Торайғыров университетінің хабаршысы
ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛЫ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Вестник Торайгыров университета

Торайғыров университетінің ХАБАРШЫСЫ

Физика, математика және компьютерлік ғылымдар сериясы

1997 жылдан бастап шығады

TORAIGHYROV UNIVERSITY

ВЕСТНИК Торайгыров университета

Серия: Физика, математика и компьютерные науки

Издается с 1997 года

ISSN 2959-068X

№ 1 (2024)

ПАВЛОДАР

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Вестник Торайгыров университета

Серия: Физика, математика и компьютерные науки
выходит 4 раза в год

СВИДЕТЕЛЬСТВО
о постановке на переучет периодического печатного издания,
информационного агентства и сетевого издания
№ KZ91VPY00046988
выдано
Министерством информации и общественного развития
Республики Казахстан

Тематическая направленность
публикация материалов в области физики, математики,
механики и информатики

Подписной индекс – 76208

https://doi.org/10.48081/NLWQ4802

СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИКА И СТАТИСТИКА»

ҒТАМР 27.27.17
https://doi.org/10.48081/XRKH7041

***Б. Ж. Сағындықов[1] , Ж. Бимұрат[2]**
[1]Satbayev University, Қазақстан Республикасы, Алматы қ.;
*e-mail: b.sagindykov@satbayev.university
[2]Д. А. Қонаев атындағы Тау-кен істері институты,
Қазақстан Республикасы, Алматы қ.

ЖАЛПЫ КОМПЛЕКС САНДАРДЫҢ ЕКІ ӨЛШЕМДІ АЛГЕБРАСЫ

Бұл мақаланың тақырыбы алгебра мен геометрияға қатысты. Екі пән арасындағы байланыстар алуан түрлі және олардың әрқайсысы үшін өте жемісті. Қазіргі уақытта комплекс сандардың әртүрлі түрлері өте қарқынды зерттелуде. Бүгінгі күнге дейінгі көптеген маңызды есептер жалпы комплекс сандар теориясымен тығыз байланысты. Өкінішке орай жоғары мектептің оқу бағдарламаларында бұл бағытқа қатысты ештеңе айтылмайды. Сондықтан бұл мақала оқырманды жалпы комплекс сандардың екі өлшемді алгебрасының бастапқы жағдайымен таныстыру үшін ұсынылып отыр. Мақалада жалпы комплекс сандар квадраттық форманың дискриминантына қатысты эллиптикалық, гиперболалық және параболалық сандар жүйелеріне бөлінетіні қарастырылды. Олардың сәйкесінше алгебрасы анықталды. Жалпы комплекс сандар үшін Эйлер формуласы қорытылды. Сонымен қатар жалпы комплекс аргументті жалпы комплекс мәнді функциялар үшін Коши-Риман шарттары анықталды. Әрі қарай параболалық сандар жиынының ішкі жиынын құрайтын дуаль сандар үшін оның алгебралық, тригонометриялық және матрицалық көрсетілімдері анықталды. Сондай-ақ дуаль айнымалының аналитикалық функциялары қарастырылды. Жазықтықта берілген аффиндік координаттар жүйесіне қатысты жалпы комплекс санның орны базистік векторларға қатысты бірмәнді анықталды. Сонымен аффиндік нүктелерінің жиыны мен жалпы сандар жиынының арасында бірмәнділік сәйкестік орнатылды. Дуаль сандардың геометриялық *интерпретациясын анықтау мақсатында аз көлемде Галилей геометриясынан мағлұматтар берілді. Нәтижесінде Галилейдің жазықтықтағы геометриясы мен дуаль сандар жазықтығы геометриясының арасындағы байланыс анықталды.*

Кілтті сөздер: дуаль сандар, эллипс, гипербола, парабола, Эйлер формуласы, Коши-Риман шарттары, Галилей геометриясы.

Кіріспе

Қазіргі уақытта комплекс сандардың әртүрлі түрлері өте қарқынды зерттелуде. Бүгінгі күнге дейін шешілмеген есептер комплекс сандар туралы іліммен тығыз байланысты. Бұл бағытта көптеген елдердің ғалымдары жұмыс жасауда. Жалпы комплекс сандардың жүйелері іс жүзінде қарапайым комплекс сандар, қос сандар, дуаль сандар (қосарланған сандар) болып үш топқа бөлінеді [1].

Қарапайым комплекс сандар екінші және жоғары дәрежелі теңдеулерді шешу мәселесімен тығыз байланысты. Олар алгебрада және математикалық талдаудың көптеген бөлімдерінде маңызды роль атқарады.

Қос және дуаль (қосарланған) сандар коэффициенттері нақты сандар болып келген квадрат теңдеулер теориясына ешқандай қатысы жоқ және алгебрамен салыстырмалы түрде байланысы аз. Бұл сандардың негізгі қолданыстары геометрияда кездеседі (мұндай комплекс сандар жүйелерінің қайсыбір қолданыстары сандар теориясында да кездеседі) [2; 3; 4].

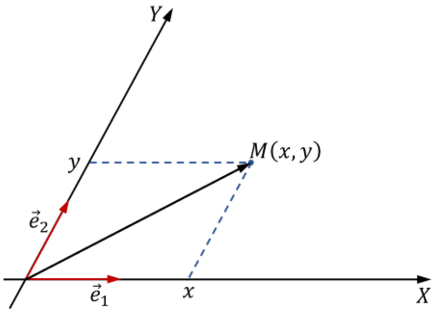
Қос сандардың негізгі қолданылуы Лобачевскийдің евклидтік емес геометриясында және әдеттегі евклид геометриясынан бөлек кейбір басқа геометрияларға қатысты (мысалы, физикалық салыстырмалық теориясында іргелі роль атқаратын псевдоевклидтік геометрияда) қарастырылады [5; 6].

Жұмыста қос және дуаль сандар теориясы, сондай-ақ осы сандардың Евклид және Лобачевский геометрияларындағы қолданыстары қарастырылады.

