

Торайғыров университетінің
ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Торайғыров университета

ТОРАЙҒЫРОВ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ

Физика, математика және компьютерлік
ғылымдар сериясы
1997 жылдан бастап шығады



ВЕСТНИК ТОРАЙҒЫРОВ УНИВЕРСИТЕТА

Серия: Физика, математика
и компьютерные науки
Издается с 1997 года

ISSN 2959-068X

№ 1 (2023)
Павлодар

**НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
ТОРАЙГЫРОВ УНИВЕРСИТЕТА**

Серия: Физика, математика и компьютерные науки
выходит 4 раза в год

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о постановке на переучет периодического печатного издания,
информационного агентства и сетевого издания
№ KZ91VPY00046988

выдано

Министерством информации и общественного развития
Республики Казахстан

Тематическая направленность

публикация материалов в области физики, математики,
механики и информатики

Подписной индекс – 76208

<https://doi.org/10.48081/SGQS7560>

Бас редакторы – главный редактор

Тлеуменов С. К., *ф.-м.г.д., профессор*

Заместитель главного редактора Испулов Н. А., *ф.-м.г.к., профессор*

Ответственный секретарь Жумабеков А. Ж., *PhD*

Редакция алкасы – Редакционная коллегия

Esref Adali,	<i>PhD докторы, профессор (Турция);</i>
Qadir Abdul,	<i>PhD докторы, профессор (Пакистан);</i>
Донбаев К. М.,	<i>ф.-м.г.д., профессор;</i>
Демкин В. П.,	<i>ф.-м.г.д., профессор (Российская Федерация);</i>
Жумадилаева А. К.,	<i>т.г.к., кауымд. профессор;</i>
Ибраев Н. Х.,	<i>ф.-м.г.д., профессор;</i>
Косов В. Н.,	<i>ф.-м.г.д., профессор;</i>
Сентова С. М.,	<i>пед.г.д., профессор;</i>
Шоканов А. К.,	<i>ф.-м.г.к., профессор</i>
Омарова А. Р.,	<i>технический редактор</i>

За достоверность материалов и рекламы ответственность несут авторы и рекламодатели

Редакция оставляет за собой право на отклонение материалов

При использовании материалов журнала ссылка на «Вестник Торайгыров
университета» обязательна

© Торайгыров университет

СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИКА И СТАТИСТИКА»

FTAMP 27.01.45

<https://doi.org/10.48081/SKAI5144>

***С. С. Алимбекова¹, А. Ғ. Нұрғали²**

^{1,2}Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті,

Қазақстан Республикасы, Алматы қ.

*e-mail: a_sandu74@mail.ru

ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕПТІ ШЕШУДІҢ АЛГОРИТМІ

Мақалада интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есепті шешудің жолдары және осы есепті зерттеген ғалымдардың жұмыстарына шолу жасалған. Қазіргі заманғы ғылымда интегралдық-дифференциалдық теңдеулер, соның ішінде интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептердің алатын орны ерекше зор екені белгілі. Осындай есептерді шешу бойынша жүргізілген жұмыстар да кең ауқымды. Дифференциалдаудың нәтижесі – ол интеграл, ал интегралдаудың нәтижесі – ол дифференциал. Ал интегралдық-дифференциалдық теңдеулерге математиканың бірден осы екі элементі бар теңдеулер жатады. Өз кезегінде дифференциал дегеніміз – ол туынды. Туынды арқылы үдерістің бастапқы қозғалысы анықталады. Сол себептен мұндай теңдеулерді шешу біршама қиындықтар туғызады, себебі нақты жасауға бола бермейді, өйткені үдеріс, құбылыс бір жерде тоқтап қалмай, үнемі қозғалыста болады. Қандай да бір физикалық, химиялық, механикалық және тағы басқа құбылысты зерттеген кезде зерттеуші оның математикалық моделін құрады да, осы құбылысты басқаратын негізгі заңдарды математикалық түрде жазады. Осындай математикалық модель болып интегралдық-дифференциалдық теңдеулер болады. Интегралдық-дифференциалдық теңдеуді шешудің бірнеше жолы бар. Олар аналитикалық, сандық, параметрлік әдістер. Осы мақалада интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерді шешудің алгоритмі және мысалдар қарастырылған.

Кілтті сөздер: туынды, интегралдық-дифференциалдық теңдеулер, дифференциалдық теңдеулер, дифференциалдық есептеулер, шеттік есептер.

