

Торайғыров университетінің
ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Торайғыров университета

ТОРАЙҒЫРОВ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ

Физика-математикалық сериясы
1997 жылдан бастап шығады



ВЕСТНИК ТОРАЙҒЫРОВ УНИВЕРСИТЕТА

Физико-математическая серия
Издается с 1997 года

ISSN 2710-3536

№ 3 (2020)
Павлодар

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ТОРАЙГЫРОВ УНИВЕРСИТЕТА

Физико-математическая серия

выходит 4 раза в год

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о постановке на учет, переучет периодического печатного издания,
информационного агентства и сетевого издания
№ KZ95VPY00029553

выдано

Министерством информации и общественного развития
Республики Казахстан

Тематическая направленность

публикация материалов в области физики, математики,
механики и информатики

Подписной индекс – 76135

Бас редакторы – главный редактор

Тлеукенов С. К.

доктор ф.-м.н., профессор

Заместитель главного редактора Кумеков С. Е., *к.ф.-м.н., доцент*

Ответственный секретарь Талипов О. М. *доктор PhD*

Редакция алқасы – Редакционная коллегия

Оспанов К. Н., *д.ф.-м.н., профессор*

Кутербекоев К. А., *д.ф.-м.н., профессор*

Ибраев Н. Х., *д.ф.-м.н.*

Ткаченко И. М., *д.ф.-м.н., профессор (Испания)*

Демкин В. П., *д.ф.-м.н., профессор (Россия)*

Qadir Abdul *доктор PhD, профессор (Пакистан)*

Lobiyal D. K. *доктор PhD, профессор (Индия)*

Лапчик М. П. *д.пед.н., профессор (Россия)*

Шокубаева З. Ж., *технический редактор*

За достоверность материалов и рекламы ответственность несут авторы и рекламодатели

Редакция оставляет за собой право на отклонение материалов

При использовании материалов журнала ссылка на «Вестник Торайгыров университета» обязательна

Н. Наурызбаев

PhD, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений

Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева
Нур-Султан, Республика Казахстан, nngmath@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ К ПРИБЛИЖЕННОМУ ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ С «СИЛЬНОЙ ОСЦИЛЛЯЦИЕЙ» ДЛЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ С ОЦЕНКАМИ НА ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ¹

Интегралы от сильноосциллирующих функций имеют множество применений, в том числе решение колебательных дифференциальных уравнений и акустики. Такие интегралы трудно поддаются вычислению обычными квадратурными формулами.

В статье изучается вопрос об приближенном вычислении интегралов от произведений двух функций методом тензорных произведений функционалов, в предположении, что одна из них из класса Коробова, а другая сильно осциллирующая.

В основном, разработки по приближенному вычислению интегралов с сильной осцилляцией проводились в одномерном случае. Применяемый в данной работе метод является многомерным и принципиально отличается от всех ранее известных.

Известно, что эта задача лучше всего решается устранением сложности представляемой колебательной функцией. В записи вычислительного агрегата, числовая информация от множителей произведения функций самостоятельны и отделены друг от друга, что позволяет от второй, «беспорядочной» функции брать наилучшую информацию в виде тригонометрических коэффициентов Фурье, в котором заложены его «неожиданности».

¹ Данное исследование проведено в рамках грантового финансирования МОН РК, проект № AP05136219

Получены общая формула приближенного вычисления интегралов с «сильной осцилляцией», в которой в явном виде выписан вычислительный агрегат в общем виде зависящий от методов суммирования и возникающая при этом оценка погрешности.

Ключевые слова. Функции с высокой осцилляцией, приближенное интегрирование, класс Коробова, тензорное произведение функционалов, вычислительный агрегат.

Введение

Линейные функционалы относятся к основным математическим объектам.

Запись линейного функционала в интегральном виде

$$I(f) \equiv I_g(f) = \int_{[0,1]^2} f(x) \bar{g}(x) dx \quad (1)$$

при фиксированной функции $g(x)$ охватывает большое количество конкретных случаев.

Задача исследования состоит в приближенном вычислении таких линейных функционалов по конечным суммам значений функции f с числовыми множителями, зависящими от функции g , определяющей функционал $I(f)$. Различные конкретизации функций g приводят к различным функционалам, широко изучаемых в теоретической математике и с большими применениями в прикладной математике.