Материалдар мен әдістер

Аффиндік координаттар жүйесіндегі жалпы комплекс сандар ұғымы

Алғашқы ұғымдар. Жазықтықта декарттық координаттар жүйесіне қатысты қарастырылатын $M(x,y)$ ағымдық нүктесінің орны $z = x + iy,\ \ i^2 = -1$ комплекс саны арқылы бірмәнді анықталады. Егер жазықтықта қайсыбір аффиндік (қиғаш бұрышты) координаттар жүйесін (1-сурет) қарастыратын болсақ, онда осы жүйеге қатысты $M(x,y)$ ағымдық нүктесінің орнын қандай комплекс сан бірмәнді анықтайды деген сұрақ туындайды. Басқаша айтқанда декарттық координаттар жүйесінде $M(x,y)$ нүктесінің координаттары $x = |z|cos\varphi$, $y = |z|sin\varphi$ теңдіктері арқылы анықталады, мұнда $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = argz$. Қиғаш бұрышты координаттар жүйесінде $M(x,y)$ нүктесінің координаттары қандай теңдіктер арқылы анықталады? Осы және басқа да сұрақтарға жауап беру үшін жалпы комплекс сандар ұғымын анықтаймыз. Ол үшін жазықтықтағы аффиндік координаттар жүйесінің құрылымына тоқтала кетейік. Жазықтықтағы аффиндік координаттар жүйесі өзара коллинеар емес реттелген қос $\vec{e}_1$ және $\vec{e}_2$ (аффиндік базис) векторларынан және O бас нүктесінен құралады (1-сурет).



1-сурет. Жазықтықтағы аффиндік координаттар жүйесі

$\vec{e}_1$ векторына параллель ось абсцисса өсі, ал $\vec{e}_2$ векторына параллель ось ордината өсі деп аталады.

M нүктесінің аффиндік координаттары деп $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ векторының базистік векторлары бойынша жіктелуіндегі реттелген қос (x,y) сандарын айтамыз [2].

Жалпы комплекс сандар жазықтығы. Жазықтықта $R(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ аффиндік координаттар жүйесі берілсін дейік. Сонда жазықтықта аффиндік координаттар жүйесіне қатысты қарастырылатын $M(x,y)$ ағымдық нүктесінің орны $z = x + py$, $p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$ жалпы комплекс саны арқылы бірмәнді анықталады. Мұнда θ_0, θ_1 – оң бүтін сандар. Демек аффиндік жазықтық нүктелерінің жиыны мен жалпы комплекс сандар жиынының арасында бірмәнді сәйкестік орнатылады.

$y = 0$ болғанда $z = x + p \cdot 0$ саны нақты санды білдіреді. Нақты сандар Ox өсінің нүктелері арқылы бейнеленеді. Сондықтан оны нақты ось деп атайды.

Керісінше $x = 0$ тең болғанда $z = 0 + py$ саны p параметріне қатысты жорамал санды білдіреді. Жорамал сандар Oy өсінің нүктелері арқылы бейнеленеді. Сондықтан оны p параметріне қатысты жорамал ось деп те атайды.

Неліктен $z = x + py,\ p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$ саны жалпы комплекс сан деп аталады? Осы сұраққа жауап беру үшін келесі дербес жағдайларды қарастырайық:

1) егер $\theta_0 = 1,\ \theta_0 = 0$ тең болса, онда $z = x + py$ жалпы комплекс саны қарапайым $z = x + iy,\ i^2 = -1$ комплекс санын анықтайды;

2) егер $\theta_0 = 0,\ \theta_0 = -1$ тең болса, онда $\theta_0 = 1,\ \theta_0 = 0$ жалпы комплекс саны қос санды анықтайды;

3) егер $\theta_0 = \theta_1 = 0$ тең болса, онда $z = x + py$ жалпы комплекс саны дуаль санды анықтайды, өйткені $p^2 = 0$.

Жалпы комплекс сандар жиынында арифметикалық амалдарды келесі түрде енгізейік.

1. Қосу: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + p(y_1 + y_2)$.
2. Нақты санға көбейту: $\lambda z = \lambda x + p\lambda y$.
3. Азайту: $z_1 - z_2 = z_1 + (-1)z_2 = (x_1 - x_2) + p(y_1 - y_2)$.
4. Көбейту: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - \theta_0 y_1 y_2) + p(x_1 y_2 + y_1 x_{2+}\theta_1 y_1 y_2)$.

Анықтама. $x_1 = x_2$ және $y_1 = y_2$ теңдіктері орындалғанда және тек сонда ғана z_1 және z_2 жалпы комплекс сандары өзара тең болады, яғни $z_1 = z_2$.

Анықтама. Егер $z = x + py,\ p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$ жалпы комплекс саны берілсе, онда $\bar{z} = x + \theta_1 y - py$ жалпы комплекс саны оның түйіндесі деп аталады, өйткені

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + \theta_1 xy + \theta_0 y^2$$

(1)

теңдігі нақты санды береді. (1) теңдіктен жалпы комплекс санның

$$|z| = \sqrt{x^2 + \theta_1 xy + \theta_0 y^2}$$

модулі анықталады.

Сонымен қатар $\frac{z_1}{z_2}$ және z^{-1} жалпы комплекс сандары

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + py_1}{x_2 + py_2} = \frac{x_1x_2 + \theta_0 y_1 y_2 + \theta_1 x_1 y_2}{x_2^2 + \theta_1 x_2 y_2 + \theta_0 y_2^2} + p\,\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + \theta_1 x_2 y_2 + \theta_0 y_2^2}$$

және

$$z^{-1} = \frac{1}{x + py} = \frac{x + \theta_1 y - py}{x^2 + \theta_1 xy + \theta_0 y^2} = \frac{x + \theta_1 y}{x^2 + \theta_1 xy + \theta_0 y^2} - p\,\frac{y}{x^2 + \theta_1 xy + \theta_0 y^2}$$

теңдіктері арқылы анықталады.

