

Торайғыров университетінің
ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Торайғыров университета

ТОРАЙҒЫРОВ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ

Физика, математика және компьютерлік
ғылымдар сериясы
1997 жылдан бастап шығады



ВЕСТНИК ТОРАЙҒЫРОВ УНИВЕРСИТЕТА

Серия: Физика, математика
и компьютерные науки
Издается с 1997 года

ISSN 2959-068X

№ 4 (2023)
Павлодар

**НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
ТОРАЙГЫРОВ УНИВЕРСИТЕТА**

Серия: Физика, математика и компьютерные науки
выходит 4 раза в год

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о постановке на переучет периодического печатного издания,
информационного агентства и сетевого издания
№ KZ91VPY00046988

выдано

Министерством информации и общественного развития
Республики Казахстан

Тематическая направленность

публикация материалов в области физики, математики,
механики и информатики

Подписной индекс – 76208

<https://doi.org/10.48081/EKIW3862>

Бас редакторы – главный редактор

Тлеукинов С. К., *д.ф-м.н., профессор*

Заместитель главного редактора Искулов Н. А., *к.ф-м.н., профессор*

Ответственный секретарь Жумабеков А. Ж., *PhD доктор*

Редакция алкасы – Редакционная коллегия

Esref Adali,	<i>PhD доктор, профессор (Турция);</i>
Abdul Qadir Rahimoon,	<i>PhD доктор, профессор (Пакистан);</i>
Донбаев К. М.,	<i>д.ф-м.н., профессор;</i>
Демкин В. П.,	<i>д.ф-м.н., профессор (Российская Федерация);</i>
Жумадиллаева А. К.,	<i>к.т.н., профессор;</i>
Ибраев Н. Х.,	<i>д.ф-м.н., профессор;</i>
Косов В. Н.,	<i>д.ф-м.н., профессор;</i>
Сенцова С. М.,	<i>д.пед.н., профессор;</i>
Шоканов А. К.,	<i>д.ф-м.н., профессор</i>
Омарова А. Р.,	<i>технический редактор</i>

За достоверность материалов и рекламы ответственность несут авторы и рекламодатели

Редакция оставляет за собой право на отклонение материалов

При использовании материалов журнала ссылка на «Вестник Торайгыров
университета» обязательна

© Торайгыров университет

МРНТИ 27.31.17

<https://doi.org/10.48081/PIQT7305>

***П. Б. Бейсебай¹, М. Ш. Тилепиев², Е. А.Ақжігітов²,
Н. Т. Исаева³, К. Д. Абдибекова³**

¹Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университеті,

Қазақстан Республикасы, Астана қ.;

²С. Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университеті,

Қазақстан Республикасы, Астана қ.;

³Әл-Фараби атындағы қазақ ұлттық университеті,

Қазақстан Республикасы, Алматы қ.

*e-mail: beisebai@mail.ru

ТҰРАҚТЫ КОЭФФИЦИЕНТТІ СЫЗЫҚТЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ЖҮЙЕЛЕРІНІҢ ШЕШІМДЕРІН ҚҰРУ

Бұл мақалада екінші ретті тұрақты коэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеулер және олардың жүйелерінің шешімдерін құрудың оқырмандарға ұсынылатын дәстүрлік әдістен ерекшеленетін жолы көрсетіледі. «Дифференциалдық теңдеулер немесе теңдеулер жүйесіндегі сипаттамалық теңдеуді шешуде дискриминанты теріс болған жағдайға сәйкес комплекс сан ұғымының мүлде қолданбауымен ерекшелінеді. Ұсынылған әдіс, сондай-ақ, біртекті теңдеулер жағдайында, екінші ретті сызықтық теңдеулердің сызықтық тәуелсіз дербес шешімдерін құру барысында бірінші ретті сызықтық теңдеулерді шешуде кездесетін Бернуллі әдісінің көмегімен енгізілуінде, әрі алынған алгоритм біртекті теңдеулер жүйесінің шешімін құруда да қолданылады. Біртекті емес теңдеулердің оң жағында экспоненциалдық функция және косинус пен синустың айнымалылы коэффициент-көпмүшелікті сызықтық комбинациясының көбейтіндісі берілгенде теңдеудің дербес шешімдері сипаттамалық теңдеудің түбірлерінен байланыссыз анықталады. Қарастырылып отырған мәселеде дифференциалдық теңдеулерді тиімді әдістермен шығару жолдары, яғни дәстүрлі әдіспен салыстыра отырып, әртүрлі есептің шығару жолдарын ерекшелендіріп айқын қарастырған. Екінші ретті тұрақты коэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеулерді

және олардың жүйелерінің шешімдерін құру жолдары болашақта студенттерге практикалық сабақтарда және өзіндік жұмыстарда (СӨЖ, СОӨЖ) есеп шығару барысында кең қолданыста болады деп үміттенеміз.

