Торайғыров университетінің
ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Торайгыров университета

ТОРАЙҒЫРОВ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ

Физика, математика және компьютерлік ғылымдар сериясы

1997 жылдан бастап шығады

ВЕСТНИК ТОРАЙГЫРОВ УНИВЕРСИТЕТА

Серия: Физика, математика и компьютерные науки

Издается с 1997 года

ISSN 2959-068X

№ 1 (2023)
Павлодар

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
ТОРАЙГЫРОВ УНИВЕРСИТЕТА

Серия: Физика, математика и компьютерные науки
выходит 4 раза в год

СВИДЕТЕЛЬСТВО
о постановке на переучет периодического печатного издания,
информационного агентства и сетевого издания
№ KZ91VPY00046988
выдано
Министерством информации и общественного развития
Республики Казахстан

Тематическая направленность
публикация материалов в области физики, математики,
механики и информатики

Подписной индекс – 76208

https://doi.org/10.48081/SGQS7560

МРНТИ 27.17.17
https://doi.org/10.48081/NZST4303

***Ин. И. Павлюк**
Новосибирский государственный технический университет, Российская Федерация, г. Новосибирск
*e-mail: inessa7772@mail.ru

О ГРУППОВОМ СРАВНЕНИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОТНОШЕНИЯ СОПРЯЖЕНИЯ

В работе продолжаются исследования по применению теории сравнений для алгебраических структур. Показана важность и практическое применение теории числовых сравнений для исследования алгебраических структур. Понятия числовых сравнений переносятся в теорию групп и рассматриваются групповые сравнения относительно отношения сопряженности на элементах группы. В качестве алгебраической структуры взята произвольная группа. Рассматривается сравнение относительно отношения сопряженности на элементах группы. Предварительно основным результатам доказаны свойства элементов, обратных к элементам класса сопряженных элементов, выполнение закона сопряженности на элементах группы и подстановки в сравнении по отношению сопряжения.

Основной целью работы является поиск решения двух групповых сравнений. В первом случае, какие элементы из группы будут сопрягать любой элемент так, чтобы это сопряжение было сравнимо с самим элементом и второй случай, чтобы это сопряжение было сравнимо с обратным ему элементом.

В результате исследования получили, что множеством решения группового сравнения для первого случая является подгруппа группы. А решение второго сравнения в периодической группе без элементов порядка два есть пустое множество.

Ключевые слова: сопряжение, сравнение, решение сравнения, группа, отношение сопряженности.

Введение

Прежде чем перейти к исследованию свойств группового сравнения [1] элементов группы относительно отношения сопряжения, рассмотрим ключевые моменты теории числовых сравнений, понятия сопряженности и важность изучения свойств отношения сопряженности на элементах алгебраических структур.

Теория числовых сравнений, известная как теория упорядоченных множеств, имеет важные приложения к алгебраическим структурам, особенно к упорядоченным алгебраическим структурам.

Упорядоченная алгебраическая структура – это алгебраическая структура с общим отношением порядка, определенным на ее элементах [2]. Отношение порядка дает возможность сравнивать элементы структуры и определяет отношения между ними. Примерами упорядоченных алгебраических структур являются упорядоченные группы, упорядоченные кольца и упорядоченные поля.

Одним из применений теории числовых сравнений к алгебраическим структурам является изучение свойства полноты. Упорядоченная алгебраическая структура считается полной, если каждое непустое подмножество, ограниченное сверху или снизу имеет наименьшую верхнюю границу (или наибольшую нижнюю границу). Свойство полноты является фундаментальным понятием в анализе и играет решающую роль в развитии исчисления и вещественного анализа.

Другим важным приложением теории числовых сравнений к алгебраическим структурам является изучение свойств монотонных функций. Считается, что функция монотонна, если она сохраняет отношение порядка алгебраической структуры, лежащей в ее основе. Исследование монотонных функций важно для оптимизации, например, изучаются задачи оптимизации на дифференцируемых множествах [3]. Результаты используются в промышленности и в развитии прикладной математики.