Жалпы жағдайда екінші ретті алгебралық теңдеулер комплекс сандар жазықтығында әртүрлі типтегі сызықтарды анықтайды. Атап айтқанда – эллипс, гипербола, парабола және т.б. сызықтар. Сондықтан жалпы комплекс сандар

$$x^2 + \theta_1 xy + \theta_0 y^2 - |z|^2 = 0$$

түрдегі квадраттық форманың дискриминантына қатысты эллиптикалық, гиперболалық және параболалық сандар жүйелеріне бөлінеді [7].

Ескерту. Алда біз негізінен дуаль сандар жүйесімен жұмыс жасаймыз.

Анықтама. $D = \frac{\theta_1^2}{4} - \theta_0 < 0$ болғанда $z = x + py,\ p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$ жалпы комплекс саны эллиптикалық сан деп аталады.

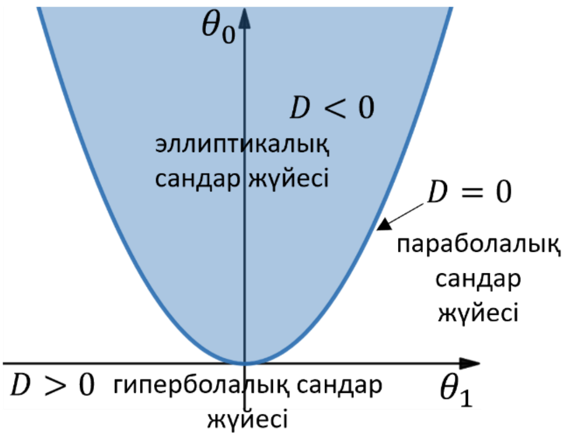
Ескерту. $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = 0$ дербес жағдайында $D = -1$, $\sqrt{-D} = 1$; $p = i$ болады. Демек $z = x + py,\ p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$ эллиптикалық саны қарапайым $z = x + iy$ комплекс санын анықтайды.

Анықтама. $D = \frac{\theta_1^2}{4} - \theta_0 > 0$ болғанда $z = x + py,\ p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$ жалпы комплекс саны гиперболалық сан деп аталады.

Анықтама. $D = \frac{\theta_1^2}{4} - \theta_0 = 0$ болғанда $z = x + py,\ p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$ жалпы комплекс саны параболалық сан деп аталады.

Ескерту. Қос және дуаль сандар сәйкесінше гиперболалық және параболалық сандар жүйесінің ішкі жиындары болады.

Жалпы жағдайда екі өлшемді ассоциативті-коммутативті алгебра 2-суретте көрсетілген.



Сурет 2 – Екі өлшемді ассоциативті-коммутативті алгебраларды параметрлеу

Дуаль сандар

$x + \varepsilon y,\ \varepsilon^2 = 0$ түріндегі сандар дуаль сандар немесе параболалық типтегі гиперкомплексті сандар деп аталады, мұнда x және y нақты сандар; ε – квадраты нөлге тең абстракт элемент [10]. Кез келген дуаль сан x, y жұбымен бірмәнді анықталады. Барлық дуаль сандар нақты сандар өрісінде мультипликативті операцияға қатысты бірлігі бар екі өлшемді коммутативті-ассоциативті алгебра құрайды. Дуаль сандар сақина құрайды. Комплекс сандар өрісінен айырмашылығы бұл алгебрада нөлдік бөлгіштер бар және таза жорамал $\varepsilon y, y \in \mathbb{R}$ сандары нөлдік бөлгіштер болады. Дуаль сандар жиынын Λ арқылы белгілейміз. Дуаль сандар үшін де комплекс сандар сияқты $x = Rez$ және $y = Imz$ белгілеулерін енгіземіз. $\varphi\colon z \longrightarrow Rez$ бейнелеуі гомоморфизм болады. Барлық дуаль сандардың жазықтығы „балама комплекстік жазықтық" болып табылады.

Дуаль сандарды қосу, азайту және көбейту

$$(a + \varepsilon b) + (c + \varepsilon d) = (a + c) + \varepsilon(b + d),$$
$$(a + \varepsilon b) - (c + \varepsilon d) = (a - c) + \varepsilon(b - d),$$
$$(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) = ac + \varepsilon(ad + bc)$$

формулалары арқылы анықталады.

Соңғы формула $ad + bc = 0$ немесе $\frac{b}{a} = -\frac{d}{c}$ теңдігі орындалғанда және тек сонда ғана көбейтінді нақты болатынын көрсетеді. Егер $\overline{z} = a - \varepsilon b$ арқылы $z = a + \varepsilon b$ дуаль санының түйіндесін белгілейтін болсақ, онда

$$z \cdot \overline{z} = (a + \varepsilon b) \cdot (a - \varepsilon b) = a^2, |z| = |a|$$

көбейтіндісі нақты санды береді.

Сондай-ақ дуаль сандар үшін

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2,\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2,\ \overline{z_1 : z_2} = \overline{z}_1 : \overline{z}_2 \qquad (2)$$

формулалары толықтай орындалады.

Бұл ретте дуаль санға бөлу ережесі

$$\frac{c+\varepsilon d}{a+\varepsilon b} = \frac{(c+\varepsilon d)(a-\varepsilon b)}{(a+\varepsilon b)(a-\varepsilon b)} = \frac{ca+(-cb+da)}{a^2} = \frac{c}{a} + \varepsilon\frac{-cb+da}{a^2}$$

(3)

теңдігі арқылы анықталады. Бұдан дуаль санның модулі нөлден өзгеше болғанда және тек сонда ғана дуаль санға бөлу ережесі анықталатынын көреміз. Алайда модулі нөлге тең дуаль санның өзі нөлден өзгеше болуы мүмкін. Нөлдік модульге бөлу мүмкін болмайтын жағдай біз үшін қиындық туғызады. (3) теңдік үшін дербес жағдайлар қарастырайық:

1) $c = b,\ d = 0$ және $a = 0$ дейік, сонда (3) теңдік $\frac{1}{\varepsilon}$ өрнегін анықтайды;

2) $c = 1,\ b = d = 0$ және $a = \infty$ делік, сонда (3) теңдік $\frac{1}{0}$ санын анықтайды.