Кіріспе

Қазіргі заманғы математикада дифференциалдық теңдеулер теориясы негізгі ауқымды бөлімдердің бірі болып келеді. Математика саласына табиғат құпияларына ену әдісі ретінде сипаттама бере отырып, осы әдістің негізгі қолдану жолы деп нақты әлемнің математикалық моделінің қалыптасуы мен оны зерттеу деп айтуға болады. Қандай да бір физикалық құбылысты зерттеген кезде зерттеуші оның математикалық моделін құрады да, осы құбылысты басқаратын негізгі заңдарды математикалық түрде жазады. Осы заңдарды дифференциалдық теңдеулер түрінде жазуға болады. Ондай модельдер болып ортаның механикалық, химиялық реакциялары, электр және магниттік құбылыстар бола алады.

Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер электродинамикада, серпіндік теорияда, осы теорияға негізделген арқалықтардың иілулері, көпірлер мен біліктердің тербелісі сияқты көптеген қолданбалы еспетердің негізі болып келеді. Сонымен қатар, интегралдық-дифференциалдық теңдеулер медицина мен экономика, химия, биология салаларында да кеңінен қолданылады. Математиканы жалпы алғанда және де соның ішінде жаратылыстану ғылымдарында ролі өте ауқымды. Табиғатта орын алатын әртүрлі құбылыстар математикалық зерттеу кезінде дифференциалдық теңдеулер арқылы шешіледі. Мысалы, экономикалық есептерде. Осы теңдеу арқылы халық санының өсуі (демографиялық процесс), тұрақты инфляция кезінде бағалардың өсу динамикасы және т.б. Медицинада - ұзақ эпидемия кезінде ауруға шалдыққандар ауруға шалдықпағандарға індетті жұқтыруы, уақыт өте келе бактериялардың көбейуі, таблеткаларда заттың емдік формаларының еруі және т.б.

Материалдар мен тәсілдер

Мақаланы жазу үшін біз осы тақырып бойынша басқа ғылыми зерттеулер мен кітаптарға сүйендік. Білім алушылардың есептерді шығарудағы қажеттіліктерін зерттеп, бұл есептерді шешудің қандай жолдары анық болатынын көрсеттік.

Нәтижелер мен пікірталас

Көптеген салдары бар құбылыстар интегралдық-дифференциалдық теңдеулермен сипатталады [1]. Кейбір осындай теңдеулердің оң жақтарында дифференциалдау операциялары бар, сол себепті жылдамдықтары қазіргі уақыттағы жағдайына ғана емес, алдыңғы жағдайларына да тәуелді қозғалыс жүйесін сипаттауға жарамды [2]. Мысалы, Проктордың серпінді арқалықтың тепе-теңдік теңдеуі:

$$\alpha_1 y^{IV}(x) + y(x) = -\alpha \int_{-1}^1 K(x, t) y^{IV}(t) dt \quad (1)$$

Берілген $y(x)$ функциясының мәндерінің туындылары тәуелсіз айнymалының бір мәнінде емес, қандай да бір тұрақты аралықта берілген $y'' = f(x, y, y')$ теңдеу есебін интегралдауды шеттік есеп деп атайды. Кошидің есебі кей жағдайда бірнүктелі деп, ал шеттік есептерді – екінүктелі (кейде көпнүктелі) деп атайды [3].

Коши есебінің және сызықтық интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептердің шешілуі бойынша сұрақтарды G. Fubini, K. Courant, H. M. Крылов, B. И. Романовский және т.б. жұмыстарында зерттелген [4].

Шеттік есептер үшін интегралдық-дифференциалдық теңдеулер теориясының ары қарай дамуы келесі авторлардың жұмыстарынан көруге болады: А. И. Некрасов, Я. В. Быков, Т. И. Виграненко, В. В. Васильев, В. Н. Николенко, Ю. К. Ландо, Л. Е. Кривошеин, А. М. Самойленко, О. А. Бойчук, С. А. Кривошей.

А. Б. Васильева мен Коши есебін және сызықтық сингулярлық қобалжыған қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі негізінде Люстерник-Вишиктің әдісі жатқан, ең қарапайым асимптотикалық шешу әдісі ұсынылған. Кейін А.Б. Васильевамен және оның шәкірттерімен осы әдіс жетілдірілген және көпнүктелі шеттік есептерді, сингулярлық қобалжыған интегралдық-дифференциалдық теңдеулерді, аз мөлшерді кешігу дифференциалдық-айырмалық есептерді шешу үшін қолданған [5].