Определение функции как соответствия является слишком общим и, в буквальном следовании, непригодным для аналитического использования. Поэтому представление функции в виде разложения по взаимно перпендикулярным единичным ортам (ортонормированной системе) через ряд Фурье, вносит определенность и возможность оперирования с функцией как конкретным математическим (аналитическим) объектом.

Коэффициент Фурье как величина проекции функции на орт осуществляет прямую связь между функцией и ее разложением по ортогональной системе.

Тем самым, коэффициенты Фурье относятся к основным математическим объектам.

Стало быть, задача приближенного вычисления линейных функционалов, включающих в себя коэффициенты Фурье, имеет самостоятельное значение и, очевидно, многочисленные вычислительные применения в том же объеме, что и ряды Фурье.

Задача вычисления коэффициентов Фурье и им подобных интегралов от произведений с быстро колеблющимися функциями в соответствии со

Данная статья посвящена случаю интегралов (1) от произведения произвольной суммируемой функции с ортом

Задаче приближения интеграла (1) посвящена обширная литература (см., напр., [1-7]).

Материалы и методы. Основной метод исследования состоит в выборе соответствующей конкретизации общей формулы из [8] (необходимые определения и обозначения см. там же)

$$(B^{(1)} \otimes \dots \otimes B^{(s)})(f) = \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in \Omega} (\theta_{v_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \theta_{v_s}^{(s)})(f) = \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in Z_{\Omega}^s} \sum_{m \in M} \langle f, \Phi_m \rangle \prod_{j=1}^s \theta_{v_j}^{(j)}(\varphi_{m_j}^{(j)}) = \sum_{m \in M} \langle f, \Phi_m \rangle \sum_{\{v_1, \dots, v_s\} \in Z_{\Omega}^s} \prod_{j=1}^s \theta_{v_j}^{(j)}(\varphi_{m_j}^{(j)})$$

Эта формула «авторская» в том смысле, что получена в ИТМиНВ в результате уточнения идеи, лежащей в основе метода Смоляка [9] и распространении ее на общий случай ортонормированных полных систем.

Результаты и обсуждение. В данной статье приведены результаты по применению тензорных произведений функционалов к приближенному вычислению линейных функционалов $\ell_g(f) = \int f(x) \overline{g(x)} dx$ с $g(x) = e^{2\pi i(m, x)} (m \in Z^s)$ для индивидуальной функции и классов Коробова.

Определение. Пусть даны $s = 1, 2, \dots$ и $r > 0$. Класс Коробова E_s^r , по определению, есть множество всех 1-периодических по каждой из своих s переменных, интегрируемых на $[0, 1]^s$ функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье-Лебега которых удовлетворяют неравенству

$$\left| \hat{f}(m) \right| = \left| \int_{[0, 1]^s} f(x) e^{-2\pi i(m, x)} dx \right| \leq \prod_{j=1}^s (\max \{1, |m_j|\})^{-r} \cdot (m \in Z^s)$$

Отметим что при $r > 1$ все функций класса E_s^r непрерывны. Справедлива

Теорема. Пусть $\nu^{(0)} \geq 0$ и для всякого целого $\nu \geq \nu^{(0)}$ задана действительная последовательность $\{\lambda_n^{(\nu)}\}_{n \in Z}$ такая, что $\lambda_n^{(\nu)} = \lambda_{-n}^{(\nu)}$ ($n = 1, 2, \dots$) и $\lambda_n^{(\nu)} = 0$ при всех $n \geq 2^{\nu-1}$,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \lambda_n^{(\nu)} = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{\nu: 2^{\nu-1} > |n|} |\lambda_n^{(\nu)} - \lambda_n^{(\nu-1)}| < \infty \quad (n \in Z).$$