Бұл жағдайларда $\frac{1}{\varepsilon}$ және $\frac{1}{0}$ сандарының табиғаты жаңа болып табылады. Оларды шартты түрде сәйкесінше ω және ∞ арқылы белгілейміз; сондай-ақ мүмкін болатын $c\omega$, $c \neq 0$ түрдегі барлық сандарды қарастырамыз. Сонда кез келген дуаль санның кері саны $b \neq 0$ кезінде

$$\frac{1}{b\varepsilon} = \frac{1}{b}\omega;\ \frac{1}{0} = \infty$$

теңдігі арқылы анықталады.

∞ таңбасының әрекет ережелері

$$z + \infty,\ z - \infty = \infty,\ z \cdot \infty = \infty,\ \frac{\infty}{z} = \infty,\ \frac{z}{\infty} = 0$$

теңдіктері арқылы анықталады, мұнда z – кез келген дуаль сан.

$a\omega$ сандарының әрекет ережелері

$$(a + \varepsilon b) + c\omega = c\omega, (a + \varepsilon b) - c\omega = (-c)\omega;$$
$$(a + \varepsilon b)c\omega = (ac)\omega;$$
$$\frac{c\omega}{a+\varepsilon b} = \frac{c}{a}\omega,\ \frac{a+\varepsilon b}{c\omega} = \frac{a}{c}\varepsilon;$$
$$c\omega \pm d\omega = (c \pm d)\omega,\ c\omega d\omega = \infty$$

теңдіктері арқылы анықталады.

Айталық

$$\overline{c\omega} = -c\omega,\ \overline{\infty} = \infty.$$

Сонда кеңейтілген ($c\omega$, ∞ сандарын енгізу арқылы) дуаль сандар жиыны үшін $\bar{\bar{z}} = z$ теңдігі және барлық (2) ережелер сақталады.

$$c\varepsilon \cdot d\varepsilon = (cd)\varepsilon^2 = 0$$

теңдігінен бұл сандар нөлдік бөлгіштер деп аталады.

Модулі нөлдік емес дуаль санның

$$a + \varepsilon b = a\left(1 + \varepsilon\frac{b}{a}\right) = r(1 + \varepsilon\varphi)$$

түрде жазылуын оның тригонометрикалық түрде жазылуы деп атайды. Мұнда $r = |z| = a$, ал $\frac{b}{a} = \varphi$ қатынасы z дуал санының аргументі деп аталады және $Argz$ арқылы белгіленеді (φ – кез келген нақты сан).

$z_1 = x_1 + \varepsilon y_1$ және $z_2 = x_2 + \varepsilon y_2$ дуаль сандары берілді дейік. Сонда

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + \varepsilon y_1)(x_2 + \varepsilon y_2) = r_1 r_2(1 + \varepsilon\varphi_1)(1 + \varepsilon\varphi_2)$$
$$= r_1 r_2\big(1 + \varepsilon(\varphi_1 + \varphi_2)\big);$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(1 + \varepsilon\varphi_1)}{r_2(1 + \varepsilon\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\big(1 + \varepsilon(\varphi_1 - \varphi_2)\big).$$

Демек дуаль сандарды көбейткенде олардың модульдері көбейтіледі, ал аргументтері қосылады; бөлгенде олардың модульдері бөлінеді, ал аргументтері азайтылады. Одан әрі көбейту ережесіне сүйене отырып дуаль сандар үшін

$$[r(1 + \varepsilon\varphi)]^n = r^n(1 + \varepsilon n\varphi)$$

теңдігі арқылы анықталатын Муавр формуласын жазуға болады. Муавр формуласын қолдана отырып дуаль саннан n-ші дәрежелі түбір табу формуласын

$$\sqrt[n]{r(1 + \varepsilon\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(1 + \varepsilon\frac{\varphi}{n}\right)$$

теңдігі арқылы анықтаймыз. ($r \neq 0$ кезінде соңғы формуладан дуаль санның тақ дәрежелі түбірі бірмәнді анықталады; егер $r < 0$ болса, онда оның жұп дәрежелі түбірі болмайды).

Жалпы комплекс айнымалы негізгі элементар функциялар

Алдымен жалпы комплекс сандар үшін Эйлер формуласын қорытып шығарамыз [8,9].

1. e^z көрсеткіштік функциясы кез келген $z = x + py$, $p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$ үшін

$$w = e^z = e^{x+py} = e^x\big(I(\theta_0, \theta_1, y) + pK(\theta_0, \theta_1, y)\big)$$

теңдігі арқылы анықталсын дейік, мұнда

$$e^{py} = I(\theta_0, \theta_1, y) + pK(\theta_0, \theta_1, y). \qquad (4)$$

(4) теңдіктің екі жағын бірдей y тәуелсіз айнымалысы бойынша дифференциалдайық, сонда

$$pe^{py} = I'(y) + pK'^{(y)}, p\big(I(y) + pK(y)\big) =$$
$$= pI(y) + (-\theta_0 + p\theta_1)K(y) = I'(y) + pK'(y).$$

Бұдан $I'(y) = -\theta_0 K(y)$, $K'(y) = I(y) + \theta_0 K(y)$ сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі алынады. Нәтижесінде $I(\theta_0, \theta_1, y)$ және $K(\theta_0, \theta_1, y)$ функцияларын табу үшін $I(0) = 1,\ I'(0) = 0$ және $K(0) = 0,\ K'(0) = 1$ бастапқы шарттарын қанағаттандыратын

$$I''(y) - \theta_1 I'(y) + \theta_0 I(y) = 0,$$
$$K''(y) - \theta_1 K'(y) + \theta_0 K(y) = 0$$

(5)

түрдегі біртекті екінші ретті тұрақты коэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесін құрамыз. Әрі қарай екі теңдеуге де ортақ жүйенің характеристикалық теңдеуін құрамыз

$$k^2 - \theta_1 k + \theta_0 = 0,\ k_{1,2} = \frac{\theta_1}{2} \pm \sqrt{\frac{\theta_{1_1}^{\ 2}}{4} - \theta_0}.$$