Теория числовых сравнений также используется при изучении алгебраических структур, которые имеют определенное на них отношение порядка, которое не является полным, а скорее частичным. Частичные порядки могут быть использованы для определения таких понятий, как верхняя и нижняя границы, а также для изучения свойств решетчатых структур, которые представляют собой частично упорядоченные алгебраические структуры с наибольшей нижней границей и наименьшей верхней границей.

В целом, теория числовых сравнений предоставляет мощный инструмент для понимания отношений между элементами алгебраической структуры и для анализа свойств функций, определенных на этой структуре. Эта теория применяется в криптографии и теории шифрования информации. В связи с этим изучение аналогов свойств числовых сравнений в теории групп является актуальным. В данном исследовании переносятся понятия числовых сравнений в теорию групп и рассматриваются уже групповые сравнения [4] относительно отношения сопряженности на элементах группы.

Введение понятия сопряженности немецким математиком Фробениусом в конце XIX века стало крупным прорывом в области теории групп, имевшим далеко идущие последствия для алгебры, геометрии и физики. Это понятие относится к отношениям между элементами группы, которые связаны внутренним автоморфизмом, или если они могут быть преобразованы друг в друга путем применения автоморфизма к одному из них. Более конкретно, учитывая группу G и два элемента a и b в G, говорят, что b является сопряженным элементом a, если существует элемент g в G такой, что $b = g^{-1}ag$, т.е. b получается путем сопряжения a с g [5].

Почему важно изучать свойства этого понятия? Потому, что оно позволяет классифицировать элементы в группе в соответствии с их свойствами симметрии. Элементы, сопряженные друг с другом, обладают многими важными свойствами, включая одинаковый порядок и одинаковый класс сопряженности. Классы сопряженности, это подмножества группы, состоящие из всех элементов, которые сопряжены друг с другом. Они играют ключевую роль в понимании структуры группы, и многие теоретико-групповые понятия [6], такие как централизаторы, нормализаторы и коммутаторы, определяются в терминах сопряженных элементов.

Материалы и методы

Рассмотрим алгебраическую структуру – группу G и отношение сопряженности двух ее элементов a и b. Используя символ $"{}_c\equiv"$ для обозначения отношения сопряженности, введенный ранее в работе [7], и язык теории множеств ($"\exists"$ – квантор существования, $\forall$ – квантор общности, $"\overset{def}{\Leftrightarrow}"$ – «эквивалентно по определению», $"="$ – «равно по определению».), запишем определение сопряженности двух элементов в виде формулы:

$$\left(a_c\equiv b\right)\overset{def}{\Leftrightarrow}\left(\exists x \in G\left(a^x = b\right) \mid a^x = x^{-1}ax\right), \tag{1}$$

Отношение сопряженности $"{}_c\equiv"$ на элементах группы G является отношением эквивалентности, и разбивает все элементы группы на непересекающиеся классы эквивалентных элементов.

Элемент a из G образует класс $\overset{c\equiv}{a}$ сопряженных элементов. Если взять любой представитель класса $\overset{c\equiv}{a}$, например, элемент b, то он определит тот же класс:

$$\left(\forall b\in \overset{c\equiv}{a}\right)\left(\overset{c\equiv}{b}=\overset{c\equiv}{a}\right). \tag{2}$$

Рассмотрим групповые сравнения $a^x{}_c{\equiv}\, a$ и $a^x{}_c{\equiv}\, a^{-1}$ относительно отношения сопряженности и будем искать соответствующие им решения $R\left(a^x{}_c{\equiv}\, a\right)$ и $R\left(a^x{}_c{\equiv}\, a^{-1}\right)$.

Для решения поставленной задачи используем современные методы классической алгебры и наиболее устоявшиеся результативные теоретико-групповые методы [8] с использованием языка исчисления предикатов [9].

Результаты и обсуждение

Предварительно рассмотрим свойства элементов, обратных к элементам класса сопряженных элементов, выполнение закона сопряженности на элементах группы и подстановку в сравнении по отношению сопряжения [10].

Предложение 1. В группе G истинна формула

$$(\forall a\in G)\left(\left(\overset{c\equiv}{a}\right)^{-1}=\overset{c\equiv}{a^{-1}}\right), \tag{3}$$

элементы, обратные к элементам класса сопряженных элементов – есть класс сопряженных элементов.