Осы мәселені зерттеумен М. И. Иманалиев пен оның шәкірттері де айналысқан. М. И. Иманалиев сингулярлық қобалжыған сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің кең класында тиімді асимптотикалық шешу әдісін әзірлеген. Кейбір интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің кластары үшін шешімдер жүйесі құрылған [6].

Интегралдық-дифференциалдық теңдеулерді зерттеген кезде негізгі әдіс болып А. И. Некрасовтың әдісін айтуға болады. Мұнда фундаменталды шешу жүйесі көмегімен сәйкес біртекті дифференциалдық теңдеу мен интегралдық мүшенің Фредгольмның екінші реттік интегралдық теңдеуі құрылады.

Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептерді шешуге және олардың шешімін табуға жуықталған әдістерді салуға бағытталған көптеген жұмыстар болғанымен, сапалы теория сұрақтарының көбі әлі де болса ашық қалып отыр. Атап айтқанда, интегралдық мүшелерде туындылардан шыққан есептері бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің жүйесі үшін сызықты екі нүктелі шеттік есептің бірімәнді шешілуінің қажетті және жеткілікті шарттары шығарылмаған [7].

1 анықтама. Егер кез-келген $f(t) \in C([0, T], R^n)$, $d \in R^n$ жұп үшін жалғыз шешімі болса, онда (6), (7) есептері сөзсіз шешіледі дейді.

2 анықтама. Егер кез-келген $f(t) \in C([0, T], R^n)$, $d \in R^n$ үшін $x(t)$ жалғыз шешім болса және оны

$\|x\|_1 \leq \gamma \max(\|f\|_1, \|d\|)$, мұнда $\gamma f(t), d$ -ға тәуелді емес тұрақты сан

теңсіздігін қанағаттандырса, онда (6), (7) дұрыс шешілетін шекті есебі деп аталады [8].

Параметрлі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есепті шешу алгоритмі.

$[0, T]$ кесіндісінде интегралдық-дифференциалдық теңдеудің жүйесі үшін екінүктелі шеттік есепті қарастарайық

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)\mu \quad \mu \in R^n \quad (1)$$

$$x(0) = 0, x(T) = 0, \quad (2)$$

Мұндағы $n \times n - A(t), B(t)$ матрицасы және n - өлшемді $f(t)$ вектор-функциясы $[0, T]$ үзіліссіз, $K(t, s)$ сәйкесінше $[0, T] \times [0, T]$ -да үзіліссіз

Параметр мен (2) шекті шарттары бар интегралдық-дифференциалдық теңдеуді қанағаттандыратын $(x(y), \mu)$ жұбын табу керек.

$[0, T]$ кесіндісінде N рет сыятын $h > 0$ қадамын аламыз және $[0, T) = \bigcup_{r=1}^N [r-1)h, rh)$ бөлшекке бөлеміз.

$x(t)$ функциясының $[(r-1)h, rh)$ r -ші интервалына сығылуын $x_r(t)$ арқылы белгілейміз, яғни $x_r(t) = [(r-1)h, rh)$ -та $x(t)$ -мен анықталатын және соған сәйкес келетін вектор-функцияның жүйесі. Онда параметрлі интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы екінүктелі шеттік есепке эквивалентті көпнүктелі шеттік есеп болады.

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + B(t)\mu + \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)h}^{jh} K(t, s)x_j(s)ds + f(t), \quad (3)$$

$$t \in [(r-1)h, rh),$$

$$x_1(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow T-0} x_N(t) = 0 \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow sh-0} x_s(t) = x_{s+1}(sh), \quad s = \overline{1, N-1} \quad (5)$$

мұндағы $(s) - t = jh, j = \overline{1, N-1}$ - бөлу нүктелеріндегі шешімдердің бірігуі.

$\lambda_r = x_r((r-1)h)$, $r = \overline{1, N}$, $\lambda_0 = \mu$ өлшемдерін енгіземіз және әрбір $[(r-1)h, rh)$ интервалында $x_r(t) = u_r(t) + \lambda_r$, $r = \overline{1, N}$ орнын

ауыстырамыз. Сол кезде (3) – (5) эквивалентті көпнүктелі шеттік есепке келеді.

