

Торайғыров университетінің
ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Торайғыров университета

ТОРАЙҒЫРОВ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ

Физика, математика және компьютерлік
ғылымдар сериясы
1997 жылдан бастап шығады



ВЕСТНИК ТОРАЙҒЫРОВ УНИВЕРСИТЕТА

Серия: Физика, математика
и компьютерные науки
Издается с 1997 года

ISSN 2959-068X

№ 2 (2022)
Павлодар

**НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
ТОРАЙГЫРОВ УНИВЕРСИТЕТА**

Серия: Физика, математика и компьютерные науки
выходит 4 раза в год

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о постановке на переучет периодического печатного издания,
информационного агентства и сетевого издания
№ KZ91VPY00046988
выдано

Министерством информации и общественного развития
Республики Казахстан

Тематическая направленность
публикация материалов в области физики, математики,
механики и информатики

Подписной индекс – 76208

[https://doi.org/ 10.48081/JVDF6096](https://doi.org/10.48081/JVDF6096)

Бас редакторы – главный редактор

Тлеукунов С. К., *ф.-м.г.д., профессор*

Заместитель главного редактора Испулов Н. А., *ф.-м.г.к., профессор*

Ответственный секретарь Жумабеков А. Ж., *магистр*

Редакция алқасы – Редакционная коллегия

Esref Adali,	<i>PhD докторы, профессор (Турция);</i>
Qadir Abdul,	<i>PhD докторы, профессор (Пакистан);</i>
Домбаев К. М.,	<i>ф.-м.г.д., профессор;</i>
Демкин В. П.,	<i>ф.-м.г.д., профессор (Российская Федерация);</i>
Жумадиллаева А. К.,	<i>т.г.к., кауымд. профессор;</i>
Ибраев Н. Х.,	<i>ф.-м.г.д., профессор;</i>
Косов В. Н.,	<i>ф.-м.г.д., профессор;</i>
Сеитова С. М.,	<i>пед.г.д., профессор;</i>
Шоканов А. К.,	<i>ф.-м.г.к., профессор</i>
Омарова А. Р.,	<i>технический редактор</i>

За достоверность материалов и рекламы ответственность несут авторы и рекламодатели

Редакция оставляет за собой право на отклонение материалов

При использовании материалов журнала ссылка на
«Вестник Торайгыров университета» обязательна

***С. К. Тлеукенов¹, Т. С. Досанов², А. К. Досжанова³**

¹Евразийский национальный университет имени Л. Н. Гумилева,
Республика Казахстан, г. Нур-Султан;

^{1,2,3}Торайгыров университет, Республика Казахстан, г. Павлодар

ОБ ОТРАЖЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТЕ И ТМ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД РОМБИЧЕСКОЙ СИНГОНИИ

Метод матрицанта позволяет, с математической точки зрения, единообразно описать волновые процессы различной физической природы для широкого круга сред, физические процессы в которых определяются феноменологическими уравнениями. Методом матрицанта исследованы задачи распространения волн в упругих и термоупругих анизотропных средах, в пьезоэлектрических и пьезомагнитных средах, а также в средах с магнитоэлектрическим эффектом. В данной статье на основе аналитического метода матрицанта, разработанного отечественными учеными, решена задача отражения электромагнитных ТЕ и ТМ волн на границе анизотропных непроводящих сред. На основе метода разделения переменных система, состоящая из уравнений Максвелла и материальных уравнений, приведена к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка из которой получена структура матриц коэффициентов системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка описывающей волновые процессы в неоднородных вдоль одной из декартовых осей анизотропных диэлектрических средах. Получены выражения описывающие поля падающих, отраженных и прошедших электромагнитных ТЕ и ТМ волн на границе непроводящих однородных анизотропных сред ромбической сингонии.

Ключевые слова: электромагнитные волны, ТЕ и ТМ волны, задача отражения, анизотропная среда, матрицант.

Введение

Метод матрицанта – аналитический метод исследования волновых процессов в неоднородных анизотропных средах. Метод заключается в построении матрицы, которая позволяет решать задачи, в том числе распространения электромагнитных волн в анизотропных кристаллах. Основным преимуществом метода матрицанта по сравнению с другими методами исследования, применяемыми в кристаллооптике, является [1] «внутренняя симметрия и общность структуры матрицы коэффициентов для всех рассматриваемых сред» (имеются в виду пьезоэлектрические, пьезомагнитные, термоупругие и магнитоэлектрические среды). В работах [2–10] методом матрицанта исследованы некоторые аспекты распространения волн в упругих, пьезоэлектрических, пьезомагнитных и магнитоэлектрических средах.

