon}^{(n-1)} \right)^m f^* dt, \quad (18)$$

$$f^* = f(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}), \quad \varphi^* = \varphi(x, u, u', \dots, u^{(n)}), \quad \psi^* = \psi(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}).$$

Теңдеу шешімі келесі түрде болады

$$u_{\varepsilon}(x) = \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots \quad (19)$$

Қатардың белгісіз коэффициенттерін табу үшін қатарларды алмастырып, ε коэффициенттерді бірдей дәрежеде теңестіреміз [184]. Біз аламыз

$$u_k^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial \psi^*}{\partial u^{(j)}} u_{\varepsilon}^{(j)} + \lambda \int_0^1 K(x, t) \frac{\partial f^*}{\partial u^{(j)}} u_k^{(j)}(t) dt + f_k(x), \quad (20)$$

мұндағы

$$f_1(x) = \varphi(x, u, u', \dots, u^{(n)}) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} f_k(x) = & \sum_{j=0}^n \frac{\partial \varphi^*}{\partial u^{(j)}} u_{k-1}^{(j)} + \left[\sum_{m=2}^{k-1} \frac{1}{m!} \left(\sum_{p=1}^{k-1} \left(\frac{\partial}{\partial u} u_p + \dots + \frac{\partial}{\partial u^{(n)}} u_p^{(n)} \right) \right) \varphi^* \right]' + \\ & + \lambda \int_0^1 K(x, t) \left[\sum_{m=2}^k \frac{1}{m!} \left(\sum_{p=1}^{k-1} \left(\frac{\partial}{\partial u} u_p + \frac{\partial}{\partial u'} u'_p + \dots + \frac{\partial}{\partial u^{(n-1)}} u_p^{(n-1)} \right) \right)^m f^* \right] dt \\ & + \left[\sum_{m=2}^k \frac{1}{m!} \left(\sum_{p=1}^{k-1} \left(\frac{\partial}{\partial u} u_p + \frac{\partial}{\partial u'} u'_p + \dots + \frac{\partial}{\partial u^{(n-1)}} u_p^{(n-1)} \right) \right)^m \psi^* \right]' + \end{aligned}$$

пункт 1⁰ келтірілген жолмен, теңдеу шешімін келесі түрде жазуға болады

$$u_k(x) = \int_0^x \frac{\sum_{i=1}^n u_{ki}(x) \Delta_i(s)}{\Delta(s)} (F(s) + f_k(s)) ds,$$

$$D(\lambda) \neq 0.$$

Мұнда $u_{ki}(x)$ -сәйкес келетін біртекті дифференциалдық теңдеудің шешімдерінің іргелі жүйесі, $\Delta(s)$ – Вронскийдің детерминанты және $\Delta_i(s)$ – олардың өз таңбаларымен алынған оның минорлары.

Функция $f_k(x)$ жоғарыда көрсетілген формула бойынша анықталады, ал

$$F(x) = g(x) + \lambda_0 \int_0^1 K(x, t, \lambda_0) g(s) ds, \quad (24)$$

мұнда

$$g(x) + \lambda_0 \int_0^1 \sum_{j=0}^{n-1} M_j(t) K_j(x, t) dt. \quad (25)$$

Қатардың жинақтылығын дәлелдейік

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x), \dots, \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(n)}(x) \quad (26)$$

кіші мәніндегі ε .

Мажоранттық қатарлар әдісін қолданамыз. Келесі теңсіздіктер орындалады

$$\max_{0 \leq x, j \leq 1} \left\{ \frac{1}{(i+j+\dots+k+m)!} \left| \frac{\partial^{i+j+\dots+k+m} \varphi^*}{\partial u^i \partial u^{1j} \dots \partial u^{(n)m}} \right|, \frac{1}{(i+j+\dots+k)!} \left| \frac{\partial^{i+j+\dots+k} \psi^*}{\partial u^i \partial u^{1j} \dots \partial u^{(n-1)k}} \right|, \right. \\ \left. \frac{1}{(i+j+\dots+k)!} \int_0^1 |K(x,t)| \left| \frac{\partial^{i+j+\dots+k} \varphi^*}{\partial u^i \partial u^{1j} \dots \partial u^{(n-1)k}} \right| dt \right\} \leq \\ (i+j+\dots+k+m \geq 0), (B, R_1, M_j = \text{const}, 0 \leq x, s \leq 1, j = \overline{0, n}) \\ \int_0^1 |R(x, t, \lambda_0)| ds \leq R, \left| \int_0^x \frac{\sum u_{k_i}^{(j)}(x) \Delta_i(s)}{\Delta(s)} ds \right| \leq M_j$$