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)[u_r + \lambda_r] + B(t)\lambda_0 + \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)k}^{jk} K_1(t, s)[u_j(s) + \lambda_j]ds + f(t), \quad (6)$$

$$u_r[(r-1)h], \quad t \in [(r-1)h, rh) \quad r = \overline{1, N}, \quad (7)$$

$$\lambda_j = 0, \quad \lambda_N + \lim_{t \rightarrow T-0} u_N(t) = 0, \quad (8)$$

$$\lambda_s + \lim_{t \rightarrow sk-0} u_s(t) = \lambda_{s+1}, \quad s = \overline{1, N-1} \quad (9)$$

$u_r(t) + \lambda_r, r = \overline{1, N}$ бастапқы шарттың пайда болуы

$\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ тұрақты мәндері кезінде интегралдық теңдеу жүйесінен $u_r(t), r = \overline{1, N}$ функцияларын анықтауға мүмкіндік береді.

$$\begin{aligned} u_r(t) = & \int_{(r-1)k}^t A(t) u_r(t) dt + \int_{(r-1)k}^t A(t) \lambda_r dt + \\ & + \int_{(r-1)k}^t B(t) \lambda_0 dt + \int_{(r-1)k}^t \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)k}^{jk} K(t, s) u_j ds dt + \\ & \int_{(r-1)k}^t \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)k}^{jk} K_1(t, s) \lambda_j ds dt + \int_{(r-1)k}^t f(t) dt, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (10)$$

(10) нан $\lim_{t \rightarrow Nk-0} u_N(t), \lim_{t \rightarrow sk-0} u_s(t), s = \overline{1, N-1}$ (8) бен (9) – ға сәйкес мәндерін қойып, екі жағында $h > 0$ көбейтсек, $\lambda_r, r = \overline{0, N}$ белгісіз параметрлердің сызықтық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\lambda_1 = 0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & h \int_{(n-1)k}^{Nk} B(t) \lambda_0 dt + h \int_{(n-1)k}^{Nk} A(t) \lambda_N dt + \\ & h \int_{(n-1)k}^{Nk} \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)k}^{jk} K(t, s) \lambda_j ds dt = -h \int_{(n-1)k}^{Nk} f(t) dt - \\ & h \int_{(n-1)k}^{Nk} \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)k}^{jk} K_1(t, s) u_j(s) ds dt - h \int_{(n-1)k}^{Nk} A(t) u_N(t) dt \end{aligned} \quad (12)$$

$$\lambda_s + \int_{(s-1)k}^{sk} B(t)\lambda_0 dt + \int_{(s-1)k}^{sk} A(t)\lambda_s dt + \int_{(s-1)k}^{sk} \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)k}^{jk} K_1(t,s)\lambda_j ds dt - \lambda_{s+1} = - \int_{(s-1)k}^{sk} A(t)u_s(t) dt - (13)$$

$$\int_{(s-1)k}^{sk} \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)k}^{jk} K_1(t,s)u_j(s) dt, \quad s = \overline{1, N-1}$$

(11), (12) және (13) сызықтық теңдеулер жүйесінің сол жағына сәйкес келетін $n(N+1) \times n(N+1)$ матрицасын $Q(h)$ деп белгілейік. Онда (11), (12) және (13) сызықтық теңдеулер жүйесі келесідей жазылады

$$Q(h)\lambda = -F(h) - G(u, h), \quad \lambda \in R^{n(N+1)}, \quad (14)$$

$$\text{мұнда } F(h) = \left(0, h \int_{(N-1)k}^{Nk} f(t) dt, \int_0^k f(t) dt, K, \int_{(N-2)k}^{(N-1)k} f(t) dt \right)$$

$$G(u, h) = \left(0, h \int_{(N-1)k}^{Nk} A(t)u_N dt + h \int_{(N-1)k}^{Nk} \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)k}^{jk} K_1(t,s)u_j(s) ds dt + \int_0^k \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)k}^{jk} K_2(t,s)u_j(s) ds dt + K, \int_{(N-2)k}^{(N-1)k} A(t)u_{N-1}(t) dt + \int_{(N-2)k}^{(N-1)k} \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)k}^{jk} K(t,s)u_j(s) dt \right)$$

Сонымен, белгісіз $(\lambda, u[t])$ жұбын, (6) - (9) табу үшін тұйықталған (10), (14) теңдеулер бар. (6) – (9) көпнүктелі шеттік есептердің шешімін $\lambda^{(k)}, u^k[t], k = 0, 1, 2, \dots$, келесі алгоритм арқылы анықталатын реттік шек арқылы табамыз:

1 қадам. а) $Q(h)\lambda = -F(h)$ теңдеуіндегі $Q(h)$ матрицасы қайтарымды деп болжап $\lambda^{(0)} = \lambda_0^{(0)} \lambda_1^{(0)} \lambda_2^{(0)}, K, \lambda_N^{(0)} \in R^{n(N+1)}$; $\lambda^{(0)} = -[Q(h)]^{-1}F(h)$ параметрі бойынша бастапқы жуықталған шаманы табамыз;

б) анықталған $\lambda_r^{(0)}, r = \overline{1, N}$ - ды (6) интегралдық-дифференциалдық теңдеудің оң жағына қойып, және (7) шарты бар Кошидің арнайы есебін есептеп, $u^{(1)}[t] = (u_1^{(1)}(t), u_2^{(1)}(t), K, u_N^{(1)}(t))''$ табамыз.