Доказательство следует из соотношения

$$(\forall g\in G)\left(\overset{c\equiv}{a}\right)^{-1}=\left(a^g\right)^{-1}=\left(g^{-1}ag\right)^{-1}=g^{-1}a^{-1}g=\left(a^{-1}\right)^g=\overset{c\equiv}{a^{-1}}.$$

Предложение 2 (закон сопряжения). В группе имеет место формула

$$(\forall g\in G)\left(\left(a^g{}_c{\equiv}\, b^g\right)\Leftrightarrow\left(a_c{\equiv}\, b\right)\right).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $(\forall g\in G)\left(a^g{}_c{\equiv}\, b^g\right)$. Тогда из сравнения $a^g{}_c{\equiv}\, b^g$ следует, что $(\exists x\in G)\left(a^{gx}=b^g\right)$ или $a^{gag^{-1}}=b$ и $a_c{\equiv}\, b$.

Достаточность. Пусть теперь $a_c{\equiv}\, b$. Тогда $(\forall g\in G)\left(a,b\in \overset{c\equiv}{a}=\left(\overset{c\equiv}{a}\right)^g=a^G\right).$

Таким образом, $a^g, b^g\in \overset{c\equiv}{a}$ и $(\exists x\in G)\left(a^{gx}=b^g\right)$, или $(\forall g\in G)\left(a^g{}_c{\equiv}\, b^g\right)$.

Предложение доказано.

Предложение 3 (подстановка в сравнении по сопряжению). Если $a^x{}_c\equiv b$ и $a_c\equiv c$, то $c^x{}_c\equiv b$.

Доказательство. Из сравнения $a_c\equiv c$ в силу предложения 2 получаем, что $a^x{}_c\equiv c^x$. Из свойства транзитивности отношения "$_c\equiv$" следует, что $c^x{}_c\equiv a^x{}_c\equiv b$ и $c^x{}_c\equiv b$.

Предложения доказано.

Теорема 1. Решения $R\left(a^x{}_c\equiv a\right)$ сравнения $a^x{}_c\equiv a$ в группе G составляют подгруппу группы G.

Доказательство. Очевидно, $R\left(a^e{}_c\equiv a\right)$ удовлетворяет сравнению

$a^x{}_c\equiv a$. Таким образом, $\mathring{a}\in R\left(a^x{}_c\equiv a\right)$. Докажем, что

$$\left(\forall x\in R\left(a^x{}_c\equiv a\right)\right)\left(\forall x^{-1}\in R\left(a^x{}_c\equiv a\right)\right).$$

Действительно, пусть $x\in R\left(a^x{}_c\equiv a\right)$. Тогда из сравнения $a^x{}_c\equiv a$ по закону сопряжения следует, что $\left(a^x\right)^{x^{-1}}{}_c\equiv a^{x^{-1}}$, $a_c\equiv a^{x^{-1}}$, $a^{x^{-1}}{}_c\equiv a$ и $x^{-1}\in R\left(a^x{}_c\equiv a\right)$. Далее, пусть любые два элемента $y,x\in R\left(a^x{}_c\equiv a\right)$. Тогда $a^y{}_c\equiv a$, $a^x{}_c\equiv a$ и $a_c\equiv a^{y^{-1}}$, $a^x{}_c\equiv a_c\equiv a^{y^{-1}}$, $a^{xy}{}_c\equiv a$. Отсюда следует, что

$$x,y\in R\left(a^x{}_c\equiv a\right).$$

Таким образом, $\left(\forall x,y\in R\left(a^x{}_c\equiv a\right)\right)\left(x\cdot y\in R\left(a^x{}_c\equiv a\right)\right)$. Отсюда следует, что $R\left(a^x{}_c\equiv a\right)$ – подгруппа группы G.

Теорема доказана.

Напомним, что группа называется периодической, если любой e элемент имеет конечный порядок, т. е.

$$\left(\forall a\in G\right)\left(\exists n\in N\right)\left(a^n=e\right),$$

где N – множество натуральных чисел.