$(n+1)$ алгебралық тендеулер жүйесін аламыз

$$F_j(\varepsilon, \nu, \dots, \omega, \nu) = 0, (j = \overline{0, n}) \quad (27)$$

мұндағы

$$F_j(\varepsilon, \nu, \dots, \omega, \nu) \equiv -\xi_j + \varepsilon \alpha_{1j} + N_j \left[\varepsilon (\nu + \dots + \omega + \nu) + \varepsilon \sum_{k=2}^{\infty} (\nu + \dots + \omega + \nu)^k + \right. \\ \left. + (1 + |\lambda|) \sum_{k=2}^{\infty} (\nu + \dots + \omega + \nu)^k \right], \quad (28)$$

$$N_j = M_j B \left(\left| \lambda \sum_{j=0}^{n-1} M_j B (1 + |\lambda| R_1) + 1 \right| \right)$$

$$\xi_0 \equiv \nu, \xi_1 \equiv w, \dots, \xi_{n-1} \equiv \omega, \xi_n \equiv \nu$$

Функциялар F_j айқындалмаған функцияның болуы теоремасының барлық үш шартын қанағаттандырады. Сондықтан $\mathcal{E} = 0$ нүкте маңындағы теңдеулер жүйесі параметрге қатысты жалғыз голоморфты шешімге ие:

$$\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i a_{i_0}, \dots, \nu = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i a_{i_n} \quad (29)$$

Бұл қатарлардың коэффициенттері қатарларды алмастыру арқылы анықталады. a_{ij} ($j = \overline{0, n}$) үшін келесі өрнектер алынады

$$a_{1j} \equiv a_{1j},$$

$$a_{ij} = N_j \left\{ a_{i-1,0} + a_{i-1,1} + \dots + a_{i-1,n} + \left[\sum_{m=2}^{i-1} \left(\sum_{p=1}^{i-1} (a_{p_0} + \dots + a_{p_{n-1}}) \right)^m \right]' + \right. \\ \left. + \left[\sum_{m=2}^i \left(\sum_{p=1}^{i-1} (a_{p_0} + \dots + a_{p_{n-1}}) \right)^m \right]' \right\} (1 + |\lambda|), \quad (i = \overline{2, \infty}, j = \overline{0, n}).$$

$|u_k(x)| \leq a_{k_0}, \dots, |u_k^{(j)}(x)| \leq a_{k_n}$ кез келген $k = \overline{1, \infty}$, $0 \leq x \leq 1$. негізі, $k = 1$ келесі бағалаулар орынды

$$|u_1(x)| \leq M_0(|F(s)| + |f_1(s)|) \leq M_0 B \left(|\lambda| \sum_{j=0}^{n-1} M_j B (1 + |\lambda| R_1) + 1 \right) \equiv a_{1_0}, \\ |u_1^{(j)}(x)| \leq M_j B \left(|\lambda| \sum_{j=0}^{n-1} M_j B (1 + |\lambda| R_1) + 1 \right) \equiv a_{1_j} \\ (j = \overline{1, n}, \quad 0 \leq x \leq 1)$$

Сонан соң

$$|f_k(x)| \leq B(|u_{k-1}| + \dots + |u_{k-1}^{(n)}|) + \left[\sum_{m=2}^{k-1} \left(\sum_{p=1}^{k-1} (|u_p| + \dots + |u_p^{(n)}|) \right)^m \right]' + \\ + (1 + |\lambda|) \left[\sum_{m=2}^k \left(\sum_{p=1}^{k-1} (|u_p| + \dots + |u_p^{(n-1)}|) \right)^m \right]' \leq B \left\{ a_{k-1,0} + \dots + a_{k-1,n} + \left[\sum_{m=2}^{k-1} \left(\sum_{p=1}^{k-1} (a_{p_0} + \dots + a_{p_n}) \right)^m \right]' + \right. \\ \left. + (1 + |\lambda|) \left[\sum_{m=2}^k \left(\sum_{p=1}^{k-1} (|u_p| + \dots + |u_p^{(n-1)}|) \right)^m \right]' \right\}$$