Изучение анизотропных кристаллов имеет большую практическую значимость для прикладной оптики и оптического приборостроения. Например, в изготовлении оптических элементов для когерентных источников излучения используются анизотропные кристаллы. Также теоретические расчёты на основе метода матрицанта имеют фундаментальное значение.

Материалы и методы

Электромагнитные ТЕ или ТМ волны в рамках метода матрицанта представляются в виде:

$$\vec{w} = \hat{T}^{\pm} \vec{w}_0 \quad (1)$$

Если перпендикулярно границе раздела сред ориентирована ось Ox , то вектор $\vec{w}$ равен либо $\vec{w} = (E_z, H_y)$, либо $\vec{w} = (H_z, E_y)$, если ось Oy , то вектор $\vec{w}$ равен либо $\vec{w} = (E_z, H_x)$, либо $\vec{w} = (H_z, E_x)$, если ось Oz , то вектор $\vec{w}$ равен либо $\vec{w} = (E_y, H_x)$, либо $\vec{w} = (H_y, E_x)$. Вектор $\vec{w}_0 = (a_1, a_2)^t$ – произвольный постоянный вектор, определяющий амплитуду волны.

Пусть, для определенности, перпендикулярно границе раздела сред ориентирована ось Ox , тогда:

$$\hat{T}^{\pm} = \frac{1}{2} \left(\hat{I} \pm \frac{i\hat{B}}{k_x} \right) e^{\mp i k_x x} \quad (2)$$

Здесь $\hat{I}$ – единичная матрица 2-го порядка; i – мнимая единица; $\hat{B}$ – матрица коэффициентов 2-го порядка; k_x – x -вая компонента волнового вектора. В зависимости от того, какая из компонент волнового вектора k_y

или k_z равна нулю, остаётся множитель $e^{i\omega t - ik_z z}$ или $e^{i\omega t - ik_y y}$, который мы для краткости опустили. Ω – циклическая частота электромагнитной волны; t – время.

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}, k_x = \sqrt{-b_{12}b_{21}} \quad (3)$$

Отметим, что в выражении (2) знак «+» берется для волн распространяющихся вдоль положительного направления оси Ox , а знак «-», для волн распространяющихся вдоль отрицательного направления оси Ox .

Падающая, отраженная и прошедшая электромагнитные волны записываются в виде:

$$\vec{w}_1 = \hat{T}_1^+ \vec{w}_0, \vec{w}_3 = \hat{T}_1^- \vec{w}_r, \vec{w}_2 = \hat{T}_2^+ \vec{w}_t \quad (4)$$

Матричная постановка и решение задачи отражения волн в рамках метода матрицанта осуществляется следующим образом. Так как вектор $\vec{w}$ содержит касательные к границе раздела сред составляющие электромагнитного поля, то на границе анизотропных сред ($x=0$) должны выполняться условия:

$$\hat{T}_1^+(0) \vec{w}_0 + \hat{T}_1^-(0) \vec{w}_r = \hat{T}_2^+(0) \vec{w}_t \quad (5)$$

С другой стороны:

$$\vec{w}_0 + \vec{w}_r = \vec{w}_t \quad (6)$$

Решая совместно (4) и (5) получим поле отраженных и прошедших электромагнитных волн:

$$\vec{w}_r = \hat{G} \vec{w}_0, \vec{w}_t = (\hat{I} + \hat{G}) \vec{w}_0 \quad (7)$$

где:

$$\hat{G} = [\hat{T}_2^+(0) - \hat{T}_1^-(0)]^{-1} [\hat{T}_1^+(0) - \hat{T}_2^+(0)] \quad (8)$$

Из (3), (6) и (7) поле падающих, отраженных и прошедших волн:

$$\vec{w}_1 = \hat{T}_1^+ \vec{w}_0, \vec{w}_3 = \hat{T}_1^- \hat{G} \vec{w}_0, \vec{w}_2 = \hat{T}_2^+ (\hat{I} + \hat{G}) \vec{w}_0 \quad (9)$$

Введем обозначения для матриц коэффициентов первой и второй сред:

$$\hat{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}, \hat{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & s_{12} \\ s_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Тогда соответствующие x-вые компоненты волновых векторов этих сред запишутся в виде:

$$k_{1x} = \sqrt{-b_{12}b_{21}}, \quad k_{2x} = \sqrt{-s_{12}s_{21}} \quad (11)$$