Пусть также $m = (m_1, \dots, m_s) \in Z^s$. Тогда для класса E_s^r ($r > 1$) имеет место неравенство

$$\begin{aligned}
& \sup_{f \in E_T^s} \left| \int f(x) e^{-2\pi(m,x)} dx - \right. \\
& - \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in \Omega \subset Z_{v(0)}^s} \frac{1}{2^{v_1 + \dots + v_s}} \sum_{k_i=0}^{2^{v_i-1}} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{v_s-1}} \left\{ \prod_{j=1}^s \sum_{n_j=-2^{v_j-1}}^{2^{v_j-1}} \left[\lambda_{n_j}^{(v_j)}(j) - \operatorname{sgn}(v_j - v_j^{(0)}) (1 + (-1)^{k_j}) \lambda_{n_j}^{(v_j-1)}(j) \right] \right. \\
& \quad \times \left. \left[\frac{1}{2\pi(n_j - m_j)} \right]^* e^{\frac{\pi i k_j}{2^{v_j-1}}} (e^{2\pi(n_j - m_j)} - 1) \right\} f\left(\frac{k_1}{2^{v_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{v_s}}\right) \Bigg| \leq \\
& \leq \sum_{(v_1, \dots, v_s) \in Z_{v(0)}^s \setminus \Omega} \sum_{(\varphi_1, \dots, \varphi_s): \varphi_j=1,2,3 \atop (j=1, \dots, s)} \sum_{(\tau_1, \dots, \tau_s) \in A_{\varphi_1}^{(v_1)} \times \dots \times A_{\varphi_s}^{(v_s)}} \left| \prod_{j=1}^s \int_{A_{\varphi_j}^{(v_j)}} \delta_{\varphi_j}^{(v_j)}(\tau_j, x_j) e^{-2\pi i m_j x_j} dx_j \right| \times \\
& \quad \times \prod_{j=1}^s \left(\max \left\{ 2^{v_j} t_j + \tau_j, 1 \right\} \right)^r,
\end{aligned}$$

где

$$A_1^{(v)} = \{ \tau \in Z : |\tau| < 2^{v-2} \},$$

$$A_2^{(v)} = \{ \tau \in Z : 2^{v-2} < |\tau| < 2^{v-1} \},$$

$$A_3^{(v)} = \{ \tau = -2^{v-1}; -2^{v-2}; 2^{v-2} \},$$

$$\delta_1^{(v)}(\tau, x) = \left[\lambda_{\tau}^{(v)} - \operatorname{sgn}(v - v^{(0)}) \lambda_{\tau}^{(v-1)} \right] e^{2\pi i \tau x}, \quad \text{если } \tau \in A_1^{(v)},$$

$$\delta_2^{(v)}(\tau, x) = \left[\lambda_{\tau}^{(v)} - \operatorname{sgn}(v - v^{(0)}) \lambda_{\tau - \operatorname{sgn} \tau 2^{v-1}}^{(v-1)} \right] e^{-\operatorname{sgn} \tau 2\pi 2^{v-1} x} e^{2\pi i \tau x}, \quad \text{если } \tau \in A_2^{(v)},$$

$$\delta_3^{(v)}(\tau, x) = \begin{cases} \lambda_{-2^{v-1}}^{(v)} e^{-2\pi 2^{v-1} x} + \lambda_{2^{v-1}}^{(v)} e^{2\pi 2^{v-1} x} - \operatorname{sgn}(v - v^{(0)}) \lambda_0^{(v-1)}, & \text{если } \tau = -2^{v-1}, \\ \lambda_{\pm 2^{v-2}}^{(v)} e^{2\pi (\pm 2^{v-2}) x} - \operatorname{sgn}(v - v^{(0)}) \left[\lambda_{-2^{v-2}}^{(v-1)} e^{-2\pi 2^{v-2} x} + \lambda_{2^{v-2}}^{(v-1)} e^{2\pi 2^{v-2} x} \right], & \text{если } \tau = \pm 2^{v-2}, \end{cases}$$

$$\left[\frac{1}{y} \right]^* = \begin{cases} \frac{1}{y}, & \text{если } y \neq 0, \\ 1, & \text{если } y = 0. \end{cases}$$

Выводы. Таким образом, в случае $g(x) = e^{2\pi(m,x)}$ ($m \in Z^s$) получена общая формула приближенного вычисления интегралов «сильной (высокой)

осцилляции», в которой в явном виде выписан искомый вычислительный агрегат, в общем виде зависящий от методов суммирования. Также выписана оценка возникающей при этом погрешности.