Кілтті сөздер: дифференциалдық теңдеу, дифференциалдық теңдеулер жүйесі, сипаттамалық теңдеулер, теңдеудің дербес шешімі, комплекс сан.

Кіріспе

Математикалық білім бере отырып алдымызға қояр негізгі мақсатымыз – бүгінгі таңда өмір, қоғам талабына сай кәсіби мамандық алуына қажетті белгілі математикалық білім жүйесін қолдана білетін, экономикалық, нарықтық қатынасты тереңнен түсінетін, жаңаша ойлау қабілеті бар, саяси ахуалды, мәдениетті жеке тұлғаны қалыптастыру.

Кейбір мамандықтардың типтік бағдарламасына сәйкес математика пәнін оқытуда комплекс сандар ұғымы және комплекс мәнді функциялар түсінігі мүлде қарастырылмайды. Сондай-ақ, екінші ретті тұрақты коэффициентті сызықтық біртекті және біртекті емес дифференциалдық теңдеулердің сипаттамалық теңдеулері нақты түбірге ие болмаған жағдайда немесе теңдеудің оң жағы экспоненциалды функциямен және косинус пен синус функцияларының сызықтық комбинациясының көбейтіндісі түрінде берілген жағдайда, сызықтық тәуелсіз шешімдерінің түрін іздеуді белгілі жайт ретінде еш ұйғарымсыз қабылдайды [1–2].

Жұмыстың мазмұнын ұсынудың толықтығы үшін алдымен [5–6] әдебиеттерінде келтірілген тұрақты коэффициенттері бар екінші ретті дифференциалдық теңдеудің шешімін құру әдісінің мәнін қысқаша баяндаймыз.

Материалдар мен әдістер

Коэффициенттері тұрақты, нақты p және q сандары болатын сызықтық біртекті емес екінші ретті дифференциалдық теңдеуді қарастырайық

$$y'' + py' + qy = f(x). \quad (1)$$

Сызықтық біртекті емес тұрақты коэффициентті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі

$$y = \bar{y} + \tilde{y}, \quad (2)$$

түрінде болады, мұндағы $\bar{y}$ - сәйкес

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (3)$$

біртекті теңдеуінің жалпы шешімі, ал $\tilde{y}$ - (1) біртекті емес теңдеуінің дербес шешімі.

Біртекті емес теңдеудің дербес шешімін құруды қарастырайық [5–6].

1. Келесі түрдегі біртекті емес теңдеуді қарастырайық

$$y'' + py' + qy = P_n(x), \quad (4)$$

мұндағы

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n \quad (5)$$

коэффициенттерімен берілген n - ші ретті көпмүшелік.

$\tilde{y}$ дербес шешімін мына түрде іздейміз

$$\tilde{y} = x^m \cdot u_n(x), \quad (6)$$

мұндағы m - белгісіз сан, ал

$$u_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-4} x^4 + A_{n-3} x^3 + A_{n-2} x^2 + A_{n-1} x + A_n$$

коэффициенттері белгісіз n - ші ретті көпмүшелік.

$\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ туындыларын тауып (4) теңдеуге қоямыз

$$m(m-1)x^{m-2} \cdot u_n(x) + mx^{m-1} [2u_n'(x) + p \cdot u_n(x)] + x^m [u_n''(x) + p \cdot u_n'(x) + q \cdot u_n(x)] = P_n(x) \quad (7)$$

Өртүрлі жағдайды қарастырайық. [5–6]

А) егер $q \neq 0$, яғни $k \neq 0$, $k_2 \neq 0$ болса, онда бұл жағдайда, (7) теңдеуі орындалуы үшін $m = 0$ болуы керек, сонда (7) теңдеуінен

$$u_n''(x) + p \cdot u_n'(x) + q \cdot u_n(x) = P_n(x) \quad (8)$$

теңдеуін аламыз. Әрі қарай $u_n'(x)$, $u_n''(x)$ туындыларын тауып

$$\begin{aligned} u_n'(x) &= nA_0 x^{n-1} + (n-1)A_1 x^{n-2} + (n-2)A_2 x^{n-3} + \dots + \\ &+ 4A_{n-4} x^3 + 3A_{n-3} x^2 + 2A_{n-2} x + A_{n-1}, \\ u_n''(x) &= n(n-1)A_0 x^{n-2} + (n-1)(n-2)A_1 x^{n-3} + (n-2)(n-3)A_2 x^{n-4} + \dots + \\ &+ 4 \cdot 3A_{n-4} x^2 + 3 \cdot 2A_{n-3} x + 2 \cdot 1A_{n-2} \end{aligned}$$