Используя формулы (2), (7), (9) и (10) получим для матрицы $\hat{G}$:

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & -g_{11} \end{pmatrix} \quad (12)$$

где:

$$g_{11} = \frac{k_{2x}b_{21} - k_{1x}s_{21}}{k_{2x}b_{21} + k_{1x}s_{21}} \quad \text{или} \quad g_{11} = -\frac{k_{2x}b_{12} - k_{1x}s_{12}}{k_{2x}b_{12} + k_{1x}s_{12}} \quad (13)$$

Результаты и обсуждение

Поле падающих волн (гармонический множитель здесь и далее, для краткости, опущен)

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{A_1}{2} \sqrt{\frac{b_{12}}{b_{21}}} \\ \frac{A_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_2}{2} \\ \frac{A_2}{2} \sqrt{\frac{b_{21}}{b_{12}}} \end{pmatrix} \quad (14)$$

где:

$$A_1 = \sqrt{\frac{b_{21}}{b_{12}}}a_1 + a_2, \quad A_2 = a_1 + a_2 \sqrt{\frac{b_{12}}{b_{21}}} \quad (15)$$

Поле отраженных волн

$$\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} A_{r1} \sqrt{\frac{b_{12}}{b_{21}}} \frac{g_{11}}{2} \\ -A_{r1} \frac{g_{11}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{r2} \frac{g_{11}}{2} \\ -A_{r2} \sqrt{\frac{b_{21}}{b_{12}}} \frac{g_{11}}{2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

где:

$$A_{r1} = \sqrt{\frac{b_{21}}{b_{12}}} a_1 + a_2, \quad A_{r2} = a_1 + a_2 \sqrt{\frac{b_{12}}{b_{21}}} \quad (17)$$

Поле прошедших волн

$$\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} A_{t1} \sqrt{\frac{s_{12}}{s_{21}}} \frac{1+g_{11}}{2} \\ A_{t1} \frac{1+g_{11}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{t2} \frac{1+g_{11}}{2} \\ A_{t2} \sqrt{\frac{s_{21}}{s_{12}}} \frac{1+g_{11}}{2} \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$A_{t2} = a_1 \sqrt{\frac{s_{21}}{s_{12}}} + a_2 \frac{1-g_{11}}{1+g_{11}}, \quad A_{t2} = a_1 + a_2 \sqrt{\frac{s_{12}}{s_{21}}} \frac{1-g_{11}}{1+g_{11}} \quad (19)$$

Выводы

Таким образом, в данной работе решена задача отражения электромагнитных ТЕ и ТМ волн на границе раздела непроводящих анизотропных сред ромбической сингонии. Получено уравнение для полей отраженных и прошедших волн.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 **Тлеукунов, С. К.** Метод матрицанта. – Павлодар : НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004. – 148 с.
- 2 **Tleukenov, S. K.** A method for the analytical description of coupled-field waves in various anisotropic media // Acta Mechanica. – 2014. – Vol. 225. Issue 12. – P. 3535–3547.
- 3 **Tleukenov, S. K., Aitbaev, A. B.** Lamb waves in elastic layers with rhombic symmetry // Acoustical Physics. – 2015. – Vol. 61. – Issue 2. – P. 144–147.

4 Tleukenov, S. K., Dossanov, T. S., Vishenkova, Yu. A. About the reflection of electromagnetic TE-wave at the interface between isotropic elastic medium and piezo-crystal orthorhombic classes 222 mm2, mmm// Bulletin of the University of Karaganda-Physics. – 2016. – Vol. 4. – Issue 84. – P. 14–19.

5 Tleukenov, S. K., Dossanov, T. S., Zhukenov M. K., Zhumabayeva G. M., About the problem of reflection of the electromagnetic TE-wave from the surface of the magnetoelectric crystal hexagonal system of classes 622, 6mm, 6m2, 6mmm // Bulletin of the University of Karaganda-Physics. – 2016. – Vol. 3. – Issue 83. – P. 21–27.

6 Tleukenov, S., Bobeev, A., Sabitova, D. Structure of the Matriciant for Systems of Ordinary Differential Equations of First Order and Its Applications// International Journal of Applied Mathematics & Statistics. – 2018. – Vol. 57. – Issue 1. – P. 209–217.