Величины $\{\lambda_n^{(\nu)}\}$ в вычислительных агрегатах составляют большой набор методов суммирования, каждая из которых порождает самостоятельную оптимизационную задачу с содержательным результатом.

Список использованных источников

1 **Deaño, A., Huybrechs D., Iserles A.** Computing Highly Oscillatory Integrals. – Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2017. – 207 p.

2 **Iserles, A.** On the numerical quadrature of highly-oscillatory integrals I : Fourier transforms // IMA J. Num. Anal. – 2004. – Vol. 24. – P.1110–1123.

3 **Iserles, A.** On the numerical quadrature of highly-oscillatory integrals II : Irregular oscillators // IMA J. Num. Anal. – 2005. – Vol.25. – P. 25-44.

4 **Filon, L. N. G.** On a quadrature formula for trigonometric integrals // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1928. – Vol. 49. – P. 38–47.

5 **Жилейкин, Я. М., Кукаркин, А. Б.** Об оптимальном вычислении интегралов от быстроосциллирующих функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1978. – Т. 18, № 2. – С. 294–301

6 Ильин А.М. Данилин А. Р. Асимптотические методы в анализе. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 248 с.

7 **Levin, D.** Procedures for computing one-and-two dimensional integrals of functions with rapid irregular oscillations // Math. Comp. –1982. –Vol. 38, –P. 531–538.

8 **Темиргалиев Н.** Тензорные произведения функционалов и их применения // Докл. РАН. – 2010. – Т. 430. №4. – С. 460–465.

9 **Смоляк, С. А.** Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. –1963. – Т. 148, №5. – С. 1042–1045.

References

1 **Deaño, A., Huybrechs D., Iserles A.** Computing Highly Oscillatory Integrals. – Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2017. – 207 p.

2 **Iserles, A.** On the numerical quadrature of highly-oscillatory integrals I: Fourier transforms In IMA J. Num. Anal. – 2004. – Vol.24. – P. 1110–1123.

3 **Iserles, A.** On the numerical quadrature of highly-oscillatory integrals II: Irregular oscillators In IMA J. Num. Anal. – 2005 – Vol. 25. – P. 25–44.

4 **Filon, L. N. G.** On a quadrature formula for trigonometric integrals //Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1928. – Vol. 49. – P.38–47.

5 **Zhilejkin Ja. M., Kukarkin A. B.** Ob optimal'nom vychislenii integralov ot bystrooscillirujushhih funkcij [Optimal computation of integrals of rapidly oscillating functions]. In Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. [Computational Mathematics and Mathematical Physics]. – 1978. – Vol. 18. – № 2. – P. 294–301

6 Ил'ин А. М. Данилин А. Р. Асимптотические методы в анализе [Илин А.М. Данилин А.Р. Asymptotic methods in analysis]. –М. : FIZMATLIT, 2009. – 248 p.

7 **Levin, D.** Procedures for computing one-and-two dimensional integrals of functions with rapid irregular oscillations, In Math. Comp. – 1982. – Vol. 38, – P. 531–538.

8 **Temirgaliev, N.** Tenzornye proizvedeniya funkcionalov i ih primeneniya [Tensor products of functionals and their applications]. In Doklady RAN [Reports of the Russian Academy of Sciences]. – 2010. – Vol. 430. №4. – P. 460–465.

9 **Smoljak, C. A.** Kvadrurnye i interpoljacionnye formuly na tenzornyh proizvedenijah nekotoryh klassov funkcij [Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of function]. Dokl. Akad. Nauk SSSR [Reports of the USSR Academy of Sciences]. – 1963. – Vol. 148. – №5. – P. 1042–1045.

Материал поступил в редакцию 18.09.20.

Н. Наурызбаев

Дербес тригонометриялық фурье коэффициенттеріне бағалаулары арқылы берілген функциялар класстары үшін жоғары осцилляциялы интегралдарды жуықтап есептеуде функционалдардың тензорлық көбейтіндісі әдісін қолдану

Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті,
Теориялық математика және ғылыми есептеулер институтының аға
Қазақстан Республикасы, Нұр-Сұлтан.
Материал 18.09.20 баспаға түсті.