Дифференциалдау қолдансақ, шығады

$$|u_k^{(j)}(x)| \leq a_{k_j}, \quad (j = \overline{1, n}; 0 \leq x \leq 1).$$

Теорема. φ және f, ϕ функциялары олардың дәлелдеріне қатысты жоғарыда аталған үздіксіздік пен аналитикалық шарттар қанағаттандырсын. Әрі қарай, $H_0(x_1 t) + \lambda H_1(x_1 t)$ ядросы қалыпты және $D(\lambda) \neq 0$ болсын. Бұлай болса (1) тендеуі

$$y(x) = u(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \left[\lambda \int_0^1 R(x, s, \lambda) \phi_n(s) ds + \lambda \int_0^1 R_0(x, s) \int_0^1 (s, t, \lambda) \phi_n(t) dt ds + \int_0^1 R_0(x, s) \phi_n(s) ds + \phi_n(x) \right]$$

түрінде ұсынылған жалғыз голоморфты шешімге ие, мұндағы $u(x)$ - (2) қысқартылған теңдеудің шешімі, ал (21) формуласы кіші параметрге тәуелді емес ε , ондай болса $\varepsilon \rightarrow 0$ кезінде теңдеудің шешімі (1) теңдеуді шешуге тырысады (2).

Қорытынды

Интегралды-дифференциалдық теңдеулерді шешудің келесі әдістері белгілі:

- Лапластың түрлендіруі;
- дәйекті жуықтау әдісі;
- резольвента әдісі;
- алгебралық теңдеуге келтіру әдісі;
- интегралды шектеулі сомамен алмастыру [1–8].

Айта кету керек, интегралды-дифференциалдық теңдеулер үшін дәл аналитикалық шешім алу әрдайым мүмкін емес. Шешім әдісін таңдау теңдеудің түріне байланысты [9].

Мұнда бірінші ретті интегралды-дифференциалдық теңдеу параметрге қатысты сызықтық ядросымен шешудің бірнеше әдістерінің тіркесімін қолдануы қарастырылды [10–12]. Сонымен қатар, шешімнің әр кезеңінде қолданылған әдіс белгілі бір нақты шешім береді де, қорытынды теореманы тұжырымдауға мүмкіндік болды.

ПАЙДАЛАНҒАН ДЕРЕКТЕР ТІЗІМІ

1 **Аяшинов, М. М., Даниярова, Ж. К.** Голоморфные решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения с малым параметром. [Текст] // Вестник ИнЕУ. – 2012. – № 1 (45). – С. 192–198.

2 **Аяшинов, М. М., Даниярова Ж. К.** Теорема существования и единственности решения интегро – дифференциальных уравнений первого порядка [Текст] // Вестник ИнЕУ. – 2013. – № 1 (46). – С. 195–201.

3 **Аяшинов, М. М., Даниярова, Ж. К.** К вопросу существования решений нелинейных интегро–дифференциальных уравнений [Текст]. // Вестник ИнЕУ. – 2011. – № 1(41). – С. 202–207.

4 **Петровский, И. Г.** Лекции по теории интегральных уравнений. Издательство 3-е [Текст]. – М. : Наука, 1965. – 232 с.

5 **Фихтенгольц, Г. М.** Основы математического анализа. – Т. 2 [Текст]. – М : Наука, 1960. – 156 с.