Бірінші жағдайда $D = \frac{\theta_{1_1}^{\ 2}}{4} - \theta_0 < 0$ делік. Сонда $\sqrt{-D} > 0$ және $k_{1,2} = \frac{\theta_1}{2} \pm i\sqrt{-D}$, мұнда $i^2 = -1$. Демек (5) жүйенің жалпы шешімдері

$$I(\theta_0, \theta_1, y) = e^{\frac{\theta_1}{2}y}\big(C_1 cos\sqrt{-D}y + C_2 sin\sqrt{-D}y\big)$$

және

$$K(\theta_0, \theta_1, y) = e^{\frac{\theta_1}{2}y}\big(C_3 cos\sqrt{-D}y + C_4 sin\sqrt{-D}y\big)$$

түрінде табылады. Бұл теңдіктерден бастапқы шарттарды қанағаттандыратын (θ_0, θ_1, y) және $K(\theta_0, \theta_1, y)$ функциялары

$$I = e^{\frac{\theta_1}{2}y}\left(cos\sqrt{-D}y - \frac{\theta_1}{2\sqrt{-D}} sin\sqrt{-D}y\right) \text{ және } K = e^{\frac{\theta_1}{2}y}\frac{1}{\sqrt{-D}} sin\sqrt{-D}y$$

түрде анықталады. Сондықтан эллиптикалық сандар жүйесі үшін Эйлер формуласы

$$e^{\left(p-\frac{\theta_1}{2}\right)y}=\left(cos\sqrt{-D}y-\frac{\theta_1}{2\sqrt{-D}}sin\sqrt{-D}y\right)+p\frac{1}{\sqrt{-D}}sin\sqrt{-D}y$$
(6)

түрде жазылады. Дербес жағдайда, егер $\theta_0=1$, $\theta_1=0$ болса, онда $D=-1$, $\sqrt{-D}=1$ және $p=i$. Демек

$$e^{iy}=cosy+isiny.$$

Негізгі мақсат – дуаль сандар үшін Эйлер формуласын қорытып шығару. Осындай жолмен, яғни дифференциалдық теңдеулер жүйесін құрып, $D=0$ жағдайында Эйлер формуласын алуға болады. Жоғарыда дуаль сандар параболалық сандар жүйесінің ішкі жиынын құрайтыны және одан $\theta_0=\theta_1=0$ шарттарында дуаль сандар алынатыны айтылды. Олай болса (6) эллиптикалық сандар жүйесі үшін жазылған Эйлер формуласында $\sqrt{-D}\to 0$ нөлге ұмтылдырып және бірінші тамаша шекті еске ала отырып, дуаль сандар үшін Эйлер формуласын

$$e^{\varepsilon y}=1+\varepsilon y$$

түрде жазамыз, мұнда $\varepsilon=p$. Сонда дуаль сандар үшін экспонента

$$e^{z}=e^{x+\varepsilon y}=e^{x}(1+\varepsilon y)$$

түрде анықталады.

Λ алгебрасының Λ^* мультипликативті тобы барлық нөлдік емес элементтер үшін $z=x+\varepsilon y$ сандарынан тұрады. Λ^* тобындағы дуаль санын көрсеткіштік түрде

$$z=xe^{\varepsilon\varphi}=x(1+\varepsilon\varphi),\qquad \varphi={}^{y}/_{x}$$

теңдігі арқылы жазуға болады.

Сонымен дуаль санның нормасы $\|z\|^2=z\cdot\overline{z}=x^2$ оның нақты бөлігінің нормасымен беттеседі. Демек $z=\varepsilon y$ түрдегі дуаль сандардың нормасы жоғалады. Алайда дуаль сандар қызықты қасиетке ие: ε нильпотентті бірлікті ақырсыз аз параметр деп санауға болады. Бұл тұжырым қайсыбір функцияның Тейлор қатарына жіктелуі тек екі мүшеден тұратынын білдіреді. $e^{\varepsilon t}$ түрдегі экспонента (мұнда t – қайсыбір параметр) кез келген $z=x+\varepsilon y$ дуаль санының „параболалық болуының" операторы болады. Бұл оператордың $z=x+\varepsilon y$ дуаль санына әрекеті $e^{\varepsilon t}z=x+\varepsilon(y+xt)$ теңдігі арқылы анықталады.

Дуаль санның матрицалық көрсетілімі

Дуаль сандарды нақты сандардың матрицалары ретінде көрсетуге болады. Бұл ретте дуаль сандарды қосу матрицаларды қосуға, ал көбейту матрицаларды көбейтуге сәйкес келеді. $\varepsilon=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ деп алайық. Сонда кез келген дуаль санның матрицалық көрсетілімі

$$a+\varepsilon b=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$$

түрде жазылады.

Ескерту. Егер ε үшін $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ матрицасын алатын болсақ, онда кез келген $z = x + \varepsilon y$ дуаль санының матрицалық көрсетілімі $z = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$ түрде жазылады.

Дуаль айнымалының аналитикалық функциялары

Дуаль айнымалының дуаль мәнді функциясының аналитикалық шарттары комплекс айнымалының аналитикалық шарттарына ұқсас анықталады. Сондықтан Коши-Риман шарттарын жалпы комплекс айнымалы функциялар үшін анықтайық. Ол үшін жалпы комплекс айнымалы

$$w = f(z) = u(x, y) + pv(x, y)$$

функциясы берілсін дейік, мұнда $z = x + py$, $p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$.

Одан әрі $z = x + py$ және y айнымалыларын $z = x + py$ және $\overline{z} = x + \theta_1 y - py$ айнымалылары арқылы өрнектейік:

$$x = \frac{1}{\theta_1 - 2p}\left((\theta_1 - p)z - p\overline{z}\right), \qquad y = \frac{1}{\theta_1 - 2p}(-z + \overline{z}.)$$

Сонда $f(z) = u(x, y) + pv(x, y)$ функциясын z және $\overline{z}$ айнымалыларының функциясы ретінде қарастыруға болады. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ дербес туындысын табайық. Екі айнымалы күрделі функцияны дифференциалдау ережесі бойынша

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} + p\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}}\right) =$$
$$= \frac{1}{\theta_1 - 2p}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \theta_0\frac{\partial v}{\partial x} - p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \theta_1\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)$$

теңдігін аламыз, мұнда $\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} = -\frac{p}{\theta_1 - 2p}$, $\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{\theta_1 - 2p}$.