Теорема 2. В периодических группе G без элементов порядка два сравнение $a^x{}_c\equiv a^{-1}$ не разрешимо.

Доказательство. Предположим, что $R\left(a^x{}_c\equiv a^{-1}\right)\neq\varnothing$ и $x\in R\left(a^x{}_c\equiv a^{-1}\right)$. Тогда в силу предложения 1 $\left(a^{-1}\right)^x{}_c\equiv\left(a^{-1}\right)^{-1}{}_c\equiv\grave{a}$ и $\left(a^{-1}\right)^x{}_c\equiv a$.

По закону сопряжения применительно к сравнению $\left(a^{-1}\right)^x{}_c\equiv a$ имеем $a^{-1}{}_c\equiv a^{x^{-1}}$ и $a^{x^{-1}}{}_c\equiv a^{-1}$ из двух сравнений $a^x{}_c\equiv a^{-1}$, $a^{x^{-1}}{}_c\equiv a^{-1}$ имеем, $a^x{}_c\equiv a^{x^{-1}}$ и $a^{x^2}{}_c\equiv a$. Таким образом, элемент $x\in R\left(a^x{}_c\equiv a\right)$. Так как множество $R\left(a^x{}_c\equiv a\right)$ – группа (теорема 1), то

$(\forall k \in N)\left(x^{2k} \in R\left(a^x{}_c \equiv a\right)\right)$,

где – N множество натуральных чисел.

Так как в группе G нет элементов порядка 2, то в группе G каждый нетривиальный элемент имеет нечетный порядок, что следует из теоремы Б. Коши [6].

Таким образом, $x^{2k+1} = x^{2k} \cdot x = k \in R\left(a^x{}_c \equiv a\right)$. Так как $R\left(a^x{}_c \equiv a\right)$ – группа и $x^{2k} \in R\left(a^x{}_c \equiv a\right)$, то $x \in R\left(a^x{}_c \equiv a\right)$. Отсюда следует, что

$R\left(a^x{}_c \equiv a^{-1}\right) \subseteq R\left(a^x{}_c \equiv a\right)$.

Из двух сравнений $a^x{}_c \equiv a^{-1}$, $a^x{}_c \equiv a$ следует, что $a_c \equiv a^{-1}$. Отсюда имеем

$(\exists y \in G)\left(a^y = a^{-1}\right)$.

Теперь из равенства $a^y = a^{-1}$ следует $\left(a^y\right)^{-1} = \left(a^{-1}\right)^{-1} = a$, $\left(a^{-1}\right)^y = a$ и $a^{-1} = a^{y^{-1}}$, или $a^{y^{-1}} = a^{-1}$.

Из двух равенств $a^y = a^{-1}$ и $a^{y^{-1}} = a^{-1}$ следует, что $a^y = a^{y^{-1}}$ и $a^{y^2} = \grave{a}$. Отсюда получаем, что $y^2 a = a y^2$ и $y^2 \in C(a)$. Если $ay = ya$, то из равенства $a^y = a^{-1}$ следует, что $a = a^{-1}$ и $a^2 = 1$. Противоречие (группа G не содержит элементов порядка 2).

Таким образом, $ay \neq ya$. Так как $a^{y^2} = \grave{a}$ и $y^2 \in C(a)$, $(\forall t \in N)\left(y^{2t} \in C(a)\right)$, то $y^{2t+1} = y^{2t} \cdot y \in C(a)$. Так как $y^{2t} \in C(a)$, то $y \in C(a)$. Но $ya \neq ay$. Противоречие.

Следовательно, наше предположение о том, что $R\left(a^x{}_c \equiv a^{-1}\right) \neq \varnothing$ неверно.

Теорема доказана.

Следствие 1. Если в периодической группе G сравнение $a^x{}_c \equiv a^{-1}$ разрешимо, то она содержит элементы порядка 2.

Доказательство вытекает из теоремы 2.