оларды (8) теңдеуіне қойсақ:

$$\begin{aligned} & q \cdot A_0 x^n + (q \cdot A_1 + p \cdot n \cdot A_0) x^{n-1} + [q \cdot A_2 + p \cdot (n-1) \cdot A_1 + n(n-1) \cdot A_0] x^{n-2} + \\ & [q \cdot A_3 + p \cdot (n-2) \cdot A_2 + (n-1)(n-2) \cdot A_1] x^{n-3} + \dots + (q \cdot A_{n-2} + 3p \cdot A_{n-3} + 4 \cdot 3 \cdot A_{n-4}) x^2 + \\ & + (q \cdot A_{n-1} + 2p \cdot A_{n-2} + 3 \cdot 2 \cdot A_{n-3}) x + (q \cdot A_n + p \cdot A_{n-1} + 2 \cdot 1 \cdot A_{n-2}) = \\ & = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n. \end{aligned}$$

X айнымалысының бірдей дәрежелерінің алдындағы коэффициенттерін теңестіріп, келесі жүйені аламыз:

$$\begin{aligned} x^n : & \quad q \cdot A_0 = a_0 \\ x^{n-1} : & \quad q \cdot A_1 + p \cdot n \cdot A_0 = a_1 \\ x^{n-2} : & \quad q \cdot A_2 + p \cdot (n-1) \cdot A_1 + n(n-1) \cdot A_0 = a_2 \\ x^{n-3} : & \quad q \cdot A_3 + p \cdot (n-2) \cdot A_2 + (n-1)(n-2) \cdot A_1 = a_3 \\ & \quad \dots \\ x^2 : & \quad q \cdot A_{n-2} + 3p \cdot A_{n-3} + 4 \cdot 3 \cdot A_{n-4} = a_{n-2} \\ x : & \quad q \cdot A_{n-1} + 2p \cdot A_{n-2} + 3 \cdot 2 \cdot A_{n-3} = a_{n-1} \\ x^0 : & \quad q \cdot A_n + p \cdot A_{n-1} + 2 \cdot 1 \cdot A_{n-2} = a_n \end{aligned}$$

Жүйені шешіп $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ коэффициенттерінің мәндерін табамыз.

Бұл әдісті белгісіз коэффициенттер әдісі деп атайды.

Сонымен, $q \neq 0$ болғанда (4) теңдеудің дербес шешімін аламыз:

$$\tilde{y} = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-2} x^2 + A_{n-1} x + A_n \quad (9)$$

Б) егер $q = 0$ болса, яғни $k_1 = 0$ немесе $k_2 = 0$ болса, онда бұл жағдайда (7) теңдік орындалуы үшін $m = 1$ болуы керек, сонда (7) теңдеуінен

$$x \cdot u_n''(x) + (2 + xp) \cdot u_n'(x) + p \cdot u_n(x) = P_n(x) \quad (10)$$

теңдеуін аламыз. Әрі қарай жоғарыда көрсетілген белгісіз коэффициенттер әдісін пайдаланып $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ коэффициенттерін табамыз.

Сонымен, $q = 0$ болғанда, (4) теңдеуінің дербес шешімі мына түрде болады:

$$\tilde{y} = A_0 x^{n+1} + A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \dots + A_{n-2} x^3 + A_{n-1} x^2 + A_n x. \quad (11)$$

Кейде $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ белгісіз коэффициенттерін (10) теңдеуді қолданбай, $\tilde{y}$ дербес шешімін (4) теңдеуіне қою арқылы да табуға болады.

2. Мына түрдегі біртекті емес теңдеуді қарастырамыз [7-8]

$$y'' + py' + qy = a_0 \cdot e^{ax}, \quad (12)$$

мұндағы a_0, a - берілген тұрақты сандар.

$\tilde{y}$ дербес шешімін мына түрде іздейміз:

$$\tilde{y} = A \cdot x^m \cdot e^{ax} \quad (13)$$

мұндағы m, A - белгісіз тұрақты сандар.

$\tilde{y}', \tilde{y}''$ туындыларын табамыз және оны (12) теңдеуіне қойып, мына теңдеуді аламыз:

$$A[m(m-1)x^{m-2} + m(2a+p)x^{m-1} + (a^2 + pa + q)x^m] = a_0 \quad (14)$$

Өртүрлі жағдайларын қарастырайық.

А) егер a саны (3) сипаттамалық теңдеуінің түбірі болмаса, яғни $k_1 \neq a, k_2 \neq a, a^2 + pa + q \neq 0$, онда бұл жағдайда (12) теңдеу орындалуы үшін $m=0$ болуы керек. (14) теңдеуінен

$$A(a^2 + pa + q) = a_0 \text{ немесе } A = \frac{a_0}{a^2 + pa + q} \text{ екенін табамыз.}$$

Сонда (12) теңдеудің дербес шешімі $\tilde{y} = \frac{a_0}{a^2 + pa + q} e^{ax}$ түрінде болады.

Б) егер a саны (3) сипаттамалық теңдеудің жай түбірі болса, яғни

$k_1 = a, k_2 \neq a, a^2 + pa + q = 0, 2a + p \neq 0$, онда бұл жағдайда (12) теңдеуі орындалуы үшін $m = 1$ болуы керек. (14) теңдеуінен

$$A(2a + p) = a_0 \text{ немесе } A = \frac{a_0}{2a + p} \text{ екенін табамыз. Сонда (12)}$$

теңдеуінің дербес шешімі $\tilde{y} = \frac{a_0}{2a + p} x e^{ax}$ түрінде болады.