- 6 **Краснов, М. Л.** Интегральные уравнения [Текст]. – М : Наука, 1975. – 222 с.
- 7 **Матвеев, Н. М.** Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст]. – Минск : «Высшая школа», 1974.
- 8 Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [Текст]. – М. : Наука, 1979. – № 45. – С. 165–172.
- 9 **Федорюк, М. В.** Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст]. – М. : Наука, 1980. – 352 с.
- 10 **Сүлейменов, Ж. С.** Бірінші ретті жай дифференциалдық теңдеулерді интегралдау әдістері. [Текст]. – Алматы : Кітап, 1982. – 112 б.
- 11 **Алимбекова, С. С., Нұрғали А. Ғ.** Интегралдық–дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есепті шешудің алгоритмі [Текст] // Вестник Торайгыров университета. – 2023. – № 1. – С. 82–95.
- 12 **Бакирова, Э. А., Кадирбаева, Ж. М., Касымова, А. Б.** Көп нүктелі шарты бар жәй дифференциалдық теңдеулер үшін басқару есептерін сандық шешу туралы [Текст] // Вестник Торайгыров университета. – 2021. – № 4. – С. 36–49.

REFERENCES

- 1 **Ayashinov, M. M., Daniyarova, Zh. K.** Golomorfny'e resheniya nelinejnogo integro-differencial'nogo uravneniya s maly'm parametrom [Holomorphic solutions of a nonlinear integro-differential equation with a small parameter] [Text]. // Vestnik InEU.–2012.– №1(45). – P. 192–198.
- 2 **Ayashinov, M. M., Daniyarova Zh. K.** Teorema sushhestvovaniya i edinstvennosti resheniya integro-differencial'ny'x uravnenij pervogo poryadka [The theorem of existence and uniqueness of the solution of integro-differential equations of the first order][Text] // Vestnik InEU.–2013.– № 1(46). – P. 195–201.
- 3 **Ayashinov, M. M., Daniyarova, Zh. K.** K voprosu sushhestvovaniya reshenij nelinejny'x integro-differencial'ny'x uravnenij [On the question of the existence of solutions of nonlinear integro-differential equations] [Text] // Vestnik InEU. – 2011. – № 1(41). – P. 202–207.
- 4 **Petrovskij, I. G.** Lekcii po teorii integral'ny'x uravnenij. Izdatel'stvo 3-e [Lectures on the theory of integral equations. 3rd publishing house] [Text]. – Moscow : Nauka, 1965. – 232 p.
- 5 **Fixtengol'cz, G. M.** Osnovy` matematicheskogo analiza. T. 2. [Fundamentals of Mathematical Analysis, Volume 2][Text]. – Moscow : Nauka, 1960. – 156 p.
- 6 **Krasnov, M. L.** Integral'ny'e uravneniya [Integral Equations] [Text]. – Moscow : Nauka, 1975. – 222 p.

7 **Matveev, N. M.** Metody` integrirvaniya oby`knovenny`x differencial`ny`x uravnenij. [Methods for integrating ordinary differential equations] [Text]. – Minsk : «Vy`sshaya shkola», 1974.

8 **Filippov, A. F.** Sbornik zadach po differencial`ny`m uravneniyam [Collection of problems on differential equations] [Text]. – Moscow : Nauka, 1979. – № 45. – P. 165–172.

9 **Fedoryuk, M. V.** Oby`knovenny`e differencial`ny`e uravneniya [Ordinary differential equations] [Text]. – Moscow : Nauka, 1980. – 352 p.

10 **Sylejmenov, Zh. S.** Birinshi retti zhaj differencialdy`k teңdeulerdi integraldau әdisteri [Methods of integration of simple differential equations of the first order] [Text]. – Almaty : Kitap, 1982. – 112 p.

11 **Alimbekova, S. S., Nyr`rali A. F.** Integraldy`k–differencialdy`k teңdeuler yshin shettik esepi sheshudiң algoritmi [Algorithm for solving the boundary value problem for integral–differential equations] [Text]. // Vestnik Torajgy`rov universiteta. – 2023. – № 1. – P. 82–95.

12 **Bakirova, E` A., Kadirbaeva, Zh. M., Kasy`mova, A. B.** Kәp nүkteli sharty` bar zhaj differencialdy`k teңdeuler yshin baskaru esepтерin sandy`k sheshu turaly` [For ordinary differential equations with a multipoint condition on the numerical solution of management problems] [Text]. // Vestnik Torajgy`rov universiteta. – 2021. – № 4. – P. 36–49.