Теорема. Коши-Риман шарттары мен $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ шарты эквивалентті.

Олай болса жалпы комплекс айнымалы функцияның аналитикалық болуының Коши-Риман шарттары

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \theta_1\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} + \theta_0\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad (7)$$

түрінде жазылады.

Енді (7) Коши-Риман шарттарының дербес жағдайларын қарастырамыз:

1) комплекс сандар үшін $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = 0$; демек комплекс айнымалы функциялар үшін Коши-Риман шарттары

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

түрінде жазылады;

2) қос сандар үшін $\theta_0 = -1$, $\theta_1 = 0$; демек қос айнымалы функциялар үшін Коши-Риман шарттары

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

түрінде жазылады;

3) дуаль сандар үшін $\theta_0 = \theta_1 = 0$; демек дуаль айнымалы функциялар үшін Коши-Риман шарттары

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(8)

түрінде жазылады.

Λ алгебрасында $f(z) = u(x, y) + \varepsilon v(x, y)$, $\varepsilon^2 = 0$ функциясын қарастырамыз. Сонда (8) Коши-Риман шарттарын қанағаттандыратын дуаль айнымалы аналитикалық $f(z)$ функциясы

$$f(z) = \varphi(x) + \varepsilon\big(\varphi'(x)y + \psi(x)\big), \varepsilon^2 = 0$$

түрде табылады, мұнда $\varphi(x)$ және $\psi(x)$ дифференциалданатын функциялар. $\frac{d}{dz}$ туындысы $\frac{d}{dx}$ ретінде әрекет етеді. Демек f функциясы φ, ψ жұбы арқылы анықталатын болса, онда f' функциясы φ', ψ' жұбы арқылы анықталады. Бұл ретте $z \mapsto f(z)$ бейнеленуінің Якоби матрицасы

$$\begin{pmatrix} \varphi' & 0 \\ \varphi'' y + \psi' & \varphi' \end{pmatrix}$$

түрде анықталады. Сондықтан $z \mapsto f(z)$ бейнелеуінде $z(t) = x(t) + \varepsilon y(t)$ қисығының ${y'(t)}\big/{x'(t)}$ бұрыштық коэффициенті $(\varphi'' y + \psi')/\varphi'$ санына өзгереді. Қисықтардың қиылысу нүктесінде олардың бұрыштық коэффициенттерінің айырымы өзгермейтінін көреміз.

$y = k_1 x + b_1$ және $y = k_2 x + b_2$ түзулерінің арасындағы бұрыштық өлшемі деп (бағыттары бар) олардың бұрыштық коэффициенттерінің айырымын айтамыз. Қиылысу нүктесінің абсциссасы x_0 болатын $y = f_1(x)$ және $y = f_2(x)$ қисықтарының арасында бұрыштық өлшем деп олардың x_0 нүктесінен жүргізілген жанамаларының бұрыштық өлшемін, яғни $f_1'(x_0) - f_2'(x_0)$ шамасын айтамыз. Сонымен аналитикалық функция конформды бейнелеу болады, өйткені ол қисықтар арасындағы бұрыштарды сақтайды. $e^z = e^x + \varepsilon e^x y$ экспонентасы аналитикалық функция, өйткені $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Демек оның туындысы $\frac{d}{dz} e^z = \frac{d}{dx}(e^x + \varepsilon e^x y) = e^x(1 + \varepsilon y) = e^z$ өзіне тең.

Ескерту. Дуаль сандардың негізгі пайдалы қасиетіне $f(x + \varepsilon y) = f(x) + \varepsilon f'(x) y$ формуласы жатады.

Галилей геометриясы [11]. Галилей геометриясының негізгі түсініктері мен қасиеттерін атап өтейік.

Аффиндік түрлендіру жазықтықтағы кез келген бағытты (параллель түзулердің шоғы) қайтадан белгілі бір бағытқа аударатындықтан, берілген бағытты (ерекше бағытты) сақтайтын аффиндік түрлендірулерді қарастырамыз. Жазықтықта осындай түрлендірулердің жиынтығы топ құрайды, ал олардың сәйкес геометриялары Галилей геометриясы деп аталады.

xOy жазықтығында Галилей геометриясының ″қозғалысы″

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = vx + y + b \end{cases}$$

(9)

формулалары арқылы беріледі. Алда ығысу және *Oy* өсінің бағытында параллель тасымалдау кезінде *xOy* жазықтығында фигуралардың қасиеттері сақталатын

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = vx + y \end{cases} \text{және} \begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b \end{cases}$$

түрлендірулерді қарастырамыз.

Галилей геометриясында *Oy* өсіне параллель түзулер басқа түзулермен салыстырғанда ерекше роль атқарады (керісінше *Ox* өсіне параллель түзулер ″басқа қарапайым″ түзулерден ерекшеленбейді).

Галилей геометриясында $M(x, y)$ және $M_1(x_1, y_1)$ нүктелерінің арасындағы қашықтық $d_{MM_1} = x_1 - x$ формуласы бойынша анықталады. $z = x + \varepsilon y$ және $z_1 = x_1 + \varepsilon y_1$ дуаль сандары берілсін дейік. Сонда

$$|z - z_1| = |x - x_1 + \varepsilon(y - y_1)| = |x - x_1|.$$

(9) түрлендірудің негізгі қасиеттері:

1) әрбір түзу сызық қайтадан түзу сызыққа бейнелейді;

2) параллель түзулер қайтадан параллель түзулерге бейнелейді;

3) бір түзудің бойында жатқан *AB* және *CD* кесінділері $\frac{C'D'}{A'B'} = \frac{CD}{AB}$ теңдігі орындалғанда және тек сонда ғана $A'B'$ және $C'D'$ кесінділеріне бейнелейді.