В) егер a саны (3) сипаттамалық теңдеудің еселі түбірі болса, яғни

$k_1 = a, k_2 = a, a^2 + pa + q = 0, 2a + p = 0$, онда бұл жағдайда (12) теңдеу орындалуы үшін (14) теңдеуінен $2A = a_0$ немесе $A = \frac{a_0}{2}$ екенін табамыз.

Сонда (12) теңдеудің дербес шешімі $\tilde{y} = \frac{a_0}{2} x^2 e^{ax}$ түрінде болады.

Нәтижелер және талқылау

3. Мына түрдегі біртекті емес теңдеуді қарастырайық [5–6]

$$y'' + py' + qy = P_n(x) \cdot e^{ax}, \quad (15)$$

мұндағы $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n$

коэффициенттерімен берілген n -ретті көпмүшелік, a - берілген тұрақты сан.

$\tilde{y}$ дербес шешімін мына түрде іздейміз $\tilde{y} = x^m \cdot u_n(x) \cdot e^{ax}$, мұндағы $u_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-2} x^2 + A_{n-1} x + A_n$ - коэффициенттері белгісіз n - ретті көпмүшелік, m - белгісіз тұрақты сан. $\tilde{y}', \tilde{y}''$ туындыларын тауып (15) теңдеуге қойып, мына теңдеуді аламыз:

$$n(m-1)x^{m-2} \cdot u_n'(x) + mx^{m-1} [2u_n'(x) + (2a+p)u_n(x)] + x^m [u_n''(x) + (2a+p)u_n'(x) + (a^2 + pa + q) \cdot u_n(x)] = P_n(x) \quad (16)$$

Өртүрлі жағдайды қарастырайық. [7–8]

А) егер a саны (3) сипаттамалық теңдеудің түбірі болмаса, яғни $k_1 \neq a$, $k_2 \neq a$, $a^2 + pa + q \neq 0$, онда бұл жағдайда (16) теңдеу орындалуы үшін $m=0$ болуы керек, бұдан (17) теңдеуді аламыз:

$$u_n''(x) + (2a+p) \cdot u_n'(x) + (a^2 + pa + q) \cdot u_n(x) = P_n(x) \quad (17)$$

Сонда (16) теңдеудің дербес шешімі мына түрде болады:

$$\tilde{y} = u_n \cdot e^{ax} = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-2} x^2 + A_{n-1} x + A_n) e^{ax} \quad (18)$$

Б) егер a саны (3) сипаттамалық теңдеудің жай түбірі болса, яғни $k_1 = a$, $k_2 \neq a$, $a^2 + pa + q = 0$, $2a + p \neq 0$, онда (16) теңдеу орындалуы үшін $m=1$ болуы керек, бұдан (19) теңдеуді аламыз:

$$2u_n'(x) + (2a+p) \cdot u_n(x) + x[u_n''(x) + (2a+p) \cdot u_n'(x)] = P_n(x) \quad (19)$$

Сонда (15) теңдеудің дербес шешімі мына түрде болады:

$$\tilde{y} = x \cdot u_n \cdot e^{ax} = (A_0 x^{n+1} + A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \dots + A_{n-2} x^3 + A_{n-1} x^2 + A_n x) e^{ax} \quad (20)$$

В) егер a саны (3) сипаттамалық теңдеудің еселі түбірі болса, яғни

$k_1 = a$, $k_2 = a$, $a^2 + pa + q = 0$, $2a + p = 0$, онда (16) теңдеу орындалуы үшін $m=2$ болуы керек, бұдан (21) теңдеуді аламыз:

$$u_n(x) + 4x \cdot u_n'(x) + x^2 \cdot u_n''(x) = P_n(x) \quad (21)$$

Ал, (16) теңдеудің дербес шешімі мына түрде болады:

$$\tilde{y} = x^2 \cdot u_n \cdot e^{ax} = (A_0 x^{n+2} + A_1 x^{n+1} + A_2 x^n + \dots + A_{n-2} x^4 + A_{n-1} x^3 + A_n x^2) e^{ax} \quad (22)$$

Өрі қарай белгісіз коэффициенттер әдісін пайдаланып $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ коэффициенттерін табамыз.

4. Мына түрдегі біртекті емес теңдеуді қарастырайық

$$y'' + py' + qy = e^{ax}(a_0 \cos bx + b_0 \sin bx) \quad (23)$$

мұнда a_0, b_0, a, b - берілген тұрақты сандар және $b \neq 0$.

$\tilde{y}$ дербес шешімін мына түрде іздейміз:

$$\tilde{y} = x^m e^{ax}(A \cos bx + B \sin bx)$$

мұнда A, B - белгісіз тұрақты сандар.