Выводы

В результате исследования получили, что множеством решения $R\left(a^x{}_c \equiv a\right)$ группового сравнения $a^x{}_c \equiv a$ является подгруппа группы G (теорема 1), а решение сравнения $R\left(a^x{}_c \equiv a^{-1}\right)$ в периодической группе без элементов порядка два есть пустое множество (теорема 2).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 **Павлюк, И. И.** Сравнения и проблема Черникова в теории групп. Павлодар: ПГУ им. С. Торайгырова. 2002. – 222 с.

2 **Судоплатов, С. В. Овчинникова Е. В.** Дискретная математика. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 279 с.

3 **Xi Yin Zheng.** Convex Optimization Problems on Differentiable Sets // SIAM Journal of Optimization Vol. 2023. V. 33. № 1. S. 338–359.

4 **Павлюк, Ин. И., Павлюк, И. И.** К теории сравнений в группах.// Вестник ПГУ имени С. Торайгырова. Серия физико-математическая. Павлодар. ПГУ. 2004 г.

5 **Холл, М.** Теория групп. – М. : Изд.-во иностранной литературы. 1962. 467 с.

6 **Курош, А. Г.** Теория групп. – М. : Наука. 1967 г., 648 с.

7 **Павлюк, И. И.** Функция классов сопряженных элементов группы. // Вестник ЕНУ им. Л. Н. Гумилева. Астана. 2005. №6(46). 15–19 с.

8 **Мальцев А. И.** Алгебраические системы. М. : Наука, 1970. 392 с.

9 **Судоплатов, С. В., Овчинникова, Е. В.** Математическая логика и теория алгоритмов. М. : Издательство Юрайт, 2021. – 207 с.

10 **Павлюк, И. И., Камерцель, О. А.** О централизаторе сопряжения элементов группы // Вестник ПГУ. Серия физико-математическая. Павлодар. ПГУ. 2005. Т–2. С. 71–75.

REFERENCES

1 Pavlyuk, I. I. Sravneniia i problema Chernikova v teorii grupp [Comparisons and Chernikov's Problem in Group Theory]. Pavlodar : PGU im. S. Toraigyrova. 2002. – 222 p.

2 Sudoplatov, S. V. Ovchinnikova, E. V. Diskretnaia matematika [Discrete Mathematics]. Moscow, Izdatel'stvo Iurait, 2017. – 279 p.

3 **Si In' Chzhen.** Vypuklye zadachi optimizatsii na differentsiruemykh mnozhestvakh [Convex optimization problems on differentiable sets] SIAM Journal of Optimization. 2023. Vol. 33, № 1. pp 338–359.

4 **Pavlyuk In. I., Pavlyuk I. I.** K teorii sravnenij v gruppah [To the theory of comparisons in groups] // Bulletin of PSU named after S. Toraigyrov. Series Physics and Mathematics. Pavlodar. PSU. 2004.

5 **Kholl, M.** Teoriia grupp [Group Theory]. Moscow, izdatel'stvo inostrannoi literatury. 1962. 467 p.

6 **Kurosh, A. G.** Teoriya grupp [Group Theory]. Moscow, – Nauka. – 1967, 648 p.

7 **Pavlyuk, I. I.** Funkciya klassov sopryazhennyh elementov gruppy [Function of classes of conjugate elements of a group]. // Bulletin of the L. N. Gumilyov ENU. Astana.15–19 p.

8 **Mal'tsev, A. I.** Algebraicheskie sistemy [Algebraic systems]. Moscow, Nauka, 1970. – 392 p.

9 **Sudoplatov, S. V., Ovchinnikova, E. V.** Matematicheskaia logika i teoriia algoritmov [Mathematical Logic and Algorithm Theory] M. : Yurite Publishing House. 2021. – 207 p.

10 **Pavlyuk, I. I., Kamercel' O. A.** O centralizatore sopryazheniya elementov gruppy [On the centralizer of conjugation of elements of a group] // Bulletin of PSU. Series in Physics and Mathematics. Pavlodar. PSU. 2005. T–2. P. 71–75.

Материал поступил в редакцию в 06.03.23

***Ин. И. Павлюк**
Новосібір мемлекеттік техникалық университеті,
Ресей Федерациясы, Новосибирск қ.
Материал 06.03.23 баспаға түсті.