Осы шарттардың ішінен 2-шарттың дәлелдеуін қарастырайық. $z_1 = a + \varepsilon b$ және $z_2 = c + \varepsilon d$ дуаль сандары берілсін дейік. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ теңдігі орындалғанда және тек сонда ғана $\frac{z_1}{z_2}$ қатынасы нақты санды береді. Дуаль сандарды бөлу ережесінен жоғарыдағы теңдіктің орындалатынын көреміз. Демек бұл сандардың геометриялық бейнелері болатын түзулер параллель болады.

Ескерту. Бұл бөлімде біз мақаланың көлеміне байланысты Галилей геометриясының тек алғашқы ұғымдарын бердік. Соған қарамастан дуаль сандар мен Галилей геометриясының арасында байланыс бар екенін көреміз.

Нәтижелер және талқылау

Сонымен дуаль сандар нақты сандар өрісінде мультипликативті операцияға қатысты бірлік элементі бар екі өлшемді коммутативті ассоциативті алгебра құрайды. Комплекс сандар өрісінен айырмашылығы бұл алгебраның нөлдік бөлгіштері бар. Дуаль сандарды көбейту комплекс сандарды көбейтуге ұқсас, бірақ бір қосылғышқа кем. Бұдан келесі маңызды тұжырымды байқауға болады: өрнектің жорамал бөлігі іс жүзінде оның нақты бөлігіне ешқандай әсер етпейді.Дуаль сандарды бір-біріне бөлгенде нәтижесі әрқашан дуаль санды береді. Алайда оның дуаль жорамал бөлігі бөлшектің туындысының өрнегіне «күдікті» түрде ұқсайды. Әрине бұл себепсіз емес. Дуаль сандардың негізгі қолданыстарының бірі – өрнектерді автоматты түрде дифференциалдау [12].

Қорытынды

Мақалада комплекс сандардың екі өлшемді алгебрасы жалпы комплекс сандар тұрғысынан қарастырылды. Эллиптикалық, гиперболалық және параболалық сандар жүйелері үшін Эйлер формулалары қарапайым дифференциалдық теңдеулердің көмегімен алынды.

Жалпы комплекс айнымалы функциялар үшін Коши-Риман шарттары қорытылып шығарылды. Эллиптикалық сандар жүйесі үшін жазылған Эйлер формуласында квадраттық форманың дискриминантын нөлге ұмтылдыра отырып параболалық сандар жүйесі үшін Эйлер формуласы қорытылып шығарылды. Сондай-ақ параболалық айнымалы функциялардың Коши-Риман шарттары да осындай жолмен алынды. Дуаль сандар мен Галилей геометриясының арасындағы байланыстар қарастырылды. Комплекс санға жазықтықта бір нүкте сәйкес қойылса, әрбір дуаль санға бағдарланған түзу сәйкес қойылды. Нәтижесінде сандар жиыны мен Галилей геометриясының арасында бірмәнді сәйкестік орнатылады деген қорытынды жасалды.

ПАЙДАЛАНҒАН ДЕРЕКТЕР ТІЗІМІ

1 **Лаврентьев, М. А., Шабат, Б.** В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М. : Наука, 1973. – 736 с.

2 **Sagindykov, B.** The internal structure of a complex number // Вестник КазНТУ им. К. И. Сатпаева. – 2014. – №4(104). – С. 402–409.

3 **Sagindykov, B.** The generalized complex exponent and its application for finding sums // International Journal of Advanced Research. – 2013. – Volume 1. – Issue 10. – P. 546–550.

4 **Sagindykov, B.** Analytical functions of generalized complex variables and some applications // International Journal of Research in Education Technology. – 2014. – Volume 5. – No.1. – P. 569-575.

5 **Yaglom, I. M.** Complex Numbers in Geometry. – New York : Academic Press, 1968.

6 **Сагиндыков, Б. Ж.** Понятие комплексных чисел в аффинной системе координат и поворот аффинной плоскости // Естественные и математические науки в современном мире. – 2016. – №1(36). – С. 65–71.

7 **Harkin, A. A.** Geometry of generalized Complex Numbers. – Springer, 2013. – 400 p.

8 **Сагиндыков, Б. Ж., Бимурат, Ж.** Обобщенная комплексная экспонента и ее применение для отыскания суммы // Естественные и математические науки: вопросы и тенденции развития. – 2013. – С. 7–16.

9 **Сагиндыков, Б. Ж., Бимурат, Ж.** Аналитические функции обобщенного комплексного переменного и некоторые приложения // Естественные и математические науки в современном мире. – 2014. – с. 7–19.

10 **Павлов, Д. Г., Кокарев, С. С.** Алгебра, геометрия и физика двойных чисел // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2013. – Т. 10, Issue. – 1(19). – С. 86–161.

11 **Хачатурян, А. В.** Геометрия Галилея. – Moscow : Издательство центра непрерывного математического образования, 2005. – 45 с.

12 **Шевляков, А. А.** Автоматическое дифференцирование в задаче управления системой твердых тел со связями // УБС. – 2020. – Выпуск 85. – С. 87–112. – https://doi.org/10.25728/ubs.2020.85.5.

REFERENCES

1 **Lavrent`ev, M. A., Shabat, B. V.** Problemy` gidrodinamiki i ix matematicheskie modeli [Problems of hydrodynamics and their mathematical models]. – Moscow : Nauka, 1973. – 736 p.

2 **Sagindykov, B.** The internal structure of a complex number // Bulletin of KazNTU. – 2014. – №4(104). – P. 402-409.

3 **Sagindykov, B.** The generalized complex exponent and its application for finding sums // International Journal of Advanced Research. – 2013. – Volume 1. – Issue 10. – P. 546-550.

4 **Sagindykov, B.** Analytical functions of generalized complex variables and some applications // International Journal of Research in Education Technology. – 2014. – Volume 5. – No.1. – P. 569-575.

5 **Yaglom, I. M.** Complex Numbers in Geometry. – New York : Academic Press, 1968.

6 **Sagindykov, B. Zh.** Ponyatie kompleksny`x chisel v affinnoj sisteme koordinat i povorot affinnoj ploskosti [Concept of complex numbers in affine coordinate system and rotation of affine plane] // Estestvenny`e i matematicheskie nauki v sovremennom mire. – 2016. – №1(36). – P. 65-71.