$\tilde{y}', \tilde{y}''$ туындыларын тауып, (23) теңдеуге қойсақ (24) теңдеуді аламыз:

$$m(m-1)x^{m-2}(A \cos bx + B \sin bx) + mx^{m-1}[(2a+p)(A \cos bx + B \sin bx) + 2b(-A \sin bx + B \cos bx)] + \\ + x^m[(a^2 - b^2 + pa + q)(A \cos bx + B \sin bx) + (2a+p)b(-A \sin bx + B \cos bx)] = a_0 \cos bx + b_0 \sin bx \quad (24)$$

Өртүрлі жағдайды қарастырайық.

А) егер $a \pm bi$ саны (3) сипаттамалық теңдеудің түбірі болмаса, яғни

$$(a \pm bi)^2 + p(a \pm bi) + q \neq 0 \\ (a^2 - b^2 + pa + q) \pm (2a + p)bi \neq 0.$$

Бұдан $a^2 - b^2 + pa + q \neq 0$ және $2a + p \neq 0$, онда бұл жағдайда (23) теңдеу орындалуы үшін $m = 0$ болуы керек, сонда (24) теңдеуден мына теңдеуді аламыз:

$$(a^2 - b^2 + pa + q)(A \cos bx + B \sin bx) + (2a + p)b(-A \sin bx + B \cos bx) = a_0 \cos bx + b_0 \sin bx \quad (25)$$

және теңдеудің екі жағында тұрған сәйкес $\cos \beta x$ пен $\sin \beta x$ функцияларының алдында тұрған коэффициенттерін теңестіріп, мына жүйені аламыз:

$$\begin{cases} (a^2 - b^2 + pa + q)A + (2a + p)bB = a_0 \\ -(2a + p)bA + (a^2 - b^2 + pa + q)B = b_0 \end{cases}$$

Сонда (23) теңдеудің дербес шешімі мына түрде болады:

$$\tilde{y} = e^{ax} (A \cos bx + B \sin bx) \quad (26)$$

Б) егер $a \pm bi$ саны (3) сипаттамалық теңдеудің түбірі болса, яғни $a^2 - b^2 + pa + q = 0$, $2a + p, b \neq 0$, онда (23) теңдеу орындалуы үшін $m = 1$ болуы керек, сонда (23) теңдеуден мына теңдеуді аламыз:

$$(2a + p)(A \cos bx + B \sin bx) + 2b(-A \sin bx + B \cos bx) = a_0 \cos bx + b_0 \sin bx \quad (27)$$

және теңдеудің екі жағында тұрған сәйкес $\cos \beta x$ пен $\sin \beta x$ функцияларының алдында тұрған коэффициенттерін теңестіріп, мына жүйені аламыз:

$$\begin{cases} 2bB = a_0 \\ -2bA = b_0 \end{cases} \quad (28)$$

$$\text{Бұдан } A = -\frac{b_0}{2b}, \quad B = \frac{a_0}{2b}.$$

Сонда (23) теңдеудің дербес шешімі $\tilde{y} = xe^{ax} (A \cos bx + B \sin bx)$ болады немесе мына түрде

$$\tilde{y} = \frac{1}{2b} xe^{ax} (-b_0 \cos bx + a_0 B \sin bx) \quad (29)$$

5. Мына түрдегі біртекті емес теңдеуді қарастырайық [7–8]:

$$y'' + py' + qy = e^{ax} (P_k(x) \cos bx + Q_r(x) \sin bx), \quad (30)$$

мұнда a, b - берілген тұрақты сандар, $b \neq 0$, $P_k(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ және

$$Q_r(x) = b_0 x^r + b_1 x^{r-1} + \dots + b_{k-1} x + b_k - \text{берілген көпмүшеліктер,} \\ a_0 \neq 0, b_0 \neq 0 \quad (k, r = 0, 1, 2, \dots)$$

$\tilde{y}$ дербес шешімін мына түрде іздейміз:

$$\tilde{y} = x^m e^{ax} (u_n(x) \cos bx + v_n(x) \sin bx) \quad (31)$$

мұнда $n = \max\{k, r\}$, $u(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m$,

$$v(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_{m-1} x + B_m, \quad A_0, A_1, \dots, A_m, \quad B_0, B_1, \dots, B_m$$

белгісіз коэффициенттерімен берілген n -ші ретті көпмүшеліктер.