2 қадам. а) анықталған $u_r^{(0)}(t), r = \overline{1, N}$ (14) –тің оң жағына қойып

$[Q(h)\lambda = -F(h) - G(u^{(0)}, h)$ теңдеуінен $\lambda^{(1)} = \lambda_0^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, K\lambda_N^{(1)}$ анықтаймыз;

б) анықталған $\lambda_r^{(1)}, r = \overline{0, N}$ –ды (6) интегралдық-дифференциалдық теңдеудің оң жағына қойып және (7) шарты бар Кошидің арнайы есебін есептеп, $u^{(1)}[t] = (u_1^{(1)}(t), u_2^{(1)}(t), K, u_N^{(1)}(t))''$ табамыз және т.с.с. Осы үдерісті жалғастыра отырып, алгоритмнің k -қадамында $\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t], k = 0, 1, 2, \dots$ жұп жүйесін табамыз [9].

1 мысал. $y(0) = 3, y(1) - y'(1) = 3$ шеттік шарттарды қанағаттандыратын $y'' - y' = 0$ теңдеудің шешімін табу керек.

Шешімі. Берілген дифференциалдық теңдеудің барлық шешімдері $y = C_1 + C_2 e^x$ формуласымен өрнектеледі, мұндағы C_1, C_2 – кез-келген тұрақты сандар. Берілген шеттік шарттарды қанағаттандыратын C_1 мен C_2 теру арқылы тандаймыз, яғни $C_1 + C_2 = 3, C_1 + C_2 e - C_2 e = 1$. Осыдан $C_1 = 1, C_2 = 2$. Сонымен $y = 1 + 2e^x$ шеттік есептің шешімі болады.

2 мысал.

Берілген дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін табу керек.

$$\sqrt{1 - x^2} \cdot y' + y = \arcsin x \cdot y^2, y(0) = -1$$

Шешімі. Берілген теңдеу $r(x)y' + y = q(x)y^n$ түріне сай келеді, демек бұл Бернуллидің теңдеуі.

Бұл теңдеуді шешу алгоритмі қарапайым.

Бастапқысында оң жағындағы «игректен» арылу керек. Ол үшін y^2 –ты сол жағындағы бөліміне апарып, мүшелеп бөлеміз.

$$\sqrt{1 - x^2} \cdot y' + y = \arcsin x \cdot y^2$$

$$\frac{\sqrt{1 - x^2} \cdot y'}{y^2} + \frac{1}{y} = \arcsin x$$

Ары қарай $\frac{1}{y}$ қосындыдағы игректен арыламыз:

$$\frac{\sqrt{1-x^2} \cdot y'}{y^2} + \frac{1}{y} = \arcsin x$$

Ол үшін $\frac{1}{y} = z$ жаңа айнымалыны енгіземіз, яғни «игрегі» бар бөлшекті «зет» айнымалысына ауыстырамыз.

Туындыны табамыз:

$$z' = \left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{y'}{y^2}$$

Теңдеудің бірінші қосындыға назар аударамыз:

$$\frac{\sqrt{1-x^2} \cdot y'}{y^2} + \frac{1}{y} = \arcsin x$$

Бұл жерде $\frac{y'}{y^2}$ ның орнына $-z'$ енгіземіз.

Сонымен, $\frac{1}{y} = z$, $\frac{y'}{y^2} = -z'$ орындарын ауыстыру нәтижесінде

$$\frac{\sqrt{1-x^2} \cdot y'}{y^2} + \frac{1}{y} = \arcsin x$$

теңдеуіміз

$$-\sqrt{1-x^2} \cdot z' + z = \arcsin x$$

теңдеуіне айналады.

Біртекті емес бірінші ретті сызықтық теңдеу алдық. Бір айырмашылығы, «игректің» орнында «зет» тұр.

Бернуллі теңдеуі алмастыру көмегімен біртекті емес бірінші ретті сызықтық теңдеуге айналады.