Материал 16.05.23 баспаға түсті

¹**Ж. К. Даниярова¹, *Э. М. Джусупова²**

^{1,2}Торайғыров университеті, Қазақстан Республикасы, Павлодар қ.

Материал поступил в редакцию 16.05.23.

ГОЛОМОРФНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕРЕШЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С УЧЕТОМ ПРОИЗВОДНОЙ

В научной литературе мало изучены интегро–дифференциальные уравнения, которые содержат несколько параметров, в частности, когда их два, причем один параметр находится в интегральной части уравнения, а другой в дифференциальной части. Особенно это относится к интегро–дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной. Исследования такого класса уравнений было бы очень полезным во многих вопросах теоретических и прикладных аспектах уравнений математической физики. Методы решения нелинейных интегро–дифференциальных уравнений представляют интерес в таких областях науки и техники, как теплофизика,

акустика, механика, космонавтика. К сожалению, построение решений задач такого класса связано с рядом трудностей из-за нелинейных выражений и интегралов от неизвестных функций. В данной работе рассматривается использование комбинации нескольких методов решения интегро-дифференциального уравнения первого порядка с линейным ядром, связанным с параметром. Предложенный подход позволяет свести нелинейную интегро-дифференциальную задачу к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. Статья посвящена изучению голоморфных решений некоторых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений зависящих от двух параметров ε и λ , и доказана соответствующая теорема. Здесь широко используется нами метод неопределенных коэффициентов и теорема Вейерштрасса о равномерной сходимости функциональных рядов.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, голоморфные решения, резольвентный метод, определитель, мажорантный ряд.

Zh. K. Daniyarova¹, *E. M. Jussupova²

^{1,2}Toraighyrov University, Republic of Kazakhstan, Pavlodar.

Material received on 16.05.23.

HOLOMORPHIC SOLUTIONS OF UNSOLVED NONLINEAR INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DERIVATIVE INCLUDED

In the scientific literature, integro-differential equations that contain several parameters have been little studied, in particular, when there are two of them, with one parameter being in the integral part of the equation, and the other in the differential part. This is especially true for integro-differential equations that are not resolved with respect to the derivative. The study of such a class of equations would be very useful in many questions of theoretical and applied aspects of the equations of mathematical physics. Methods for solving nonlinear integro-differential equations are of interest in such areas of science and technology as thermal physics, acoustics, mechanics, and astronautics. Unfortunately, the construction of solutions to problems of this class is associated with a number of difficulties due to nonlinear expressions and integrals of unknown functions. In this paper, we consider the use of a combination of several methods for solving a first-order integro-differential equation with a linear kernel associated with a parameter. The proposed approach

makes it possible to reduce a nonlinear integro-differential problem to solving a system of nonlinear algebraic equations. The article is devoted to the study of holomorphic solutions of some integral and integro-differential equations depending on two parameters $\mathcal{E}$ and λ , and the corresponding theorem is proved. Here we widely use the method of indefinite coefficients and the Weierstrass theorem on the uniform convergence of functional series.

Keywords: integro-differential equations, holomorphic solutions, resolvent method, determinant, majorant series.

Теруге 16.05.2023 ж. жіберілді. Басуға 31.05.2023 ж. қол қойылды.

Электрондық баспа

7,50 Mb RAM

Шартты баспа табағы 10,01. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.

Компьютерде беттеген: Е. Е. Калихан

Корректор: А. Р. Омарова, Д. А. Кожас

Тапсырыс № 4081

Сдано в набор 16.05.2023 г. Подписано в печать 31.05.2023 г.

Электронное издание

7,50 Mb RAM

Усл.печ.л. 10,01. Тираж 300 экз. Цена договорная.

Компьютерная верстка Е. Е. Калихан

Корректор: А. Р. Омарова, Д. А. Кожас

Заказ № 4081

«Toraighyrov University» баспасынан басылып шығарылған

«Торайғыров университеті» КЕ АҚ

140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

«Toraighyrov University» баспасы

«Торайғыров университеті» КЕ АҚ

140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

+7(718)267-36-69

e-mail: kereku@tou.edu.kz

www.vestnik.tou.edu.kz

<https://vestnik-pm.tou.edu.kz/>