$\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ туындыларын тауып, (30) теңдеуге қойсақ, мына өрнекті аламыз:

$$m(m-1)x^{m-2}(u_n(x) \cos bx + v_n(x) \sin bx) + mx^m[(2a+p)(u_n(x) \cos bx + v_n(x) \sin bx) + \\ + 2(u_n'(x) \cos bx + v_n'(x) \sin bx) + 2(u_n''(x) \cos bx + v_n''(x) \sin bx) + 2b(-u_n'(x) \sin bx + v_n'(x) \cos bx)] + \\ + x^m[(a^2 - b^2 + pa + q)(u_n(x) \cos bx + v_n(x) \sin bx) + (2a+p)(u_n'(x) \cos bx + v_n'(x) \sin bx) + \\ + (2a+p)b(-u_n'(x) \sin bx + v_n'(x) \cos bx) + (u_n''(x) \cos bx + v_n''(x) \sin bx) + 2b(-u_n'(x) \sin bx + v_n'(x) \cos bx)] = \\ = P_k(x) \cos bx + Q_r(x) \sin bx$$

Өртүрлі жағдайды қарастырайық. [9–10]

А) егер $a \pm bi$ (3) сипаттамалық теңдеудің түбірі болмаса, яғни $a^2 - b^2 + pa + q \neq 0$ және $2a + p \neq 0$, онда (31) теңдеу орындалуы үшін $m = 0$ болуы керек, онда (31) теңдеуден мына теңдеуді аламыз:

$$(a^2 - b^2 + pa + q)(u_n(x) \cos bx + v_n(x) \sin bx) + (2a + p)(u_n'(x) \cos bx + v_n'(x) \sin bx) + \\ + (2a + p)b(-u_n'(x) \sin bx + v_n'(x) \cos bx) + (u_n''(x) \cos bx + v_n''(x) \sin bx) + \\ + 2b(-u_n'(x) \sin bx + v_n'(x) \cos bx) = P_k(x) \cos bx + Q_r(x) \sin bx \quad (32)$$

және теңдеудің екі жағында тұрған сәйкес $\cos \beta x$ пен $\sin \beta x$ функцияларының алдында тұрған коэффициенттерін теңестіріп, мына жүйені аламыз:

$$\begin{cases} (a^2 - b^2 + pa + q)u_n(x) + (2a + p)u_n'(x) + (2a + p)bv_n(x) + u_n''(x) + 2b v_n'(x) = P_k(x) \\ (a^2 - b^2 + pa + q)v_n(x) + (2a + p)v_n'(x) - (2a + p)bu_n(x) + v_n''(x) - 2b u_n'(x) = Q_r(x) \end{cases} \quad (33)$$

Сонда (30) теңдеудің дербес шешімі мына түрде болады:

$$\tilde{y} = e^{ax}(u_n(x)\cos bx + v_n(x)\sin bx) \quad (34)$$

Б) егер $a \pm bi$ саны (3), сипаттамалық теңдеудің түбірі болса, яғни $a^2 - b^2 + pa + q = 0$, $2a + p$, $b \neq 0$, онда (31) теңдеу орындалуы үшін $m=1$ болуы керек. онда (31) теңдеуден мына теңдеуді аламыз:

$$\begin{aligned} & (2a + p)(u_n(x)\cos bx + v_n(x)\sin bx) + 2(u_n'(x)\cos bx + v_n'(x)\sin bx) + 2b(-u_n(x)\sin bx + v_n(x)\cos bx) + \\ & + x[(2a + p)(u_n'(x)\cos bx + v_n'(x)\sin bx) + (u_n''(x)\cos bx + v_n''(x)\sin bx) + 2b(-u_n'(x)\sin bx + v_n'(x)\cos bx)] = \\ & = P_k(x)\cos bx + Q_r(x)\sin bx \end{aligned}$$

және теңдеудің екі жағында тұрған сәйкес $\cos \beta x$ пен $\sin \beta x$ функцияларының алдында тұрған коэффициенттерін теңестіріп, мына жүйені аламыз:

$$\begin{cases} (2a + p)u_n(x) + 2u_n'(x) + 2bv_n(x) + \\ + x[(2a + p)u_n'(x) + u_n''(x) + 2bv_n'(x)] = P_k(x) \\ (2a + p)v_n(x) + 2v_n'(x) - 2bu_n(x) + \\ + x[(2a + p)v_n'(x) + v_n''(x) - 2bu_n'(x)] = Q_r(x) \end{cases} \quad (35)$$

Сонда (30) теңдеуінің дербес шешімі мына түрде болады:

$$\tilde{y} = xe^{ax}(u_n(x)\cos bx + v_n(x)\sin bx) \quad (36)$$

Әрі қарай белгісіз коэффициенттер әдісін пайдаланып $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n, B_0, B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B_n$ коэффициенттерін табамыз. [9–10].

Қорытындылар

Қарастырылып отырған «Тұрақты коэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеулер және олардың жүйелерінің шешімдерін құру» мақаласында комплекс сандар ұғымын бермей ақ осы шешімдерді қалай табуға болатындығы туралы бір әдістеме келтірілген. Ұсынылып отырған

мақала [3–4] жұмыста келтірілген тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеудің шешімін табу әдістемесінің жалғасы болып табылады.