7 Тлеукунов, С. К., Оспан, А. Т. Изучение электромагнитных полей в анизотропных средах. – Алматы : КазНПУ им. Абая, 2001. – 67 p.

8 Тлеукунов, С. К., Асильбекова, А. М. Электромагнитные волны в анизотропных средах. – Алматы : Эверо, 2017. – 72 p.

9 Тлеукунов, С. К., Досанов, Т. С., Испулов, Н. А., Гутенко, А. Д., Досумбеков, К. Р. О поверхностных волнах в пьезомагнитных средах. // Международная конференция «Инновационные подходы к решению технико-экономических проблем». – М., 2019. – P. 104–110.

10 Тлеукунов, С. К., Досанов, Т. С., Оспанова, Ж. Д., Смайлова, Ж. Б., Досжанова, А. К. Уравнения индикатрис скоростей электромагнитных волн в анизотропных средах ромбической сингонии // Вестник ПГУ, серия физ.-мат. 2020. – Вып. 4. – С. 100–109.

REFERENCES

1 Tleukenov, S. K. Metod matritcanta [Matriciant method] / Pavlodar: NITS PGU im. S. Toraygyrova, 2004. – 148 p.

2 Tleukenov, S. K. A method for the analytical description of coupled-field waves in various anisotropic media // Acta Mechanica. – 2014. – Vol. 225. Issue 12. – P. 3535–3547.

3 Tleukenov, S. K., Aitbaev, A. B. Lamb waves in elastic layers with rhombic symmetry // Acoustical Physics. – 2015. – Vol. 61. – Issue 2. – P. 144–147.

4 Tleukenov, S. K., Dossanov, T. S., Vishenkova, Yu. A. About the reflection of electromagnetic TE-wave at the interface between isotropic elastic medium and piezo-crystal orthorhombic classes 222 mm2, mmm// Bulletin of the University of Karaganda-Physics. – 2016. – Vol. 4. – Issue 84. – P. 14–19.

5 Tleukenov, S. K., Dossanov, T. S., Zhukenov M. K., Zhumabayeva G. M., About the problem of reflection of the electromagnetic TE-wave from the surface of the magnetoelectric crystal hexagonal system of classes 622, 6mm, 6m2, 6mmm // Bulletin of the University of Karaganda-Physics. – 2016. – Vol. 3. – Issue 83. – P. 21–27.

6 Tleukenov, S., Bobeev, A., Sabitova, D. Structure of the Matriciant for Systems of Ordinary Differential Equations of First Order and Its Applications// International Journal of Applied Mathematics & Statistics. – 2018. – Vol. 57. – Issue 1. – P. 209–217.

7 Tleukenov, S. K., Ospan, A. T. Izuchenie elektromagnitnyh polej v anizotropnyh sredah. – Almaty : KazNPU im. Abaya, 2001. – 67 p.

8 Tleukenov, S. K., Asil'bekova, A. M. Elektromagnitnye volny v anizotropnyh sredah. – Almaty : Evero, 2017. – 72 p.

9 Tleukenov, S. K., Dosanov, T. S., Ispulov, N. A., Gutenko, A. D., Dosumbekov, K. R. O poverhnostnyh volnah v p'ezomagnitnyh sredah. // Mezhdunarodnaya konferenciya «Innovacionnye podhody k resheniyu tekhniko-ekonomicheskikh problem». – Moscow, 2019. – P. 104–110.

10 Tleukenov, S. K., Dosanov, T. S., Ospanova, ZH. D., Smajlova, Zh. B., Doszhanova, A. K. Uravneniya indikatrix skorostej elektromagnitnyh voln v anizotropnyh sredah rombicheskoy singonii // Vestnik PGU, seriya fiz.-mat. – 2020. – Issue 4. – P. 100–109.

Материал поступил в редакцию 07.06.22.

С. Қ. Тлеуқенов¹, Т. С. Досанов², А. Қ. Досжанова³

¹Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті,
Қазақстан Республикасы, Нұр-Сұлтан қ.

^{1,2,3}Торайғыров университеті,
Қазақстан Республикасы, Павлодар қ.

Материал баспаға 07.06.22 түсті.