Әр қосындының таңбасын өзгертіп, қайта жазайық. Ондай амалды жасамай-ақ қойса да болады, бірақ жазба стандартты түрде көріну үшін, таңбасын өзгертіп жазған дұрыс болады:

$$\sqrt{1-x^2} \cdot z' - z = -\arcsin x$$

Ары қарай теңдеуді шешу алгоритмі біртекті емес бірінші ретті сызықты теңдеуді шешудің үйреншікті жолымен жүргізіледі:

Ауыстыру амалын жүргізейік:

$$\begin{aligned} z = uv' &\Rightarrow z' = u'v + uv' \\ \sqrt{1-x^2} \cdot (u'v + uv') - uv &= -\arcsin x \\ \sqrt{1-x^2} \cdot u'v + u(\sqrt{1-x^2}v' - v) &= -\arcsin x \end{aligned}$$

Теңдеулер жүйесін құрып, оны шешейік:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2} \cdot v' - v = 0 \\ \sqrt{1-x^2} \cdot u'v = -\arcsin x \end{cases}$$

Бірінші теңдеуден v -ны табамыз:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{dv}{dx} &= v \\ \int \frac{dv}{v} &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ \ln|v| &= \arcsin x \end{aligned}$$

$v = e^{\arcsin x}$ – табылған функцияны жүйенің екінші теңдеуіне қоямыз:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2} \cdot u' \cdot e^{\arcsin x} &= -\arcsin x \\ u' &= -\frac{\arcsin x}{e^{\arcsin x} \cdot \sqrt{1-x^2}} \\ \frac{du}{dx} &= -\frac{e^{-\arcsin x} \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \\ u &= -\int \frac{e^{-\arcsin x} \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = (*) \end{aligned}$$

Бұл интеграл бөлшектеніп алынады:

$$\begin{aligned} \int adb &= ab - \int bda \\ a &= \arcsin x \Rightarrow da = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ db &= -\frac{e^{-\arcsin x} \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow b = -\int \frac{e^{-\arcsin x} \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int e^{-\arcsin x} d(-\arcsin x) = e^{-\arcsin x} \\ (*) &= e^{-\arcsin x} \cdot \arcsin x - \int \frac{e^{-\arcsin x} \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = e^{-\arcsin x} \cdot \arcsin x + \\ &\int e^{-\arcsin x} d(-\arcsin x) = e^{-\arcsin x} \cdot \arcsin x + e^{-\arcsin x} + C \end{aligned}$$

Сонымен:

$$\begin{aligned} z = uv &= (e^{-\arcsin x} \cdot \arcsin x + e^{-\arcsin x} + C) \cdot e^{\arcsin x} \\ &= Ce^{\arcsin x} + \arcsin x + 1 \end{aligned}$$

Енді кері алмастыру жүргіземіз:

Егер алғашқыда $\frac{1}{y} = z$ болса, онда кері алмастыруда $y = \frac{1}{z}$ болады.
Нәтижесінде берілген Бернулли теңдеудің жалпы шешімін аламыз.

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{Ce^{\arcsin x} + \arcsin x + 1},$$

мұндағы $C = \text{const}$

Сол себепті $y(0) = -1$ бастапқы шартын қанағаттандыратын теңдеудің дербес шешімін табамыз.

$$\begin{aligned} y(0) &= \frac{1}{C+0+1} = \frac{1}{C+1} = -1 \\ C+1 &= -1 \\ C &= -2 \end{aligned}$$

Жауабы: дербес шешім: $y = \frac{1}{-2e^{\arcsin x} + \arcsin x + 1}$

Жоғарыдағы есепті шығару алгоритмінде дифференциалдық теңдеуді шешу жолы берілген шартқа байланысты болатынын көрдік [10].

Қорытынды

Дифференциалдық теңдеулер теориясы заманауи математикада ауқымды бөлімдердің бірі болып келеді. Қазіргі заманғы математика ғылымындағы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің ерекшелігін сипаттау үшін – ол қарапайым дифференциалдық теңдеулер теориясы мен дербес туындылары бар дифференциалдық теңдеулер теориясынан тұратынын атап өту керек. Табиғаттың, қоғамның немесе т.б. қандай да бір құбылысын, процесін зерттеген кезде, ол құбылыс пен процестің математикалық моделі құрастырылып, осы құбылыстарды басқаратын негізгі заңдары математикалық түрде жазылады. Ондай модельдер болып химиялық реакциялар, серпімдік теория және т.б болады.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ДЕРЕКТЕР ТІЗІМІ

1 **Крылов, Н. М.** Про різінні узагольнення Ritz'ового методу найменших квадратів для наблнженного інтегрування рівнянь математичної фізики [Текст] // Фізично-матем. – 1926.– Т. 3 – С. 3–28.