ПАЙДАЛАНҒАН ДЕРЕКТЕР ТІЗІМІ

- 1 **Ильин, В. А., Куркин, А. В.** Жоғары математика. – М. : Проспект, 2002. – 5192 б.
- 2 **Красс, М. С.** Экономикалық мамандықтарға арналған математика. Оқулық. – М. : 1998. – 463 б.
- 3 **Бугров, Я. С., Никольски, С. М.** Дифференциалдық және интегралдық есептеулер. – М. : Ғылым, 1980.
- 4 **Пискунов, Н. С.** Дифференциалдық және интегралдық есептеулер. Бөлім I, II. – М. : Ғылым, 1972. – 561 б.
- 5 **Сергеев, И. Н.** Дифференциалдық теңдеу : студенттерге арналған оқулық. – М. : ИЦ Академиясы, 2013. – 288 б.
- 6 **Трикоми, Ф.** Дифференциалдық теңдеулер. ағылшын ауд/Ф. Трикоми. – М. : Едиториал УРСС, 2010. – 352 б.
- 7 **Филиппов, А. Ф.** Дифференциалдық теңдеулер теориясына кіріспе. М., 2004. – 240 б.
- 8 **Бейсебай, П. Б., Мухамедиев, Г. Х.** Сызықтық дифференциалдық теңдеудің жеке шешімдерін құрудың бір тәсілі туралы // Вестник ПГУ. «Физика-математика ғылымдары» сериясы. – № 4 2011. – 32–39 б.
- 9 **Бейсебай, П. Б., Мухамедиев, Г. Х.** «Тұрақты коэффициенттері бар екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің дербес шешімдерін құру» тақырыбын берудің бір әдісі туралы // Абай атындағы ҚазҰПУ Хабаршысы. «Физика-математика ғылымдары» сериясы. – 2012. – № 2(38). – 47–53 б. (ISSN 1728-7901).
- 10 **Акжигитов, Е. А., Аруова, А. Б., Бейсебай, П. Б., Тилепиев М. Ш.** Тұрақты коэффициенттері бар біртекті емес екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеуді шешу әдісі туралы // Алматы энергетика және байланыс университетінің хабаршысы. – № 2(41). – 2018. – 66–76 б.
- 11 **Акжигитов, Е. А., Аруова, А. Б., Бейсебай, П. Б., Тилепиев М. Ш.** Коэффициенттері тұрақты екінші ретті дифференциалдық теңдеудің нақты шешімін табу туралы // Алматы энергетика және коммуникациялар университетінің хабаршысы. – №1(44). – 2019. – 42–49 б.

REFERENCES

- 1 **Ibin, V. A., Kurkin, A. V.** Zhogary matematika [Higher mathematics]. – Moscow. : Prospekt, 2002. – 5192 p.
- 2 **Krass, M. S.** Ekonomikalyk mamandyqtarga arналған matematika [Mathematics for economic specialties.]. Textbook. – Moscow. : 1998. – 463 p.
- 3 **Bugrov, Ya. S., Nikol'ski, S. M.** Differentsialdyq zhәне integraldyk esepseuler [Differential and integral calculus]. – Moscow : Nauka, 1980.
- 4 **Piskunov, N. S.** Differentsialdyq zhәне integraldyk esepseuler. [Differential and integral calculus]. Part I, II. – Moscow : Nauka, 1972. – 561 p.
- 5 **Sergeev, I. N.** Differentsialdyq tengdeu: studentterge arналған оқулық [Differential equation : Textbook for students. – Moscow : IC Academy, 2013. – 288 p.
- 6 **Trikomi, F.** Differentsialdyq tengdeuler [Differential equations] Trans. from English / F. Tricomi. –Moscow : Editorial URSS, 2010. – 352 p.
- 7 **Filippov, A. F.** Differentsialdyq tengdeuler teoriyasyna kirispe. [Introduction to the theory of differential equations]. – M., 2004. – 240 p.
- 8 **Beisebay, P. B., Mұhamediev, G. H.** Syzyqtyq differentsialdyk tengdeuding zheke sheshimderin kurudyng bir tәsili turaly [On one approach to the construction of partial solutions of a linear differential equation] // Vestnik PGU. Series «Physical and Mathematical Sciences». – 4'2011. – P. 32–39.
- 9 **Beisebay, P. B., Muhamediev, G. H.** Tұyaqty koeffitsientteri bar ekinshi retti syzyqtyq differentsialdyk tengdeuding derbes sheshimderin quru taqyrybyn beruding bir әdisi turaly [On one method of presenting the topic Construction of partial solutions of a linear differential equation of the second order with constant coefficients] // Bulletin of KazNPU named after Abay. Series «Physical and Mathematical Sciences». – 2012. – №2(38). – P. 47–53. – ISSN 1728-7901.
- 10 **Akzhigitov, E. A., Aruova, A. B. Beisebay, P. B. Tilepiev, M. Sh.** Turaqty koeffitsientteri bar birtekti emes ekinshi retti syzyqtyk differentsialdyk tengdeudi sheshu әdisi turaly [On a method for solving an inhomogeneous second-order linear differential equation with constant coefficients] Bulletin of the Almaty University of Energy and Communications. Almaty, № 2(41). – 2018 P. 66–76.
- 11 **Akzhigitov, E. A., Aruova, A. B. Beisebay, P. B. Tilepiev, M. Sh.** Koeffitsientteri turaqty ekinshi retti differentsialdyk tengdeuding naqty sheshimin tabu turaly [On finding a particular solution to a second-order differential equation with constant coefficients] // Bulletin of the Almaty University of Energy and Communications. Almaty, №1(44). – 2019 P. 42–49.