Жоғары тербелмелі интегралдар көптеген салаларда, соның ішінде тербелмелі дифференциалдық және акустика теңдеулерін шешуде қолданбалары бар. Мұндай интегралдарды классикалық квадратуралық формулалармен есептеу қиындықтар тудызады.

Мақалада функционалдардың тензорлық көбейтінділері әдісімен бірі Коробов класынан, ал екіншісі жоғары осцилляциялы

екі функцияның көбейтіндісінің интегралын жуықтап есептеу мәселесі зерттеледі.

Негізінен, тербелісі күшті интегралдарды жуықтап есептеу бойынша зерттеулер бір өлшемді жағдайда жүргізілді. Бұл жұмыста қолданылатын әдіс көпөлшемді және бұрынғы белгілі зерттеулерден түбегейлі өзгеше.

Осы мәселе ұсынылған тербелмелі функцияның күрделілігін жою арқылы шешілетіні белгілі. Есептеу агрегатының жазбасында функциялар көбейткіштерінен алынған сандық мәліметтер тәуелсіз және бір-бірінен ажыратылған, бұл екінші, «тосын сыйлары» бар, «тәртіпсіз» функциядан тригонометриялық Фурье коэффициенті түрінде ең жақсы ақпаратты алуға мүмкіндік береді.

«Күшті осцилляциялы» интегралдарды қосындылау әдістеріне байланысты жуықтап есептеу агрегатының айқын жалпы формуласы берілді және осы жағдайда қателік бағалауы алынды.

Жуықтау кезінде пайда болатын қателіктің реттік бағалауы анықталған.

Кілтті сөздер: Жоғары осцилляциялы функция, жуықтап интегралдау, Коробов класы, функционалдардың тензорлық көбейтіндісі, жуықтау агрегаты.

N. Nauryzbayev

Application of tensor products of functionals to approximate calculation of highly oscillatory integrals for classes of functions with estimates for individual trigonometric fourier coefficients

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computation,
L.N. Gumilyov Eurasian National University
Republic of Kazakhstan, Nur-Sultan.
Material received on 18.09.20.

Oscillatory integrals have many applications, including solving oscillatory differential equations and acoustics. Such integrals are difficult to compute by ordinary quadratic formulas.

In the article, the question of the approximate calculation of integrals of the products of two functions by the method of tensor products of functionals is studied. Assuming that one of them is from the Korobov class and the other is strongly oscillating.

Basically, developments on the approximate calculation of integrals with strong oscillations were carried out in the one-dimensional case. The

method used in this work is multidimensional and fundamentally different from all previously known.

It is known that this problem is best solved by eliminating the complexity of the represented oscillatory function. In the expression of a computational aggregate, the numerical information from the multipliers of the product of functions are independent and separated from each other, which allows taking the best information from the second, «chaotic» function in the form of trigonometric Fourier coefficients, which contains its «surprises».

A general formula for the approximate calculation of Highly Oscillatory Integrals is obtained, in which a computational aggregate is written out in an explicit form in a general form depending on the summation methods and the resulting error estimate.

Keywords. Highly oscillatory functions, approximate integration, Korobov class, tensor product of functionals, computational aggregate.

Теруге 18.09.2020 ж. жіберілді. Басуға 09.10.2020 ж. қол қойылды.

Электрондық баспа

1,75 Mb RAM

Шартты баспа табағы 6,6. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.

Компьютерде беттеген Е. М. Абенов

Корректорлар: А. Р. Омарова

Тапсырыс № 3727

Сдано в набор 18.09.2020 г. Подписано в печать 09.10.2020 г.

Электронное издание

1,75 Mb RAM

Услпеч.л. 6,6. Тираж 300 экз. Цена договорная.

Компьютерная верстка Е. М. Абенов

Корректоры: А. Р. Омарова

Заказ № 3727

«Toraighyrov University» баспасынан басылып шығарылған

Торайғыров университеті

140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

«Toraighyrov University» баспасы

Торайғыров университеті

140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

67-36-69

e-mail: kereku@tou.edu.kz

www.vestnik.tou.edu.kz