2 **Романовский, В. И.** Об одном интегро-дифференциальном уравнений [Текст] // Математика. – 1934. – № 12.– С. 25–32.

3 **Васильев, В. В.** К вопросу о решении задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений [Текст] // Математика. 1961. – № 4(23). – С. 8–24.

4 **Бандурин, Н. Г.** Новый численный метод порядка N для решения интегро-дифференциального уравнения общего типа [Текст] // Вычислительные технологии. – 2002. – № 2. – Т. 7 – С. 3–10.

5 **Аширбаева, А. Ж.** Сведение нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка к решению интегрального уравнения [Текст] // Механика и технологии. – 2013. – № 1. – С. 18–24.

6 **Касымов, К. А.** Асимптотика решения задачи с начальным скачком для гиперболических уравнений второго порядка, содержащих малый параметр [Текст]. – 1970. – № 1. – Т. 195 – С. 28–30.

7 **Искакова, Н. Б., Орумбаева, Н. Т., Нұржума, Н.** Решение периодических краевых задач для систем дифференциальных уравнений с запоздалым аргументом параметризации [Текст] // Разработка программного обеспечения и инженерия знаний. – 2020. – № 2. – Т. 1 – С. 87–88.

8 **Джумабаев, Д. С.** Критерий однозначной разрешимости линейной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений [Текст]. – Математический журнал – 2008. – № 2. – Т. 8 – С. 44–48.

9 **Ian Gladwell.** Boundary value problem [Электронный ресурс]. – http://www.scholarpedia.org/article/Boundary_value_problem.

10 Equilibria and the Phase Line [Электронный ресурс]. – <http://www.sosmath.com/diffeq/first/phaseline/phaseline.html>.

REFERENCES

1 **Krylov, N. M.** Pro rijini ýzagolnenia Ritz'ovogo metodý naimenshih kvadrativ dlá nabl'tjennogo integrývania rivnán matematichnoi fizikí [About the Ritz'ovogo method of the hired squares for the nabl'tzhennogo integration of the Russian mathematical physics] [Text] // Fizichno-matem. – 1926. – Т. 3 – P. 3–28.

2 **Romanovskii, V. I.** Ob odnom integro-differentsialnom ýravnení [On one integro-differential equation] [Text] // Matematika. – 1934. – № 12. – P. 25–32.

3 **Vasilev, V. V.** K voprosý o reshení zadachi Koshi dlá odnogo klassa lineynyh integro-differentsialnyh ýravnení [On the problem of solving the Cauchy problem for one class of linear integro-differential equations] [Text] // Matematika. – 1961. – № 4(23). – P. 8–24.

4 **Bandýrin, N. G.** Novyi chislennyi metod porádka N dlá reshenia integro-differentsialnogo ýravnénia obshego [A new numerical method of order N for solving an integro-differential equation of general type] [Text] // Vychislitelnye tehnologii. – 2002. – № 2. – Т. 7 – P. 3–10.

5 **Ashirbaeva, A. J.** Svedenie nelineinogo integro-differentsialnogo ýravnénia v chastnyh proizvodnyh chetvertogo porádka k resheníý integralnogo ýravnénia [Reduction of a nonlinear integro-differential equation in partial derivatives of the fourth order to the solution of an integral equation] [Text] // Mehanika i tehnologii. – 2013. – № 1. – P. 18–24.

6 **Kasymov, K. A.** Asimptotika reshenia zadachi s nachalnym skachkom dlá giperbolicheskikh ýravnení vtorogo porádka, sodержashih malýi parametr [Asymptotics of solving a problem with an initial jump for second-order hyperbolic equations containing a small parameter] [Text]. – 1970. – № 1. – Т. 195 – P. 28–30.

7 **Iskakova, N. B., Orýmbaeva, N. T., Nurjýma, N.** Reshenie periodicheskikh kraevykh zadach dlá sistem differentsialnyh ýravnení s zapozdalym argýmentom parametrizatsii [The solution of periodic boundary value problems for systems of differential equations with a belated parametrization argument] [Text] // Razrobotka programmnogo obespechenia i inženeria znanii. – 2020. – № 2. – Т. 1 – P. 87–88.