Басып шығаруға 15.12.23 қабылданды.

**П. Б. Бейсебай¹, М. Ш. Тилепиев², Е. А. Ақжігітов²,
Н. Т. Исаева³, К. Д. Абдибекова³**

¹Евразийский национальный университет имени Л. И. Гумилева,
Республика Казахстан, г. Астана;

²Казахский агротехнический университет имени С. Сейфуллина, Республика
Казахстан, г. Астана;

³Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
Республика Казахстан, г. Алматы.

Принято к изданию 15.12.23.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ИХ СИСТЕМ

В работе предлагаются пути построения дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и их систем, отличающиеся от традиционной методики построения этих решений. Они отличаются тем, что в них не используется понятие комплексного числа, применяемого в традиционном изложении в случае отрицательного дискриминанта характеристических уравнений дифференциального уравнения или системы уравнений. В случае однородного уравнения суть предлагаемого метода заключается в использовании при построении линейно независимых частных решений линейного уравнения второго порядка метода Бернулли, применяемого для решения линейного уравнения первого порядка, полученный при этом алгоритм применяется и в построении решения системы однородных уравнений. В случае неоднородного уравнения с правой частью в виде произведения экспоненциальной функции и линейной комбинации косинуса и синуса с переменными коэффициентами-многочленами, частное решение уравнения определяется вне связи с корнями характеристического уравнения. В рассматриваемой задаче были четко рассмотрены пути вывода дифференциальных уравнений эффективными методами, т. е. путем сравнения с традиционным методом, выделяя пути вывода различных задач. Надеемся, что пути построения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка и решений их систем в дальнейшем будут широко использоваться студентами на практических занятиях и в самостоятельных работах (СРС, СРСП) при решении задач.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, система дифференциальных уравнений, характеристические уравнения, частное решение уравнения, комплексное число.

P. B. Beisebay¹, M. Sh. Tilepiev², E. A. Akzhigitov²,

N. T. Isaeva³, K. D. Abdibekova³

¹L. N. Gumilov Eurasian National University, Republic of Kazakhstan, Astana;

²S. Seifullin Kazakh Agrotechnical University, Republic of Kazakhstan, Astana;

³Al-Farabi Kazakh National University, Republic of Kazakhstan, Almaty

Accepted for publication 15.12.23.

CONSTRUCTION OF SOLUTIONS TO LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER WITH CONSTANT COEFFICIENTS AND THEIR SYSTEMS

The paper suggests ways of constructing second order differential equations with constant coefficients and their systems, which differ from the traditional methods of constructing these solutions. They differ in that they do not use the concept of a complex number, used in the traditional presentation in the case of negative discriminant of the characteristic equation of the differential equation or system of equations. In the case of the homogeneous equation are proposed method is to use in the construction of linearly independent particular solutions of second order linear equation Bernoulli method used to solve the linear equation of the first order; obtained by this algorithm is applied in the construction of solutions of the system of homogeneous equations. In the case of the inhomogeneous equation with the right side as a product of the exponential function and a linear combination of sine and cosine with variable coefficients, polynomials, a particular solution is determined independently of the roots of the characteristic equation. In the problem under consideration, the methods of solving differential equations by effective methods, that is, comparing them with the traditional method, were clearly considered, highlighting the ways of solving different problems. We hope that the ways of constructing Linear Differential Equations of the constant coefficient of the second order and solutions of their systems will be widely used in the future in the process of solving problems for students in practical classes and independent work .

Keywords: differential equation, the system of differential equations, the characteristic equation, particular solution, the complex number.

Теруге 15.12.2023 ж. жіберілді. Басуға 29.12.2023 ж. қол қойылды.

Электрондық баспа

7,50 Mb RAM

Шартты баспа табағы 10,01. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.

Компьютерде беттеген: Е. Е. Калихан

Корректор: А. Р. Омарова

Тапсырыс № 4178

Сдано в набор 15.12.2023 г. Подписано в печать 29.12.2023 г.

Электронное издание

7,50 Mb RAM

Усл.печ.л. 10,01. Тираж 300 экз. Цена договорная.

Компьютерная верстка Е. Е. Калихан

Корректор: А. Р. Омарова

Заказ № 4178

«Toraighyrov University» баспасынан басылып шығарылған

«Торайғыров университеті» КЕ АҚ

140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

«Toraighyrov University» баспасы

«Торайғыров университеті» КЕ АҚ

140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

+7(718)267-36-69

e-mail: kereku@tou.edu.kz

www.vestnik.tou.edu.kz

<https://vestnik-pm.tou.edu.kz/>