7 **Harkin, A. A.** Geometry of generalized Complex Numbers. – Springer, 2013. – 400 p.

8 **Sagindykov, B. Zh., Bimurat, Zh.** Obobshhennaya kompleksnaya e`ksponenta i ee primenenie dlya oty`skaniya summy` [Generalized complex exponent and its application for finding sums] // Estestvenny`e i matematicheskie nauki: voprosy` i tendencii razvitiya. – 2013. – P. 7-16.

9 **Sagindykov, B. Zh., Bimurat, Zh.** Analiticheskie funkcii obobshhennogo kompleksnogo peremennogo i nekotory`e prilozheniya [Analytical functions of generalized complex variable and some applications] // Estestvenny`e i matematicheskie nauki v sovremennom mire. – 2014. – P. 7–19.

10 **Pavlov, D. G., Kokarev, S. S.** Algebra, geometriya i fizika dvojny`x chisel [Algebra, geometry, and physics of dual numbers] // Giperkompleksny`e chisla v geometrii i fizike. – 2013. – T. 10, Issue. – 1(19). – P. 86–161.

11 **Khachaturyan, A. V.** Geometriya Galileya [Geometry of Galilei]. – Moscow : Izdatel`stvo centra neprery`vnogo matematicheskogo obrazovaniya, 2005. – 45 p.

12 **Shevlyakov, A. A.** Avtomaticheskoe differencirovanie v zadache upravleniya sistemoj tverdy`x tel so svyazyami [Automatic differentiation in control of constrained rigid-body systems] // UBS. – 2020. – Vy`pusk 85. – P. 87–112. https://doi.org/10.25728/ubs.2020.85.5.

04.02.24 ж. баспаға түсті.
09.02.24 ж. түзетулерімен түсті.
07.03.24 ж. басып шығаруға қабылданды.

Б. Ж. Сагиндыков[1] , Ж. Бимурат[2]
[1]Satbayev University, Республика Казахстан, г. Алматы
[2]Институт горного дела имени Д. А. Кунаева,
Республика Казахстан, г. Алматы
Поступило в редакцию 04.02.24.
Поступило с исправлениями 09.02.24.
Принято в печать 07.03.24.

ОБЩАЯ ДВУМЕРНАЯ АЛГЕБРА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Тема данной статьи касается алгебры и геометрии, обнаруживая их разнообразные и плодотворные *взаимосвязи. В современных исследованиях активно изучаются различные типы комплексных чисел, имеющие важное значение для решения современных задач. Однако учебные программы высшей школы не уделяют должного внимания этому направлению. В данной статье представлен исходный случай двумерной алгебры общих комплексных чисел. Рассматривается классификация общих комплексных чисел на эллиптические, гиперболические и параболические системы в зависимости от дискриминанта квадратичной формы, определяя их алгебраическую структуру. Обобщается формула Эйлера. Кроме того, были определены условия Коши-Римана для общих комплексных функций с общим комплексным аргументом.*

Для двойных чисел, входящих в подмножество параболических чисел, определяются их алгебраические, тригонометрические и матричные представления. Рассматриваются аналитические функции двойной переменной и устанавливается однозначное соответствие между аффинными точками и общими числами на плоскости. С целью выявления геометрической интерпретации двойных чисел приводятся сведения из геометрии Галилея, что приводит к обнаружению связи между геометрией Галилея на плоскости и геометрией плоскости двойных чисел.

Ключевые слова: дуальные числа, эллипс, гипербола, парабола, формула Эйлера, условия Коши-Римана, геометрия Галилея.

***B. Sagindykov[1] , Zh. Bimurat[2]**
[1]Satbayev University, Republic of Kazakhstan, Almaty
[2]Mining Institute named after D. A. Kunaev, Republic of Kazakhstan, Almaty
Received 04.02.24.
Received in revised form 09.02.24.
Accepted for publication 07.03.24.

GENERAL TWO-DIMENSIONAL ALGEBRA OF COMPLEX NUMBERS

The theme of this article pertains to algebra and geometry, revealing their diverse and fruitful interconnections. Various types of complex numbers, crucial for solving modern problems, are actively studied in contemporary research.

However, higher education curricula often overlook this direction. This article presents the foundational case of two-dimensional algebra of general complex numbers. It examines the classification of general complex numbers into elliptic, hyperbolic, and parabolic systems based on the discriminant of the quadratic form, thereby defining their algebraic structure. Euler's formula is generalized. Additionally, the Cauchy-Riemann conditions for general complex functions with a common complex argument are determined.

For dual numbers, which are a subset of parabolic numbers, their algebraic, trigonometric, and matrix representations are defined. Analytical functions of dual variables are considered, establishing a one-to-one correspondence between affine points and general numbers on the plane. In order to elucidate the geometric interpretation of dual numbers, insights from Galilean geometry are provided, leading to the discovery of the connection between Galilean geometry on the plane and the geometry of the plane of dual numbers.

Keywords: dual numbers, ellipse, hyperbola, parabola, Euler formula, Cauchy-Riemann conditions, Galilean geometry.

Теруге 11.03.2024 ж. жіберілді. Басуға 29.03.2024 ж. қол қойылды.
Электрондық баспа
7,50 Mb RAM
Шартты баспа табағы 10,01. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.
Компьютерде беттеген: Е. Е. Калихан
Корректор: А. Р. Омарова
Тапсырыс № 4206

Сдано в набор 11.03.2024 г. Подписано в печать 29.03.2024 г.
Электронное издание
7,50 Mb RAM
Усл.печ.л. 10,01. Тираж 300 экз. Цена договорная.
Компьютерная верстка Е. Е. Калихан
Корректор: А. Р. Омарова
Заказ № 4206

«Toraighyrov University» баспасынан басылып шығарылған
«Торайғыров университеті» КЕ АҚ
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.

«Toraighyrov University» баспасы
«Торайғыров университеті» КЕ АҚ
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.
+7(718)267-36-69

e-mail: kereku@tou.edu.kz
www.vestnik.tou.edu.kz
https://vestnik-pm.tou.edu.kz/