ЭЛЕКТРОМАГНИТТІК ТЕ ЖӘНЕ ТМ ТОЛҚЫНДАРДЫҢ РОМБТЫҚ АНИЗОТРОПТЫ ОРТАЛАРДЫҢ ШЕКАРАСЫНДАҒЫ ШАҒЫЛЫСУЫ ТУРАЛЫ

Матрицанттық әдіс математикалық тұрғыдан алғанда, физикалық процестер феноменологиялық теңдеулермен анықталатын кең ауқымды орталар үшін әртүрлі физикалық табиғаттың біркелкі толқындық процестерін сипаттауға мүмкіндік береді. Серпімді және термосерпімді анизотропты орталарда, пьезоэлектрлік және

пъезомагниттік орталарда, сондай-ақ магнитоэлектрлік әсері бар орталарда толқынның таралу мәселелері матрицалық әдіспен зерттеледі. Бұл мақалада отандық ғалымдар өзірлеген матрицаның аналитикалық әдісі негізінде анизотропты өткізбейтін ортаның шекарасында электромагниттік ТЭ және ТМ толқындарының шағылысу мәселесі шешілген. Айнымалыларды бөлу әдісінің негізінде Максвелл теңдеулері мен материалдық теңдеулерден тұратын жүйе 1-ші ретті кәдімгі дифференциалдық теңдеулердің эквивалентті жүйесіне келтіріледі, одан қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесінің коэффициенттерінің матрицаларының құрылымы шығады. Декарттық осьтердің бірінің бойындағы біртекті емес толқындық процестерді сипаттайтын 1-ші ретті анизотропты диэлектрлік орта алынған. Ромбтық сингонияның өткізбейтін біртекті анизотропты орталар шекарасындағы электромагниттік ТЭ және ТМ толқындарының түсетін, шағылған және жіберілетін өрістерін сипаттайтын өрнектер алынған.

Кілтті сөздер: электромагниттік толқындар, TE және TM толқындары, шағылу есебі, анизотропты орта, матрицант.

S. K. Tleukenov^{1,2}, T. S. Dosanov², A. K. Doszhanova²

¹L. N. Gumilyov Eurasia National University,
Republic of Kazakhstan, Nur-Sultan.

^{1,2,3}Toraighyrov University,
Republic of Kazakhstan, Pavlodar.

Material received on 07.06.22.

ON THE REFLECTION OF ELECTROMAGNETIC TE AND TM WAVES AT THE BOUNDARY OF RHOMBIC ANISOTROPIC MEDIA

The matricant method allows, from a mathematical point of view, to describe uniformly wave processes of various physical nature for a wide range of media, the physical processes in which are determined by phenomenological equations. The problems of wave propagation in elastic and thermoelastic anisotropic media, in piezoelectric and piezomagnetic media, as well as in media with a magnetoelectric effect are studied by the matricant method. In this article, on the basis of the analytical method of the matricant, developed by domestic scientists, the problem of reflection of electromagnetic TE and TM waves at the boundary of anisotropic non-conductive media is solved. Based on the method of separation of variables, a system consisting of Maxwell's equations

and material equations is reduced to an equivalent system of ordinary differential equations of the 1st order, from which the structure of the matrices of coefficients of the system of ordinary differential equations of the 1st order describing wave processes in inhomogeneous along one of the Cartesian axes is obtained anisotropic dielectric media. Expressions are obtained that describe the fields of incident, reflected and transmitted electromagnetic TE and TM waves at the boundary of non-conducting homogeneous anisotropic media of rhombic syngony.

Keywords: electromagnetic waves, TE and TM waves, reflection problem, anisotropic medium, matricant.

Теруге 07.06.2022 ж. жіберілді. Басуға 30.06.2022 ж. қол қойылды.

Электрондық баспа

8,05 Mb RAM

Шартты баспа табағы 8,57. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.

Компьютерде беттеген: З. С. Исакова

Корректор: А. Р. Омарова

Тапсырыс № 3960

Сдано в набор 07.06.2022 г. Подписано в печать 30.06.2022 г.

Электронное издание

8,05 Mb RAM

Усл.печ.л. 8,57. Тираж 300 экз. Цена договорная.

Компьютерная верстка З. С. Исакова

Корректор: А. Р. Омарова

Заказ № 3960

«Toraighyrov University» баспасынан басылып шығарылған

«Торайғыров университеті» КЕ АҚ

140008, Павлодар к., Ломов к., 64, 137 каб.

«Toraighyrov University» баспасы

«Торайғыров университеті» КЕ АҚ

140008, Павлодар к., Ломов к., 64, 137 каб.

67-36-69

e-mail: kereku@tou.edu.kz

www.vestnik.tou.edu.kz

<https://vestnik-pm.tou.edu.kz/>