ЖҰПТЫҚ ҚАТЫНАСТЫҚҚА ҚАТЫСТЫ ТОПТЫҚ САЛЫСТЫРУ ТУРАЛЫ

Алгебралық құрылымдар үшін салыстыру теориясын қолдану бойынша зерттеулер жалғасуда. Алгебралық құрылымдарды зерттеу үшін сандық салыстыру теориясының маңыздылығы мен практикалық қолданылуы көрсетілген. Сандық салыстыру ұғымдары топ теориясына ауысады және топ элементтеріндегі конъюгация қатынасына қатысты топтық салыстырулар қарастырылады. Алгебралық құрылым ретінде ерікті топ алынады. Топ элементтеріндегі конъюгация қатынасына қатысты салыстыру қарастырылады. Алдын ала негізгі нәтижелер конъюгаттық элементтер класының элементтеріне кері элементтердің қасиеттерін, топ элементтеріндегі конъюгация Заңын орындауды және конъюгацияға қатысты салыстыруды дәлелдеді.

Жұмыстың негізгі мақсаты-екі топтық салыстырудың шешімін табу. Бірінші жағдайда, топтағы қандай элементтер кез-келген элементті жұптастырады, осылайша бұл конъюгация элементтің өзімен салыстырылады, ал екінші жағдайда бұл конъюгация оған қарама-қарсы элементпен салыстырылады.

Зерттеу нәтижесінде бірінші жағдай үшін топтық салыстыру шешімдерінің жиынтығы топтың кіші тобы болып табылатындығы анықталды. А екінші салыстыру шешімі периодтық топта екі реттік элементтері жоқ бос жиын бар.

Кілтті сөздер: коньюгация, салыстыру, салыстыру шешімі, топ, коньюгация қатынасы.

***In. I. Pavlyuk**
Novosibirsk State Technical University,
Russian Federation, Novosibirsk
Material received on 06.03.23.

ABOUT GROUP COMPARISON REGARDING PAIRING RELATIONSHIPS

The work continues research on the application of the theory of comparisons for algebraic structures. The importance and practical application of the theory of numerical comparisons for the study of algebraic structures is shown. The concepts of numerical comparisons are transferred to the theory of groups and group comparisons are considered with respect to the conjugacy relation on the elements of the group. An arbitrary group is taken as an algebraic structure. A comparison is considered with respect to the conjugacy relation on the elements of the group. The properties of elements inverse to the elements of the conjugate element class, the fulfillment of the conjugacy law on the elements of the group and substitution in comparison with the conjugation relation are proved by the main results.

The main purpose of the work is to find a solution to two group comparisons. In the first case, which elements from the group will mate any element so that this pairing is comparable to the element itself and the second case, so that this pairing is comparable to the opposite element.

As a result of the study, it was found that the solution set of the group comparison for the first case is a subgroup of the group. And the solution of the second comparison in a periodic group without elements of order two is an empty set.

Keywords: conjugation, comparison, comparison solution, group, conjugacy relation.

Теруге 06.03.2023 ж. жіберілді. Басуға 30.03.2023 ж. қол қойылды.
Электрондық баспа
7,50 Mb RAM
Шартты баспа табағы 9,1. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.
Компьютерде беттеген: Е. Е. Калихан
Корректор: А. Р. Омарова, Д. А. Кожас
Тапсырыс № 4020

Сдано в набор 06.03.2023 г. Подписано в печать 30.03.2023 г.
Электронное издание
7,50 Mb RAM
Усл.печ.л. 8,4. Тираж 300 экз. Цена договорная.
Компьютерная верстка Е. Е. Калихан
Корректор: А. Р. Омарова, Д. А. Кожас
Заказ № 4020

«Toraighyrov University» баспасынан басылып шығарылған
«Торайғыров университеті» КЕ АҚ
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

«Toraighyrov University» баспасы
«Торайғыров университеті» КЕ АҚ
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.
+7(718)267-36-69

e-mail: kereku@tou.edu.kz
www.vestnik.tou.edu.kz
https://vestnik-pm.tou.edu.kz/