8 **Djymabaev, D. S.** Kriterii odnoznachnoi razreshimosti lineinoi kraevoi zadachi dlia sistem integro-differentsialnyh uravnenii [Criterion of unambiguous solvability of a linear boundary value problem for systems of integro-differential equations] [Text]. – Matematicheskii žurnal – 2008. – № 2. – T. 8 – P. 44–48.

9 **Ian Gladwell.** Boundary value problem [Electronic resource]. – http://www.scholarpedia.org/article/Boundary_value_problem.

10 Equilibria and the Phase Line [Electronic resource]. – <http://www.sosmath.com/diffeq/first/phaseline/phaseline.html>.

Материал 06.03.23 баспаға түсті.

***С. С. Алимбекова¹, А. Ф. Нұрғали²**

^{1,2}Казахский национальный женский педагогический университет,

Республика Казахстан, г. Алматы

Материал поступил в редакцию 06.03.23

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье рассмотрены пути решения краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений и обзор работ ученых, изучавших эту задачу. Известно, что в современной науке особое место занимают интегро-дифференциальные уравнения, в том числе краевые задачи для интегрально-дифференциальных уравнений. Работа по решению подобных задач также обширна. Известно, что результат дифференцирования – это интеграл, а результат интегрирования – это дифференциал. А к интегро-дифференциальным уравнениям относятся уравнения, в которых имеются сразу два этих элемента математики. В свою очередь, дифференциал – это производная. Через производную определяется начальное движение процесса. По этой причине решение таких уравнений вызывает некоторые трудности, потому что не всегда есть конкретный ответ, потому что процесс, явление постоянно находится в движении, а не останавливается на одном месте. При изучении какого-либо физического, химического, механического и так даже явления исследователь строит свою математическую модель и математически фиксирует основные законы, управляющие этим явлением. Такой математической моделью будут интегро-дифференциальные уравнения. Существует несколько способов решения интегро-дифференциального уравнения.

Это аналитические, цифровое, параметрические методы. В данной статье рассмотрены несколько видов параметрического метода решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений и примеры, выведенные этим методом.

Ключевые слова: производная, интегро-дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения, дифференциальные вычисления, краевые задачи.

***S. S. Alimbekova¹, A. G. Nurgaliy²**

^{1,2}Kazakh National Women's Pedagogical University,

Republic of Kazakhstan, Almaty

Material received on 06.03.23

ALGORITHM FOR SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR INTEGRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

The paper considers ways to solve the boundary value problem for integral-differential equations and reviews works of scientists who have studied this problem. It is well known that in modern science a special place is occupied by integral-differential equations, including boundary value problems for integral-differential equations. The work on solving such problems is also extensive. It is known that the result of differentiation is the integral, and the result of integration is the differential. Integral-differential equations are equations in which these two elements of mathematics occur simultaneously. The differential, in turn, is the derivative. Through the derivative, the initial motion of the process is defined. For this reason, the solution of such equations causes some difficulties, because there is not always a concrete answer, because the process, the phenomenon is constantly in motion and does not stop in one place. When studying any physical, chemical, mechanical and so on phenomenon, the researcher builds his mathematical model and mathematically fixes the basic laws governing this phenomenon. Such a mathematical model would be the integral-differential equations. There are several ways of solving an integral-differential equation. These are analytical, numerical, and parametric methods. This paper discusses several types of parametric method for solving boundary value problems for integral-differential equations and examples derived by this method.

Keywords: derivative, integral-differential equations, differential equations, differential calculus, boundary value problems.

Теруге 06.03.2023 ж. жіберілді. Басуға 30.03.2023 ж. қол қойылды.

Электрондық баспа

7,50 Mb RAM

Шартты баспа табағы 9,1. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.

Компьютерде беттеген: Е. Е. Калихан

Корректор: А. Р. Омарова, Д. А. Кожас

Тапсырыс № 4020

Сдано в набор 06.03.2023 г. Подписано в печать 30.03.2023 г.

Электронное издание

7,50 Mb RAM

Усл.печ.л. 8,4. Тираж 300 экз. Цена договорная.

Компьютерная верстка Е. Е. Калихан

Корректор: А. Р. Омарова, Д. А. Кожас

Заказ № 4020

«Toraighyrov University» баспасынан басылып шығарылған

«Торайғыров университеті» КЕ АҚ

140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

«Toraighyrov University» баспасы

«Торайғыров университеті» КЕ АҚ

140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

+7(718)267-36-69

e-mail: kereku@tou.edu.kz

www.vestnik.tou.edu.kz

<https://vestnik-pm.tou.edu.kz/>